

Compito ①

Robotica con Laboratorio - Esame 21 novembre 2022

COGNOME:

NOME:

MATRICOLA:

CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

- Si considerino tre matrici di rotazione R_1 , R_2 e R_3 e si indichi con R il prodotto $R_1 R_2 R_3$ (cioè $R = R_1 R_2 R_3$).
 - Calcolare R nel caso in cui $R_1 = R_2 = R_3 = R_z(20^\circ)$ [4pt]
 - Si assuma ora $R_1 = R_x(\alpha)$ e $R_3 = R_z(\beta)$, con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 90^\circ$. Calcolare la matrice R_2 per cui R risulti pari a $R_x(\gamma)$, con $\gamma = 120^\circ$ e determinare l'asse della rotazione descritta da R_2 . Successivamente dire (giustificando la risposta) se, fissata una qualsiasi matrice di rotazione R_2 , è sempre possibile soddisfare la relazione $R = R_1 R_2 R_3$ (ancora con $R_1 = R_x(\alpha)$, $R_3 = R_z(\beta)$ e $R = R_x(\gamma)$) scegliendo opportunamente α , β e γ [5+2+3pt]
- Si consideri un robot SCARA con i seguenti parametri: $h_0 = 100\text{cm}$, $\ell_1 = \ell_2 = 40\text{cm}$.
 - Calcolare le variabili di giunto θ_1 , θ_2 , d_3 e θ_4 che permettono di posizionare la pinza nel punto $(x_d, y_d, z_d) = (-50, 40, 60)$ con il piano di apertura della pinza ortogonale all'asse x_0 [7pt]
 - Calcolare ora θ_1 e θ_2 affinché $x_d = y_d = 0$, discutendo esistenza e unicità della soluzione eventualmente trovata [3+2pt]
- Si considerino due unicyci A e B aventi le ruote con raggio rispettivamente $r_A = 2\text{cm}$ e $r_B = 5\text{cm}$. Sia $d_A = 10\text{cm}$ e $d_B = 20\text{cm}$ la distanza tra le ruote nei due unicyci. Si assuma che le ruote destra e sinistra dell'unicyclo A ruotino rispettivamente a velocità costante $\omega_{R,A} = 5\text{rad/s}$ e $\omega_{L,A} = 8\text{rad/s}$. Calcolare la velocità di rotazione $\omega_{R,B}$ e $\omega_{L,B}$ delle ruote destra e sinistra dell'unicyclo B affinché questo, partendo dalla stessa posa dell'unicyclo A , segua la stessa traiettoria di quest'ultimo [5pt]

Es. 1a) Poiché le 3 rotazioni sono rispetto allo stesso asse z , si ha:

$$R = R_z(20^\circ) R_z(20^\circ) R_z(20^\circ) = R_z(60^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1b) $R = R_1 R_2 R_3$. Premoltiplicando entrambi i membri per R_1^T :

$R_1^T R = R_1^T R_1 R_2 R_3 = R_2 R_3$. Postmoltiplicando per R_3^T :

$$R_1^T R R_3^T = R_2 R_3 R_3^T = R_2, \text{ per cui la formula è } \boxed{R_2 = R_1^T R R_3^T}$$

Nel caso specifico: $R_2 = R_x^T(\alpha) R_x(\gamma) R_z^T(\beta) = R_x(-\alpha) R_x(\gamma) R_z(-\beta) = R_x(\gamma - \alpha) R_z(-\beta) = R_x(90^\circ) R_z(-90^\circ)$.

Ciò $R_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{R_x(90^\circ)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z(-90^\circ)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_{\vec{r}}(\theta)$

con $\theta = \pm 2 \cos\left(\frac{0-1}{2}\right) = \pm 2 \cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm 120^\circ$.

Scegliendo $+120^\circ$, $\vec{r} = \frac{1}{250} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{250} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.58 \\ -0.58 \end{bmatrix}$

Come visto, $R_2 = R_x(-\alpha) R_x(\gamma) R_z(-\beta)$ sarebbe una parametrizzazione 3×3 di R_2 , cioè con due rotazioni consecutive ~~rispetto allo stesso asse~~ non tra le 12 eccezioni. Faccendo inoltre il prodotto $R_x(\gamma - \alpha) R_z(-\beta)$, si ottiene una matrice ~~sempre, per qualsiasi α, β, γ~~ il cui elemento $(1,3)$ è pari a 0, per cui qualsiasi matrice R_2 con $R_2(1,3) \neq 0$ (per esempio $R_2 = R_y(90^\circ)$) non può essere parametrizzata. Le risposte quindi è No.

Es. 2a) $\theta_2 = \pm \alpha \cos\left(\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) = \pm \alpha \cos(0.28) = \pm 73.7^\circ$

Scelgo $\theta_2 = +73.7^\circ$

$\theta_1 = \arctan2(-l_2 s_2 x_d + (l_1 + l_2 c_2) y_d, (l_1 + l_2 c_2) x_d + l_2 s_2 y_d) = \arctan2(3969.3, -1027.1)$
 $= 104.5^\circ$ (N.B. poiché il 2° argomento dell' $\arctan2$ è negativo, o come aggiungere (o togliere) 180° all' $\arctan(-\frac{3969.3}{1027.1})$).

$\theta_3 = \theta_d - \theta_0 = 60 - 100 = -40^\circ$

$\theta_u = \theta_d - \theta_1 - \theta_2 = 0^\circ - \theta_1 - \theta_2 = -178.2^\circ$

$\theta_d = 0^\circ$ perché $x_u // x_0$, essendo sia x_u sia x_0 ortogonali al piano di apertura della pinza (anche $\theta_d = 180^\circ$ era ok).

2b) $x_d = y_d = 0$ è possibile in questo caso essendo $l_1 = l_2 = l$ e si ottiene con $\theta_2 = \pm \alpha \cos\left(\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) = \pm \alpha \cos\left(\frac{-2l^2}{2l^2}\right) = \pm \alpha \cos(-1) = \underline{180^\circ}$

N.B. $+180^\circ$ e -180° sono lo stesso angolo.

θ_1 invece è arbitrario (infinita soluzioni quindi): verrebbe $\arctan2(0,0)$ che non è definita, ma sappiamo che con $\theta_2 = 180^\circ$ e $l_1 = l_2 = l$, $x_d = y_d = 0$ per qualsiasi valore di θ_1 . La soluzione quindi esiste ma non è unica.

3) Per avere lo stesso moto, le velocità v_1 e v_2 dei due unicodi devono essere le stesse (cioè $v_{1A} = v_{1B}$ e $v_{2A} = v_{2B}$). Ricavo quindi v_{1A} e v_{2A} dell'unicodo A e poi calcolo ω_{RB} e ω_{LB} per ottenerle.

$v_{1A} = r_A \frac{\omega_{RA} + \omega_{LA}}{2} = 2 \cdot \frac{5+8}{2} = 13 \text{ cm/s}$

$v_{2A} = r_A \frac{\omega_{RA} - \omega_{LA}}{\phi_A} = 2 \cdot \frac{5-8}{10} = -\frac{3}{5} = -0.6 \text{ rad/s}$

Quindi:

$\omega_{RB} = (v_{1A} + \frac{d_B}{2} v_{2A}) \frac{1}{r_B} = \left[13 + \frac{20}{2} (-0.6)\right] \frac{1}{5} = \frac{7}{5} = \underline{1.4 \text{ rad/s}}$

$\omega_{LB} = (v_{1A} - \frac{d_B}{2} v_{2A}) \frac{1}{r_B} = \left[13 - \frac{20}{2} (-0.6)\right] \frac{1}{5} = \frac{19}{5} = \underline{3.8 \text{ rad/s}}$

