

COGNOME:

NOME:

CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Calcolare la matrice R corrispondente alla seguente sequenza di rotazioni del sistema mobile SR rispetto a quello fisso SR' : 1) Rotazione di 90° rispetto a e_z ; 2) Rotazione di -60° rispetto a e_x ; 3) Rotazione di 90° rispetto a e_y [8pt]
Successivamente, in accordo col teorema di Eulero, calcolare l'asse di rotazione $\vec{u}$ e l'angolo ϕ tali che $R = R_{\vec{u}}(\phi)$, discutendo se la scelta di $\vec{u}$ e ϕ è univoca oppure no. [5+2pt]
2. Si consideri un manipolatore antropomorfo con i seguenti parametri: $d_1 = 25\text{cm}$, $\ell_1 = 5\text{cm}$, $\ell_2 = 50\text{cm}$, $d_4 = 50\text{cm}$ e $d_6 = 5\text{cm}$. Calcolare le 6 variabili di giunto che permettono di posizionare l'estremità della pinza nel punto $(60\text{cm}, 30\text{cm}, 40\text{cm})$ con la pinza rivolta verso il basso e con il piano di apertura della pinza stessa ortogonale all'asse x_0 . Discutere quale (o quali) delle equazioni utilizzate potrebbe non ammettere soluzione e se quella trovata è l'unica soluzione possibile. [7+2+1pt]
3. Scrivere in generale il vincolo (non olonomo) che limita lo spazio delle velocità ammissibili $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ di un unicycle. Supponendo che la posa dell'unicycle sia $(x, y, \theta) = (1, 3, \pi)$, fornire una base per lo spazio delle velocità ammissibili e dire quindi (giustificando la risposta) quali delle seguenti velocità $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ sono possibili: $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0.5, 0)$, $(1, 0, -1)$. [2+2+2pt]

Es. 1 $R = R_y(90^\circ) R_z(90^\circ) R_x(-60^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = R_{\vec{u}}(\phi)$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3}/2 - 1}{2}\right) = \pm 93.84^\circ \quad \left(\begin{array}{l} \text{la scelta} \\ \text{non è} \\ \text{univoca!} \end{array}\right)$$

Sceglia $\phi = + 93.84^\circ$

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sin\phi} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 0.998} \begin{bmatrix} 1/2 - \phi \\ 1/2 - \phi \\ 1 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.94 \end{bmatrix}$$

■

Es. 2 $\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \vec{p}_e \quad R_e = \begin{bmatrix} \vec{n}_e & \vec{s}_e & \vec{a}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{e anche } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$

Infatti: la pinza verso il basso $\Rightarrow \vec{a}_e = \vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Quindi:

$$\vec{p}_w = \vec{p}_e - d_6 \vec{a}_e = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 35 \end{bmatrix}$$

- il piano delle pinze $\perp x_0 \Rightarrow \vec{n}_e = x_0 = \pm x_0 = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ essendo x_0 ortogonale al piano delle pinze
- Se viene scelto di convergere pochi R_e si è ortog. sp.

$$\Rightarrow \theta_1 = \arctan^2(p_{wy}, p_{wx}) = \arctan^2(30, 60) = \underline{\underline{26.57^\circ}}$$

$$A_1 = p_{wx} \ell_1 + p_{wy} s_1 - \ell_1 = 62.08 \text{ cm}$$

$$A_2 = d_1 - p_{wz} = -20 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \arcsin\left(\frac{A_1^2 + A_2^2 - \ell_2^2 - d_4^2}{2\ell_2 d_4}\right) = \underline{\underline{-8.58^\circ}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{altra soluzione ammissibile: } \theta_{3b} = -171.4^\circ \\ \text{che ha lo stesso seno di } \theta_3 \end{array}\right)$$

-0.15

La soluzione esiste perché l'argomento dell' $\arcsin$, cioè -0.15 , è in modulo minore o uguale a 1: questa è l'unica equazione che potrebbe non avere soluzione.

$$\Rightarrow \theta_2 = \arctan^2(d_4 G_3 A_1 - (d_4 S_3 + l_2) A_2, (d_4 S_3 + l_2) A_1 + d_4 G_3 A_2) =$$

$$= \arctan^2(3920.2, 1652.7) = \underline{67.15^\circ}$$

Ora, calcolati $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ posso calcolare $R_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 G_3 & S_1 & C_1 S_{23} \\ S_1 G_3 & -C_1 & S_1 S_{23} \\ S_{23} & 0 & -G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.45 & 0.76 \\ 0.23 & -0.89 & 0.38 \\ 0.85 & 0 & -0.52 \end{bmatrix}$

Quindi

$$R_{36} = (R_0^3)' R_e = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.23 & 0.85 \\ 0.45 & -0.89 & 0 \\ 0.76 & 0.38 & -0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 & -0.23 & -0.85 \\ 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.76 & -0.38 & 0.52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & e_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & e_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & e_z^3 \end{bmatrix}$$

Usando uno dei due gruppi di formule della cinematica inversa del polo sferico:

$$\theta_4 = \arctan^2(a_y^3, a_x^3) = \arctan^2(0, -0.85) = \underline{180^\circ}$$

$$\theta_5 = \arctan^2(\sqrt{(a_x^3)^2 + (e_y^3)^2}, e_z^3) = \arctan^2(0.85, 0.52) = \underline{58.57^\circ}$$

$$\theta_6 = \arctan^2(s_z^3, -n_z^3) = \arctan^2(-0.38, -0.76) = \underline{-153.43^\circ}$$

Ricapitolando: l'unica equazione che potrebbe non aver soluzione è quella per il calcolo di θ_3 . Se la soluzione esiste, ci sono 4 possibili soluzioni, ottenute combinando le due possibili scelte nel calcolo di θ_3 e i due gruppi di formule della cinematica inversa del polo sferico (calcolo di θ_4, θ_5 e θ_6). $\square$

ES. 3

Vincle non olonome in generale:

$$\boxed{x \sin \theta - y \cos \theta = 0}$$

Basi generale delle velocità ammissibili: $\left\{ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\text{Se } \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 180^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{La base è } \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ con } \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Le velocità ammissibili $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ sono quelle per cui esistono v_1 e v_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Pertanto } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è possibile } (v_1 = -1, v_2 = 0);$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ anche } (v_1 = 1, v_2 = 0); \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ NO } (\nexists v_1 \text{ e } v_2); \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ NO } (\nexists v_1 \text{ e } v_2);$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ on } (v_1 = -1, v_2 = -1).$$

$\square$