COMPITO A

COGNOME: NOME: CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Sia R una matrice che descrive la rotazione del sistema mobile SR rispetto al sistema fisso SR' (cioè tale che $q' = Rq$).

   a) Si calcoli R sapendo che, dopo la rotazione, le coordinate del punto $P = (1; -1; 1)$ sono le stesse nei due sistemi di riferimento, l'elemento r_{22} della matrice R è pari a $2/3$ e l'elemento r_{23} è positivo [7pt]

   b) Si determini l'asse associato alla rotazione descritta da R^T, dove R è la matrice individuata al quesito precedente [4pt]

2. Si consideri un robot di tipo SCORBOT con i seguenti parametri: $d_1 = 30$, $\ell_1 = 5$, $\ell_2 = 20$, $\ell_3 = 20$ e $d_5 = 10$ cm.

   a) Calcolare le 5 variabili di giunto che permettono di posizionare l'estremità della pinza nel punto $\vec{p}_e = (-20; 30; 20)$ con un orientamento della stessa specificato dagli angoli $\beta_d = 40^o$ e $\omega_d = 10^o$ [8pt]

   b) Discutere se è possibile far raggiungere allo SCORBOT il punto $\vec{p}_e$ indicato nel quesito precedente, con un orientamento della pinza tale che $z_5 = [0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}]$ [4pt]

3. Un veicolo di tipo uniciclo si trova al tempo 0 (con velocità nulla) nell'origine del sistema di riferimento, orientato nel verso positivo dell'asse x. Si assuma che l'uniciclo debba raggiungere il punto $(10; 0)$ e che adotti a tal fine la legge di controllo proporzionale nelle velocità (senza saturazioni). Scrivere l'espressione generale di tale legge e, prendendo pari a 1 tutte le costanti che in essa compaiono, calcolare: 1) il valore di v_1 e v_2 al tempo 0; 2) la posa che l'uniciclo ha raggiunto sotto l'azione di questa legge di controllo dopo 1 secondo. Quanto tempo impiega l'uniciclo a raggiungere il punto desiderato? [3+2+1+2pt]

1a) Il punto P giace sull'asse di rotazione che pertanto risulta individuato dal versore $\vec{r} = (1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$. La matrice di rotazione corrispondente a un asse $\vec{r}$ e un angolo θ è data da (si veda la (15) pag. 10 del capitolo sui richiami di geometria e proprietà preliminari):

$$R_{\vec{r}}(\theta) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c\theta)+c\theta & r_x r_y(1-c\theta)-r_z s\theta & r_x r_z(1-c\theta)+r_y s\theta \\ r_x r_y(1-c\theta)+r_z s\theta & r_y^2(1-c\theta)+c\theta & r_y r_z(1-c\theta)-r_x s\theta \\ r_z r_x(1-c\theta)-r_y s\theta & r_z r_y(1-c\theta)+r_x s\theta & r_z^2(1-c\theta)+c\theta \end{bmatrix}$$

L'elemento $r_{22} = r_y^2(1-c\theta)+c\theta$. Sostituendo $r_y = -1/\sqrt{3}$, si ha:

$$\frac{1}{3}(1-c\theta) + c\theta = \frac{2}{3} \quad (\text{essendo } r_{22} = 2/3)$$

da cui $c\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 60°$. Essendo $r_{23} = r_y r_z(1-c\theta) - r_x s\theta$

si ha $r_{23} = -\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} s\theta > 0 \rightarrow -\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} s\theta > 0 \Rightarrow s\theta < 0 \rightarrow \boxed{\theta = -60°}$

Pertanto
$$R = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

1b) Siccome $R^T = R^{-1}$ corrisponde a una rotazione di $-\theta$ sempre rispetto a $\vec{r}$, l'asse di rotazione associato a R^T è ancora $\vec{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2a) Dalle formule della cinematica inversa dello SCORBOT:

$\theta_1 = \text{atan2}(y_d, x_d) = \underline{123.7°}$

$$\theta_3 = \pm \arccos\left(\frac{A_1^2 + A_2^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}\right) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} A_1 &= x_d C_1 + y_d S_1 - d_5 \cos\beta_d - \ell_1 = 23.4 \\ A_2 &= d_1 - z_d - d_5 \sin\beta_d = 3.57 \end{aligned}$$

$= \pm \arccos(-0.3) = \pm 107.5°$ (la soluzione esiste perché $|-0.3| < 1$)

Scelgo $\underline{\theta_3 = +107.5^\circ}$

$\theta_2 = \text{atan2}\big((\ell_2+\ell_3 C_3)A_2 - \ell_3 S_3 A_1, (\ell_2+\ell_3 C_3)A_1 + \ell_3 S_3 A_2\big) =$

$= \text{atan2}(-396.3, 395.7) = \underline{\underline{-45^\circ}}$

$\theta_4 = \beta_d - \vartheta_2 - \vartheta_3 - 90^\circ = \underline{\underline{-112.4^\circ}}$

$\theta_5 = \omega_d = \underline{\underline{10^\circ}}$

2b) Non è possibile. Infatti $\vec{z}_5$, così come risulta dalla matrice R_0^5, è dato da: $\vec{z}_5 = \begin{bmatrix} -C_1 S_{234} \\ -S_1 S_{234} \\ -C_{234} \end{bmatrix}$. Con $\theta_1 = 123.7^\circ$, si ha: $\vec{z}_5 = \begin{bmatrix} +0.55\, S_{234} \\ -0.83\, S_{234} \\ -C_{234} \end{bmatrix}$.

Per avere $\vec{z}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dovrebbe essere $S_{234} = 0$ e $S_{234} = \dfrac{1/\sqrt{2}}{-0.83}$ contemporaneamente.

Il fatto che alcuni $\vec{z}_5$ non si possano ottenere, dipende dal numero di gradi di libertà (5) dello SCORBOT inferiore al numero minimo necessario (6) per risolvere completamente il problema di posizionamento e orientamento della pinza del robot.

3) Legge proporzionale nelle velocità:
$$\begin{cases} v_1 = K_{v_1}\left[(x_d - x)\cos\theta + (y_d - y)\sin\theta\right] \\ v_2 = K_{v_2}\,(\theta_d - \theta) \\ \theta_d = \text{atan2}(y_d - y, x_d - x) \end{cases}$$

Con $K_{v_1} = K_{v_2} = 1$, $x_d = 10$, $y_d = 0$, $x = y = 0$ e $\theta = 0$, si ha:

$$\boxed{v_1 = 10, \quad v_2 = \emptyset.}$$

L'uniciclo è già orientato verso l'obiettivo, pertanto $\theta(t) = 0\ \forall t$ e $v_2(t) = 0\ \forall t$.
Si ha allora
$$v_1(t) = 10 - x(t)$$
e l'equazione da risolvere è:
$$\dot{x} = v_1\cos\theta = 10 - x$$

Definendo $\delta = 10 - x$, si ha $\dot{\delta} = -\dot{x} = x - 10 = -\delta \Rightarrow \boxed{\dot{\delta} = -\delta}$
che ha come soluzione $\delta(t) = \delta(0)\,e^{-t} = 10\,e^{-t}$.

Pertanto $x(t) = 10 - \delta(t) = 10(1 - e^{-t})$.

Al tempo $t = 1$, $x(1) = 10(1 - e^{-1}) = \underline{6.32}$ (mentre $y(1) = 0$, $\theta(1) = 0$).

Per arrivare a $x = 10$ occorre un tempo $\underline{\text{infinito}}$.