

COGNOME:

NOME:

Compto A

CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

- Calcolare la matrice corrispondente alla seguente sequenza di rotazioni/traslazioni di SR rispetto a SR' : 1) Rotazione di 90° rispetto all'asse $\vec{r} = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]^T$; 2) Traslazione di -20 lungo e'_x ; 3) Rotazione di -45° rispetto a e_z . [8pt]
Successivamente calcolare le coordinate q rispetto a SR di un punto che ha coordinate $q' = [1, -1, 2]^T$ rispetto a SR' . [4pt]
- Si consideri un robot SCARA con i seguenti parametri: $h_0 = 60\text{cm}$, $l_1 = 25\text{cm}$ e $l_2 = 20\text{cm}$.
 - Calcolare le coordinate (x, y, z) del punto terminale della pinza e il suo orientamento ϕ se $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = -20^\circ$, $d_3 = -30\text{cm}$ e $\theta_4 = 15^\circ$. [5pt]
 - Si vuole inseguire un punto che si muove sul piano $z = 0$ lungo la retta $x = 30\text{cm}$, con $y(t) = -10 + 0.1t\text{cm}$. Scrivere l'espressione delle variabili di giunto $\theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 4$) e $d_3(t)$ che permettono tale inseguimento con il piano di apertura della pinza ortogonale all'asse y , calcolandone il valore al tempo $t = 10$ e individuando fino a quale tempo t_{max} l'inseguimento è possibile. [6+1+3pt]
- Enunciare brevemente la legge di controllo proporzionale nelle velocità di un unicycle e dimostrare che la funzione $V = \frac{1}{2}e_p^2$ (dove e_p è l'errore di posizionamento) calcolata lungo la traiettoria dell'unicycle è non crescente. [2+2pt]

Es. 1 $T_1 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $R_1 = \begin{bmatrix} r_x^2(1-\cos\theta) & r_x r_y(1-\cos\theta) - r_z \sin\theta & r_x r_z(1-\cos\theta) + r_y \sin\theta \\ r_x r_y(1-\cos\theta) + r_z \sin\theta & r_y^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & r_y r_z(1-\cos\theta) - r_x \sin\theta \\ r_x r_z(1-\cos\theta) - r_y \sin\theta & r_y r_z(1-\cos\theta) + r_x \sin\theta & r_z^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$

In questo caso $R_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$ (essendo $\theta = 90^\circ$ e $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$)

$T_2 = \begin{bmatrix} I & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $T_3 = \begin{bmatrix} R_2(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ essendo $\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$ e $\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$

$T_{tot} = T_2 T_1 T_3 = \begin{bmatrix} 0.8536 & -0.1464 & 0.5 & -20 \\ 0.5 & 0.5 & -0.7071 & 0 \\ -0.1464 & 0.8536 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

One, $T_{tot} : \tilde{q}' = T_{tot} \tilde{q} \Rightarrow \tilde{q} = T_{tot}^{-1} \tilde{q}' = \begin{bmatrix} R_{tot}^T & -R_{tot}^T [-20] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.1317 \\ -1.8683 \\ 12.2071 \\ 1 \end{bmatrix}$

essendo R_{tot} il blocco 3×3 di T_{tot} .

Quindi $q = \begin{bmatrix} 17.1317 \\ -1.8683 \\ 12.2071 \end{bmatrix}$ (si è usate le notazioni $\tilde{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$)

Es. 2 a) $x = l_1 c_1 + l_2 c_2 = 25 \cos(90^\circ) + 20 \cos(70^\circ) = 6.84\text{cm}$
 $y = l_1 s_1 + l_2 s_2 = 25 \sin(90^\circ) + 20 \sin(70^\circ) = 43.79\text{cm}$
 $z = h_0 + d_3 = 60 - 30 = 30\text{cm}$
 $Q = \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 = 90^\circ - 20^\circ + 15^\circ = 85^\circ$

b) $z_d = 0$, $x_d = 30\text{cm}$, $y_d(t) = -10 + 0.1t\text{cm}$

$d_3(t) = d_3 = z_d - h_0 = -h_0 = -60\text{cm} \quad \forall t$

$\theta_2(t) = \pm a \cos\left(\frac{x_d^2 + y_d^2(t) - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) = a \cos\left(\frac{0.01t^2 - 2t - 25}{1000}\right)$ avendo scelto il $\oplus$

Ponendo: $S_2(t) = \sin[\theta_2(t)]$, $C_2(t) = \cos[\theta_2(t)]$,

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \arctan 2 \left(-\ell_2 S_2(t) x_d + (\ell_1 + \ell_2 C_2(t)) y_d(t), (\ell_1 + \ell_2 C_2(t)) x_d + \ell_2 S_2(t) y_d(t) \right) \\ &= \arctan 2 \left(-600 \sin(\theta_2(t)) + (25+20 \cos(\theta_2(t))) (0.1t-10), (25+20 \cos(\theta_2(t))) \cdot 30 + \right. \\ &\quad \left. + 20 \sin(\theta_2(t)) (0.1t-10) \right)\end{aligned}$$

$$\theta_4(t) = \varphi_d - \theta_1(t) - \theta_2(t) = 90^\circ - \theta_1(t) - \theta_2(t)$$

In fatti $\varphi_d = 90^\circ$ essendo l'asse x_4 diretto come y_0 e quindi a 90° rispetto a x_0 .

A $t=10$: $y_d(10) = -10 + 0.1 \cdot 10 = -9$

si trova: $\theta_1(10) = -56.36^\circ$, $\theta_2(10) = 92.52^\circ$, $d_3 = -60$ cm, $\theta_4 = 53.3152^\circ$

In fatti $\theta_2(10) = \arccos \left(\frac{600 \cdot 10 - 20 \cdot 25}{1000} \right) = \arccos(-0.044) = 92.52^\circ$

e sostituendo in $\theta_1(t)$ e $\theta_4(t)$ si ricavano $\theta_1(10)$ e $\theta_4(10)$.

Lo spazio di lavoro dello SCARA per punti giurda x e y è la corona circolare compresa tra i cerchi di raggio $\ell_1 - \ell_2 = 5$ e $\ell_1 + \ell_2 = 45$ cm.

L'inseguimento è possibile finché $\sqrt{x_d^2 + y_d^2} \leq 45 \Leftrightarrow x_d^2 + y_d^2 \leq 45^2 = 2025$
cioè se e solo se $y_d^2 \leq 2025 - x_d^2 = 2025 - 30^2 = 1125 \Leftrightarrow y_d \leq \sqrt{1125} = 33.54$.

Quindi i tempi ammissibili non tutti quelli per cui $y_d(t) \leq 33.54$, cioè

$$-10 + 0.1t \leq 33.54, \text{ ovvero } t \leq \frac{43.54}{0.1} = \boxed{435.4 = t_{\max}}$$

Es. 3
$$\begin{cases} v_1 = K_{v1} [(x_d - x) \cos \theta + (y_d - y) \sin \theta] \\ v_2 = K_{v2} (\theta_d - \theta) \\ \theta_d = \arctan 2 (y_d - y, x_d - x) \end{cases}$$

velocità longitudinali assegnate

" rotazionali "

~~beams~~ ~~del~~ ~~l'obiettivo~~

dove (x_d, y_d) = posizione desiderata univoco e (x, y, θ) = coordinate univoco.

$$V = \frac{1}{2} v_p^2 = \frac{1}{2} [(x_d - x)^2 + (y_d - y)^2] = \frac{1}{2} [(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = (x - x_d) v_1 \cos \theta + (y - y_d) v_1 \sin \theta =$$

$$(x - x_d) \cos \theta + (y - y_d) \sin \theta v_1 = \cancel{K_{v1}} - K_{v1} [(x - x_d) \cos \theta + (y - y_d) \sin \theta]^2 \leq 0.$$

Poiché $\dot{V} \leq 0$, V non cresce lungo la traiettoria.