

COGNOME:

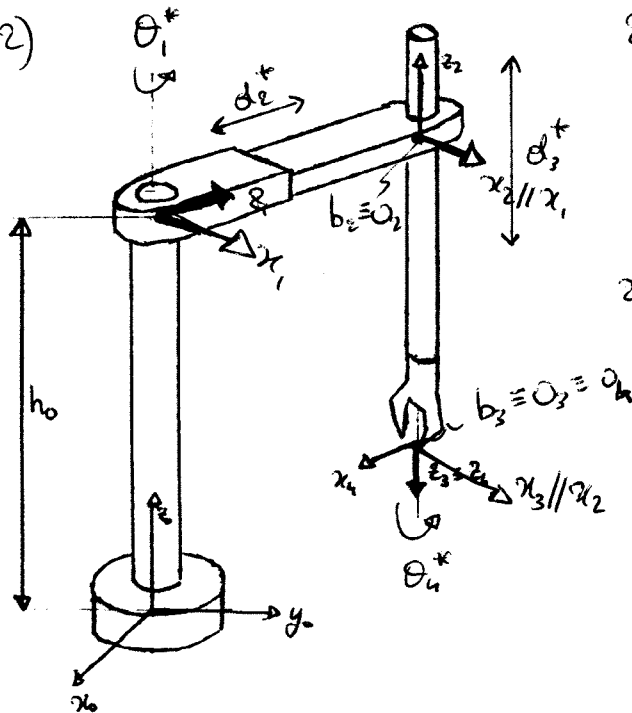
NOME:

CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. a) La parametrizzazione RPY di una matrice di rotazione R è data da $(\phi, \theta, \psi) = (90^\circ, 180^\circ, -90^\circ)$, essendo ϕ, θ e ψ gli angoli di Roll, Pitch e Yaw. Ricavare R e, successivamente, l'asse di rotazione $\vec{r}$ e l'angolo α tali che $R = R_{\vec{r}}(\alpha)$ [6+5pt]
- b) Si consideri ora un'altra matrice di rotazione R_2 con stessi angoli di Roll e Pitch di R ma con angolo ψ_2 di Yaw non noto. Si sa però che $R_2(3,2) > 0$ e che l'angolo α_2 associato alla rotazione descritta da R_2 è pari a 158.91° . Ricavare ψ_2 [4pt]
2. Si consideri il manipolatore a 4 gradi di libertà (due giunti rotazionali e due prismatici) riportato in figura:
 - a) Completare la scelta dei sistemi di riferimento indicando la collocazione degli assi x_1, z_1, x_2 e x_3 (assumere $O_3 \equiv O_4$) e discutere per ciascuno di questi assi se la scelta effettuata è unica oppure no [5+1pt]
 - b) Scrivere la seconda riga della tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg e la matrice T_1^2 ad essa corrispondente, spiegando anche molto brevemente il significato geometrico dei suddetti parametri [2+1+1pt]
 - c) Basandosi esclusivamente su considerazioni geometriche (cioè senza calcolare T_0^4), ricavare gli elementi (1,4), (3,4) e (3,3) della matrice T_0^4 [2+2+2pt]

Es. 2)



2a) Gli assi x_1, z_1 e x_2 sono definiti a meno del verso, che è arbitrario. L'asse x_3 può essere scelto in infiniti modi nel piano ortogonale a z_1 , passante per O_3 .

2b)

θ	d	a	α
$2 \phi $	d_2^*	0	90°

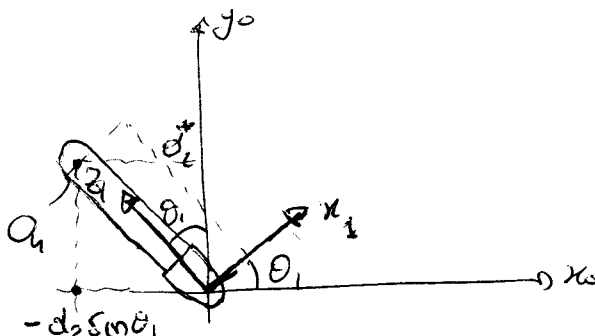
N.B. $d_2^* > 0$, $d_2^* \in (d_{2m}, d_{2M})$ θ_2 = angolo tra x_1 e x_2 visto da z_1 d_2 = " " z_1 e z_2 " " x_2 a_2 = distanza di O_2 da b_2 d_2 = coordinate di b_2 lungo z_1 dove b_2 = punto d'intersezione tra x_2 e z_1

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 c\theta_2 & a_2 s\theta_2 & d_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2c) $T_0^4(3,3)$ = Componente di z_2 lungo z_0 = -1 (z_2 punta verso il basso) $T_0^4(1,4)$ = coordinate lungo x_0 di O_4 = $-d_2^* \sin(\theta_1)$, come si vede nella $T_0^4(3,4)$ = " " z_0 di O_4 = $h_0 + d_2^*$ (N.B.: $d_2^* < 0$) figura sotto

Robot visto dall'alto:



Il segno - in $T_0^4(1,4)$ perché, per $\theta_1 \in (0, 180^\circ)$, il $\sin(\theta_1) > 0$ mentre O_4 ha una componente negativa lungo x_0 .

Es. 1a)

$$R = R_{RPY}(\vartheta_0, \vartheta_0, -\varphi_0) = \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta & c\varphi s\vartheta s\varphi - s\varphi c\varphi & c\varphi s\vartheta c\varphi + s\varphi s\varphi \\ s\varphi c\vartheta & s\varphi s\vartheta s\varphi + c\varphi c\varphi & s\varphi s\vartheta c\varphi - c\varphi s\varphi \\ -s\vartheta & c\vartheta s\varphi & c\vartheta c\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R_F(\alpha) \quad \text{con} \quad \alpha = \pm \vartheta \cos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \pm \vartheta \cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm 120^\circ.$$

Scepiendo la soluzione positiva, $\boxed{\alpha = 120^\circ}$ e $\vec{r} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ -0.58 \\ -0.58 \end{bmatrix}$

1b) $\varphi_2 = \varphi = 90^\circ$, $\vartheta_2 = \vartheta = 180^\circ$, ψ_2 non noto. Si ha quindi, sfruttando la stessa formula del quesito precedente:

$$R_2 = R_{RPY}(\vartheta_0, 180^\circ, \psi_2) = \begin{bmatrix} 0 & -c\psi_2 & s\psi_2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -s\psi_2 & -c\psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ora, } \alpha_2 = \pm \vartheta \cos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \pm \vartheta \cos\left(\frac{-c\psi_2 - 1}{2}\right)$$

Pertanto.

$$\cos \alpha_2 = -\frac{1 + \cos \psi_2}{2}$$

$$\text{da cui } \cos \psi_2 = -1 - 2 \cos \alpha_2 = 0.87$$

$$\text{e } \psi_2 = \pm \vartheta \cos(0.87) = \pm 30^\circ$$

$$\text{Tuttavia, } R_2(3,2) > 0 \Rightarrow -s\psi_2 > 0 \Rightarrow s\psi_2 < 0 \Rightarrow \boxed{\psi_2 = -30^\circ}$$