

Teoria dei giochi e delle decisioni

Equilibri di Nash, ottimi secondo Pareto e strategie dominanti: Secondo compito di verifica

Nota In questi esercizi per equilibri di Nash si intende equilibri di Nash PURI. Gli esercizi contrassegnati da * sono più difficili.

Esercizio 1 Svolgere l'esercizio "Choosing a route" da "An introduction to Game Theory" di Martin J. Osborne (esercizio 33.1, pag 33, del testo in download oppure esercizio 34.3, pag 34, del testo "tradizionale").

Esercizio 2: Contribuire ad un bene pubblico. Abbiamo n persone che possono decidere se contribuire alla costruzione di un bene comune, ad esempio un parco o una piscina. Il contributo è fisso e deciso a priori, la singola persona può quindi decidere solo se contribuire o non contribuire. Il bene in questione verrà costruito se e solo se almeno k persone contribuiscono, dove $2 \leq k \leq n$; se non viene costruito i contributi non vengono restituiti. Ogni persona ha il seguente ordine di preferenze, dal migliore al peggiore: (i) una qualsiasi configurazione in cui il bene viene costruito senza che lei contribuisca, (ii) una qualsiasi configurazione in cui il bene viene costruito e lei contribuisce, (iii) una qualsiasi configurazione in cui il bene non viene costruito e lei non contribuisce, (iv) una qualsiasi configurazione in cui il bene non viene costruito e lei contribuisce.

Si formuli quanto descritto come un gioco, si determinino gli equilibri di Nash di tale gioco e si determini se essi sono ottimi deboli secondo Pareto. Per ciascun giocatore, si determinino poi: le strategie debolmente dominanti e strettamente dominanti; le strategie conservative (o min max).

Esercizio 3 Data la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione

		Giocatore 2		
		<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
Giocatore 1	<i>T</i>	2, 2	1, 3	0, 1
	<i>M</i>	3, 1	0, 0	0, 0
	<i>B</i>	1, 0	0, 0	0, 0

- Determinare gli equilibri di Nash del gioco.
- Determinare le strategie debolmente dominanti e le strategie strettamente dominanti di ciascun giocatore.
- Determinare i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto.
- Si determini se qualcuno degli equilibri di Nash trovato al punto (a) è ottimo secondo Pareto.
- Determinare le strategie conservative di ciascun giocatore.

Esercizio 4: Equilibrio di Nash per giochi con infinite strategie. Determinare gli equilibri di Nash di un gioco con due giocatori in forma di massimizzazione nel quale l'insieme delle strategie di ogni giocatore è costituito dall'insieme dei numeri non negativi (cioè $X_1 = \{x_1 : x_1 \geq 0\}$ e $X_2 = \{x_2 : x_2 \geq 0\}$) e le funzioni di payoff sono $c_1(x_1, x_2) = x_1(x_2 - x_1)$ e $c_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1 - x_2)$.

***Esercizio 5: Un progetto comune.** Due persone sono impegnate in un progetto comune. Se ogni persona i spende una quantità di risorse x_i , dove $0 \leq x_i \leq 1$, che gli costa $k(x_i)$, il progetto avrà un ricavo pari a $f(x_1, x_2)$. Il ricavo del progetto è ugualmente diviso tra le due persone, senza considerare le risorse investite da ciascuno. Il payoff di ogni singolo giocatore è quindi $c_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2}f(x_1, x_2) - k(x_i)$. Si formuli tale problema come un gioco e si determinino gli equilibri di Nash di tale gioco nel caso in cui:

- $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2$ e $k(x_i) = x_i^2$ per $i = 1, 2$

(b) $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$ e $k(x_i) = x_i$ per $i = 1, 2$

Si determini, per entrambi i casi, se i punti di equilibrio trovati sono ottimi deboli secondo Pareto (*suggerimento*: provate a risolvere il problema di ottimizzazione (singolo decisore) in cui si vogliono determinare x_1 e x_2 in modo da massimizzare la *somma* dei payoff dei giocatori).

Definizione Dato un gioco Γ in forma di massimizzazione, una strategia $x_i \in X_i$ del giocatore i si dice *dominata* da un'altra strategia $x_j \in X_i$ se $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ vale:

$$c_i(x_i, x_{-i}) < c_i(x_j, x_{-i})$$

Si dice *debolmente dominata* se $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ vale:

$$c_i(x_i, x_{-i}) \leq c_i(x_j, x_{-i})$$

Esercizio 6 Data la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione

		Giocatore 2		
		<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
Giocatore 1	<i>T</i>	0,0	1,0	1,1
	<i>M</i>	1,1	1,1	3,0
	<i>B</i>	1,1	2,1	2,2

- (a) Si determini per ogni giocatore se ogni strategia è debolmente dominata o strettamente dominata.
- (b) Determinare gli equilibri di Nash del gioco.
- (c) Determinare i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto.
- (d) Si determini se qualcuno degli equilibri di Nash trovato al punto (b) è ottimo secondo Pareto.
- (e) Determinare le strategie conservative di ciascun giocatore.