Teoria dei giochi e delle decisioni.
Quarto compito di verifica: estensione in strategia mista di giochi antagonistici

1. Considera il seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un intero tra 1 e 100. Se il numero x che hai scelto è minore di quello y del tuo avversario, allora tu vinci un euro, a meno che $x = y - 1$, nel qual caso il tuo avversario vince un euro. Se il numero x che hai scelto è maggiore di quello y del tuo avversario, allora lui vince un euro, a meno che $y = x - 1$, nel qual caso tu vinci un euro. Se $x = y$ c'è un pareggio.

Formula il problema di programmazione lineare che consente di calcolare il valore del gioco (non è richiesto di risovere tale programma). Dire quindi quali tra le seguenti strategie è conservativa per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$
- $\xi_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1, \ldots, 50$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 100$
- $\xi_1^{98} = \xi_1^{99} = \xi_1^{100} = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1, \ldots, 97$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^i, \ldots, \xi_1^{100})$ il vetore stocastico associato alle 100 possibili strategie pure del primo giocatore).

2. Nella descrizione del gioco della morra abbiamo assunto, implicitamente, che i giocatori comunichino la loro congettura ("guess") sul numero nascosto dall'avversario simultaneamente. Considera quindi la variazione del gioco in cui uno dei due giocatori, sia A, accetti di comunicare sempre per primo la propria congettura: questo darà al giocatore B la possibilità di decidere la sua congettura dopo aver ascoltato la congettura di A.

A questo punto è lecito chiedersi se il gioco è ancora a valore zero, oppure se esso si è sbilanciato. Per rispondere a questa domanda, Formula il problema di programmazione lineare che consente di calcolare il valore del nuovo gioco. Non è richiesto di risolvere il programma (Suggerimento. Le strategie pure per A non cambiano. Per quanto riguarda B, egli può sempre decidere di ignorare la comunicazione di A, e quindi utilizzare le solite 4 strategie, oppure ....)

3. Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff:

$$\begin{matrix} 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4 \end{matrix}$$

Quali tra le seguenti coppie di strategie sono conservative, rispettivamente per il primo e il secondo giocatore?

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4; \; y^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1, \ldots, 8$
- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4; \; y^{2i} = \frac{1}{4}, \forall i = 1, \ldots, 4;$
- $x^1 = \frac{28}{99}; x^2 = \frac{30}{99}; x^3 = \frac{21}{99}; x^4 = \frac{20}{99}; \; y^1 = 0; y^2 = \frac{56}{99}; y^3 = \frac{40}{99}; y^4 = 0; y^5 = 0; y^6 = \frac{2}{99}; y^7 = 0; y^8 = \frac{1}{99};$

4. Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff:

Giocatore 2

Giocatore 1

	a	b
a	a	-a
b	-b	b

dove *a* e *b* sono due numeri reali positivi. (Si noti che questo gioco è una generalizzazione del gioco Matching Pennies). Si determinino gli equilibri di Nash dell'estensione in strategia mista del gioco.