1 Esercizi

1. Si consideri un gioco di Nash a due giocatori, in cui ogni giocatore controlla un'unica variabile, e indichiamo con x e y rispettivamente le variabili controllate dal primo e dal secondo giocatore.

   Il payoff del primo giocatore è $C_1(x, y) = (x - y)^2$ e l'insieme delle strategie è $X_1 = \{x : 1 \leq x \leq 4\}$.

   Il payoff del secondo giocatore è $C_2(x, y) = x(y - \frac{1}{2})^2$ e l'insieme delle strategie è $X_2 = \{y : -2 \leq y \leq 4\}$.

   E' possibile concludere a priori l'esistenza di un equilibrio di Nash? Determinare tutti gli equilibri di Nash.

2. Sia dato un gioco a due giocatori in cui entrambi i giocatori controllano due variabili.

   Il payoff del primo giocatore è $C_1(x, y) = x_1^1 - x_1^2 x_2^1$ e l'insieme delle strategie è $X_1 = \{(x_1^1, x_2^1) : x_1^1 + x_2^1 \leq 1; x_1^1, x_2^1 \geq 0\}$.

   Il payoff del secondo giocatore è $C_2(x, y) = x_2^1(x_1^2 - 1)^2 + x_1^1 x_2^2$ e l'insieme delle strategie è $X_2 = \{(x_1^2, x_2^2) : -x_1^2 + x_2^2 = 1; x_1^2 \geq 0\}$.

   I due sottoproblemi sono:

$$
\begin{array}{ll}
\min_{x_1^1, x_2^1} x_1^1 - x_1^2 x_2^1 & \min_{x_1^2, x_2^2} x_2^1(x_1^2 - 1)^2 + x_1^1 x_2^2 \\
x_1^1 + x_2^1 \leq 1 & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\
x_1^1, x_2^1 \geq 0 & x_1^2 \geq 0.
\end{array}
$$

   E' possibile concludere a priori l'esistenza di un equilibrio di Nash? Verificare se il punto $x^1 = (0, 1)$,$x^2 = (1, 0)$ è un equilibrio di Nash.

2 Soluzioni

1. Il gioco ammette sicuramente un equilibrio di Nash perchè :

   (i) la funzione $C_1(\cdot, y)$ del primo giocatore è continuamente differenziabile e convessa per qualunque valore di y

   (ii) la funzione $C_2(x, \cdot)$ del secondo giocatore è continuamente differenziabile e convessa per $x \in [1, 4]$

   (iii) Entrambi i giocatori hanno insieme ammissibile convesso e compatto (sono intervalli chiusi con estremi finiti).

Per determinare quali sono gli equilibri di Nash del problema consideriamo le funzioni best response dei due giocatori:

$$B_1(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [1,4] \\ 1 & \text{se } y \in [-2,1] \end{cases} \qquad B_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x > 0 \\ y \in [-2,4] & \text{se } x = 0 \\ 4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione best response del primo giocatore deriva dall'osservazione che la funzione $C_1(\cdot, y)$ è sempre nonnegativa, e quindi si ha un minimo di sicuro nel punto in cui si annulla. Se quel punto non è ammissibile, il che avviene se $-2 \leq y \leq 1$, la funzione $C_1(\cdot, y)$ è nell'intervallo $1 \leq x \leq 4$ una funzione crescente di x, e quindi il minimo si avrà nell'estremo inferiore di tale intervallo.

Per il secondo giocatore, la funzione $C_2(x, \cdot)$ è strettamente convessa per $x > 0$, costante e pari a 0 per $x = 0$, e strettamente concava per $x < 0$ (quindi il minimo è su un estremo dell'intervallo).

Osservando gli insiemi di soluzioni si vede che l'unico equilibrio di Nash è il punto $(1, \frac{1}{2})$, in quanto $1 \in B_1(\frac{1}{2})$ e $\frac{1}{2} \in B_2(1)$.

2. In questo caso l'insieme ammissibile del secondo giocatore è convesso ma non è compatto. Non si può quindi concludere a priori che esiste un equilibrio di Nash.

   Consideriamo il punto $\bar{x}^1 = (0,1)$, $\bar{x}^2 = (1,0)$. Per calcolare la best response del primo giocatore alla strategia $x^2 = (1,0)$ del secondo giocatore è necessario risolvere il problema lineare:

$$\begin{array}{l} \min_{x_1^1, x_2^1} x_1^1 - x_2^1 \\ x_1^1 + x_2^1 \leq 1 \\ x_1^1, x_2^1 \geq 0 \end{array}$$

   che ammette soluzione ottima $x^1 = (0,1)$, come si può vedere tramite risoluzione grafica o scrivendo le condizioni di ottimo, quindi $\bar{x}^1 \in B_1(\bar{x}^2)$.

   Il sottoproblema del secondo giocatore diventa invece per $x^1 = (0,1)$

$$\begin{array}{l} \min_{x_1^2, x_2^2} (x_1^2 - 1)^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 \geq 0. \end{array}$$

la cui soluzione ottima è $x_1^2 = 1$, $x_1^2 = 0$ in quanto in questo punto la funzione obiettivo che è sempre nonnegativa si annulla. Ma allora $\bar{x}^2 \in B_2(\bar{x}^1)$, e quindi è un equilibrio di Nash.