Teoria dei giochi e delle decisioni
Giochi cooperativi e valore di Shapley: Settimo compito di verifica

Esercizio 1 Si considerino 5 partiti politici ognuno dei quali possiede la percentuale di seggi w_i:

$$\begin{array}{ll} A & w_A = 0.15 \\ B & w_B = 0.1 \\ C & w_C = 0.3 \\ D & w_D = 0.25 \\ E & w_E = 0.2 \end{array}$$

Il sistema di votazione prevede il vincolo di coalizione (ovvero i parlamentari di ogni coalizione votano allo stesso modo) e l'approvazione di una legge richiede la maggioranza semplice del numero di parlamentari (seggi), ossia $N = \{A, B, C, D, E\}$ e $\forall T \subseteq N$ $v(T) = 1$ se e solo se $\sum_{i \in T} w_i > 0.5$; altrimenti $v(T) = 0$. Determinare il valore di Shapley di ciascun partito.

Esercizio 2 Per ciascuno dei seguenti giochi cooperativi con n giocatori si dica se la funzione v è superadditiva e in caso di risposta affermativa si determini il valore di Shapley di ogni singolo giocatore. Sia $T \subseteq N$ una qualunque coalizione:
(i) $v(T) = 1$ se $|T| \geq n-2$; $v(T) = 0$ altrimenti.
(ii) $v(T) = 1$ se $|T|$ è pari; $v(T) = 0$ altrimenti.
(iii) Siano $i \in N$ e $j \in N$ due giocatori fissati, $i \neq j$. $v(T) = 1$ se $i \in T$, oppure $j \in T$, oppure $i, j \in T$; $v(T) = 0$ altrimenti.
(iv) Supponiamo ora che l'insieme dei giocatori sia diviso in m donne e $n-m$ uomini e che $v(T) = 1$ se il numero di donne presenti nella coalizione T è strettamente maggione di $\frac{m}{2}$; $v(T) = 0$ altrimenti.

Esercizio 3 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (3, 2)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (1, 4)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = w_A^1 + 3w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 2w_B^1 + w_B^2$). Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene e determinare un'imputazione nel nucleo di tale gioco.