Teoria dei giochi e delle decisioni
Equilibri di Nash: Soluzione del primo compito di verifica

Nota In questi esercizi per equilibri di Nash si intende equilibri di Nash PURI

Esercizio 1: Il pesce ermafrodita. Possiamo modellare la situazione descritta nell'esercizio come un gioco dove ci sono due giocatori $Pesce1$ e $Pesce2$. Ogni giocatore ha il suo insieme delle strategie $X_1 = \{Insistere, Offrirsi\}$ e $X_2 = \{Insistere, Offrirsi\}$. Il gioco è simmetrico, ed è quindi sufficiente determinare i payoff per un unico giocatore.
$C_1(Insistere, Insistere) = S$
$C_1(Insistere, Offrirsi) = H$
$C_1(Offrirsi, Insistere) = L$
$C_1(Offrirsi, Offrirsi) = \frac{1}{2}(H+L)$
Possiamo quindi scrivere la consueta tabella

Pesce 2

Pesce 1		$Insistere$	$Offrirsi$
	$Insistere$	S,S	H,L
	$Offrirsi$	L,H	$\frac{1}{2}(H+L), \frac{1}{2}(H+L)$

Dobbiamo ora determinare l'intervallo dei valori di S per il quale il gioco ammette un equilibrio di Nash. Ricordiamo che $H > L$, quindi $L < \frac{1}{2}(H+L) < H$. Il punto ammissibile $(Offrirsi, Offrirsi)$ non è quindi un equilibrio di Nash, perché se il Pesce 1 insistesse nello svolgere il suo ruolo preferito, fermo restando che il Pesce 2 continui ad offrirsi, otterrebbe un payoff pari ad $H > \frac{1}{2}(H+L)$.
Analizziamo ora il punto ammissibile $(Insistere, Offrirsi)$; innanzitutto osserviamo che indipendentemente dai valori assunti da S, per il Pesce 1 non è convieniente spostarsi dal punto $(Insistere, Offrirsi)$. Per quanto riguarda il Pesce 2 invece, se $S > L$ allora risulterà conveniente cambiare strategia. Possiamo quindi concludere che se $S < L$ i punti $(Insistere, Offrirsi)$ e $(Offrirsi, Insistere)$ sono equilibri di Nash.
Analizziamo ora il punto ammissibile $(Insistere, Insistere)$. Nessuno dei due pesci ha interesse a cambiare la propria decisione, perché diminuerebbe il proprio payoff, se e solo se $S > L$. Possiamo quindi concludere che se $S > L$ allora il punto $(Insistere, Insistere)$ è l'unico equilibrio di Nash del gioco. Si noti che per $S = L$ il gioco ha tre equilibri di Nash, precisamente $(Insistere, Offrirsi)$, $(Offrirsi, Insistere)$ e $(Insistere, Insistere)$.

Esercizio 2: La caccia al cervo. La descrizione fornita nel testo dell'esercizio può essere così formalizzata. Abbiamo un gioco con n giocatori, ciascun giocatore è un cacciatore che ha due opzioni che indicheremo con *Cervo* e *Lepre*; l'i-esimo insieme delle strategie è quindi $X_i = \{Cervo, Lepre\}$, mentre lo spazio complessivo dei punti ammissibile è $X = X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$. Si noti che ogni X_i è uguale e consta di due soli elementi, i punti ammissibili sono quindi 2^n. In questo caso quindi non andremo a costruire la consueta tabella, ma come fatto nel caso del 'Pollution game', dopo aver stabilito un'opportuna funzione di payoff, cercheremo di enumerare in maniera 'intelligente' i punti ammissibili ed i payoff ad essi associati per ciascun giocatore.
Prima di tutto analizziamo le preferenze del singolo cacciatore. Prendiamo ad esempio il cacciatore 1; egli preferisce nell'ordine la configurazione nella quale tutti i cacciatori scelgono l'opzione *Cervo*, poi un qualsiasi punto ammissibile in cui sceglie l'opzione *Lepre* ed infine sono sfavorite rispetto alle precedenti tutte le strategie in cui lui sceglie l'opzione *Cervo* e uno o più degli altri giocatori sceglie l'opzione *Lepre*.

Associamo una funzione di payoff a tali preferenze
$C_1(Cervo, Cervo, \ldots, Cervo) = 2$
$C_1(Lepre, \ldots) = 1$
$C_1(Cervo, \ldots, Lepre, \ldots) = 0$
Procediamo ora con l'enumerazione dei possibili stati o punti ammissibili del gioco. Notiamo che il payoff di ogni singolo giocatore dipende dal numero di giocatori che lasciano la postazione per cacciare la lepre. Possiamo quindi partizionare X in $n+1$ insiemi, dove ogni insieme della partizione corrisponde ad un diverso valore di k, con k numero dei giocatori che scelgono l'opzione *Lepre*.

- Se $k = 0$ allora $C_i = 2\ \forall i = \{1, \ldots, n\}$.
- Se $k = n$ allora $C_i = 1\ \forall i = \{1, \ldots, n\}$.
- Se $0 < k < n$ allora $C_i = 0$ per gli $n - k$ giocatori che hanno scelto l'opzione *Cervo*, mentre $C_i = 1$ per i k giocatori che hanno scelto l'opzione *Lepre*.

Dobbiamo determinare se e quali sono i punti di equilibrio di Nash di questo gioco. Chiaramente ci avvaliamo della partizione dello spazio dei punti ammissibili appena effettuata:

- Se $k = 0$ allora abbiamo un equilibrio di Nash. Infatti se un qualsiasi giocatore decidesse di cambiare strategia avremmo $k = 1$. Ricadiamo quindi nel terzo caso, in cui il giocatore che ha cambiato strategia farebbe diminuire il proprio payoff da 2 a 1.
- Se $k = n$ allora abbiamo un equilibrio di Nash. Infatti se un qualsiasi giocatore decidesse di cambiare strategia avremmo $k = n - 1$. Ricadiamo quindi nel terzo caso, in cui il giocatore che ha cambiato strategia farebbe diminuire il proprio payoff da 1 a 0.
- Per $0 < k < n$ non abbiamo equilibri di Nash. Infatti, fissato $0 < k < n$ uno qualsiasi degli $n - k$ giocatori che hanno scelto l'opzione *Cervo* troverebbe conveniente cambiare strategia e scegliere l'opzione *Lepre*, così facendo infatti incrementerebbe il suo payoff da 0 a 1.

Possiamo quindi concludere che il gioco ha due equilibri di Nash, corrispondenti alle situazioni in cui tutti i cacciatori rimangono concentrati sul cervo o tutti i cacciatori lasciano la postazione per cacciare una lepre.

Esercizio 3: Il gioco dell'autobus.

a. La situazione descritta può essere formalizzata nel seguente gioco. Abbiamo due giocatori *Persona*1 e *Persona*2, con insieme di strategie $X_1 = \{Stare\ in\ piedi, Sedersi\}$ ed $X_2 = \{Stare\ in\ piedi, Sedersi\}$. Il primo giocatore ha il seguente ordine di preferenze: il punto ammissibile $(Sedersi, Stare\ in\ piedi)$ è preferito a tutti gli altri, $(Sedersi, Sedersi)$ è preferito a $(Stare\ in\ piedi, Sedersi)$ e $(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi)$. Gli ultimi due punti ammissibili sono indifferenti per il primo giocatore. Abbiamo quindi un preordine totale al quale sappiamo associare una funzione payoff opportuna. Un esempio di tale funzione di payoff è
$C_1(Sedersi, Stare\ in\ piedi) = 2$
$C_1(Sedersi, Sedersi) = 1$
$C_1(Stare\ in\ piedi, Sedersi) = 0$
$C_1(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi) = 0$
Visto che il gioco è simmetrico possiamo costruire una funzione di payoff analoga per il secondo giocatore. Abbiamo quindi tutti gli strumenti per costruire la consueta tabella

		Persona 2	
		Stare in piedi	*Sedersi*
Persona 1	*Stare in piedi*	$0,0$	$0,2$
	Sedersi	$2,0$	$1,1$

Dobbiamo ora determinare se il gioco ammette uno o più equilibri di Nash. Il punto ammissibile $(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi)$, non è un equilibrio di Nash perché ciascuno dei due giocatori, se l'altro rimane in piedi, aumenta il proprio payoff cambiando strategia, cioé sedendosi. Il punto ammissibile $(Stare\ in\ piedi, Sedersi)$ non è un equilibrio di Nash perché se il primo giocatore cambiasse la sua strategia, cioé se si sedesse, aumenterebbe il proprio payoff. Simmetricamente neanche il punto ammissibile $(Sedersi, Stare\ in\ piedi)$ è un equilibrio di Nash. Rimane da analizzare il punto $(Sedersi, Sedersi)$; in questo caso se il primo giocatore si alza, fermo restando che il secondo rimane seduto, diminuisce il proprio payoff, e la stessa cosa vale simmetricamente per il secondo giocatore. Quindi una deviazione unilaterale dall'ottimo non conviene a nessuno dei giocatori. Possiamo quindi concludere che il punto $(Sedersi, Sedersi)$ è l'unico equilibrio di Nash del gioco.

b. Il gioco ha gli stessi giocatori e le stesse possibili strategie del punto precedente. Cambiano invece le relazioni di preferenza tra i possibili punti ammissibili. Analizziamo quindi le preferenze del primo giocatore. La configurazione preferita a tutte le altre è quella $(Stare\ in\ piedi, Sedersi)$; escludendo tale punto la seconda configurazione preferita è $(Sedersi, Sedersi)$, la terza è invece $(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi)$, mentre la configurazione sfavorita rispetto a tutte le altre è $(Sedersi, Stare\ in\ piedi)$. Una possibile funzione di payoff che possiamo associare a tale preordine totale è quindi
$C_1\left(Stare\ in\ piedi, Sedersi\right) = 3$
$C_1\left(Sedersi, Sedersi\right) = 2$
$C_1\left(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi\right) = 1$
$C_1\left(Sedersi, Stare\ in\ piedi\right) = 0$
La tabella diventa quindi

		Persona 2	
		Stare in piedi	*Sedersi*
Persona 1	*Stare in piedi*	$1,1$	$3,0$
	Sedersi	$0,3$	$2,2$

Dobbiamo ora determinare se questo gioco ha uno o più equilibri di Nash. Il punto ammissibile $(Sedersi, Sedersi)$ non è un equilibrio di Nash, perché se il primo giocatore cambiasse la sua strategia, cioé se si alzasse in piedi, fermo restando che il secondo giocatore rimane seduto, aumenterebbe il proprio payoff (si noti che vale la stessa cosa per il secondo giocatore, ma per dimostrare che un punto non è un equilibrio di Nash ci basta mostrare che la condizione $c_i\left(a^*\right) \geq c_i\left(a_i, a^*_{-i}\right)$ non vale per un solo i). Il punto ammissibile $(Sedersi, Stare\ in\ piedi)$ non è un equilibrio di Nash perché se il primo giocatore si alzasse aumenterebbe il proprio payoff; simmetricamente anche il punto $(Stare\ in\ piedi, Sedersi)$ non è un equilibrio di Nash. Infine il punto $(Stare\ in\ piedi, Stare\ in\ piedi)$ è un equilibrio di Nash, in quanto ciascuno dei due giocatori, deviando unilateralmente da tale punto, diminuerebbe il proprio payoff.
Si osservi che questo gioco corrisponde al dilemma del prigioniero in forma di massimizzazione (i payoff coincidono infatti con il gioco 'la corsa agli armamenti' visto a lezione), dove lo stare in piedi corrisponde al confessare, mentre il sedersi corrisponde al non confessare.