Teoria dei giochi e delle decisioni
Soluzione del secondo compito di verifica:
Equilibri di Nash, ottimi secondo Pareto e strategie dominanti

Nota In questi esercizi per equilibri di Nash si intende equilibri di Nash *puri*. L'esercizio 5 è stato svolto in aula; la soluzione di questo esercizio sarà pubblicata prossimamente.

Esercizio 1. La soluzione è disponibile in rete: http://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/SOLS.HTM

Esercizio 2: Contribuire ad un bene pubblico. Definiamo l'insieme delle strategie di ogni giocatore $X_i = \{C, NC\}$ per $i = 1, \ldots, n$. È conveniente (ma non necessario) definire una funzione di payoff, in forma di utilità, coerente con l'ordine fornito nel testo dell'esercizio; a tal fine partizioniamo lo spazio delle strategie in base al numero h di giocatori che scelgono la strategia C. Sia H l'insieme dei giocatori che scelgono la strategia C con $|H| = h$:

$$\begin{array}{lll} h < k & \Rightarrow & c_i = 0\ \forall i \in H \text{ e } c_i = 1 \forall i \notin H \\ h \geq k & \Rightarrow & c_i = 2\ \forall i \in H \text{ e } c_i = 3 \forall i \notin H \end{array}$$

Dobbiamo adesso trovare gli equilibri di Nash del gioco. Se $0 < h < k$, allora non siamo in un equilibrio di Nash, infatti un qualunque $i \in H$ troverebbe conveniente cambiare strategia. Se $h > k$, allora non siamo in un equilibrio di Nash, infatti un qualunque giocatore $i \in H$ troverebbe conveniente cambiare strategia. Se $h = 0$ allora siamo in un equilibrio di Nash, infatti se un qualunque giocatore contribuisse diminuirebbe il proprio payoff; in particolare in questo equilibrio $c_i = 1\ \forall i = 1, \ldots, n$. Se $h = k$ allora siamo in un equilibrio di Nash, infatti se un qualsiasi giocatore $i \in H$ o $i \notin H$ cambiasse strategia diminuirebbe il proprio payoff; si noti che in questo equilibrio il payoff dei giocatori $i \in H$ è $c_i = 2$, mentre il payoff dei giocatori $i \notin H$ è $c_i = 3$. Il gioco quindi ammette $\binom{n}{k} + 1$ equilibri di Nash.
Tra questi equilibri, quello in cui nessun giocatore contribuisce non è ottimo secondo Pareto: basta osservare che, per ogni giocatore, il payoff in questo equilibrio è strettamente minore del payoff in un qualunque altro punto di equilibrio. Invece tutti gli altri $\binom{n}{k}$ equilibri sono ottimi secondo Pareto: infatti, in ciascuno di essi, gli $n - h$ giocatori che non contribuiscono ottengono un payoff massimo e quindi non possono spostarsi in uno stato del gioco strettamente più conveniente.
Si osservi ora nessun giocatore ha una strategia debolmente dominante (potrebbe sembrare che NC è sempre conveniente, ma non è così: se esattamente $k - 1$ giocatori decidono di contribuire, allora la strategia più conveniente per un giocatore è C). Naturalmente, questo implica che non esistono neanche strategie strettamente dominanti.
Infne è sempliece verificare che la strategia conservativa per ciascun giocatore è NC.

Esercizio 3
(a) Per giochi finiti con un numero di strategie e di giocatori finito e piccolo, in genere possiamo determinare gli equilibri di Nash per ispezione. Cerchiamo però di risolvere il problema utilizzando un metodo più generale, cioé utilizzando le best response function. Analizziamo le best response function del giocatore 1:

$$\begin{array}{lll} c_1(B,L) < c_1(T,L) < c_1(M,L) & \Rightarrow & b_1(L) = \{M\} \\ c_1(B,C) = c_1(M,C) < c_1(T,C) & \Rightarrow & b_1(C) = \{T\} \\ c_1(B,R) = c_1(M,R) = c_1(T,R) & \Rightarrow & b_1(R) = \{T, M, B\} \end{array}$$

Determiniamo ora le best response function del giocatore 2:

$$\begin{array}{lll} c_2(T,R) < c_2(T,L) < c_2(T,C) & \Rightarrow & b_2(T) = \{C\} \\ c_2(B,C) = c_2(B,R) < c_2(B,L) & \Rightarrow & b_2(M) = \{L\} \\ c_2(M,L) = c_2(M,C) = c_2(M,R) & \Rightarrow & b_2(B) = \{L, C, R\} \end{array}$$

Ricordiamo che $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ è un equilibrio di Nash iff $x_i^* \in B_i(x_{-i}^*)$ per ogni i. Gli equilibri di Nash del gioco sono quindi i vettori (M,L), (B,R) e (T,C).
(b) Per calcolare le strategie debolmente dominanti, possiamo utilizzare le funzioni best response. Abbiamo infatti che la strategia $x_i \in X_i$ è debolmente dominante se $x_i \in \bigcap_{x_{-i} \in X_{-i}} b_i(x_{-i})$. In particolare, per il giocatore 1 una strategia è debolmente domininante se $\exists K \in \{T,M,B\}$ tale che $K \in b_1(L) \cap b_1(C) \cap b_1(R)$. Nel nostro caso $b_1(L) \cap b_1(C) \cap b_1(R) = \emptyset$, quindi non esistono strategie debolmente dominanti per il giocatore 1. Visto che le strategie strettamente dominanti sono un sottoinsieme delle strategie debolmente dominanti, possiamo concludere che non esistono strategie strettamente dominanti per il giocatore 1.
Analogamente per il giocatore 2 abbiamo che $b_2(T) \cap b_2(M) \cap b_2(B) = \emptyset$, quindi non esistono né strategie debolmente dominanti né strategie strettamente dominanti per il giocatore 2.
(c) Ricordiamo che un vettore di strategie è ottimo debole secondo Pareto se non esiste un altro vettore di strategie in cui entrambi i giocatori migliorano strettamente il proprio payoff. In questo caso è facile verificare che i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto sono: (M,L), (T,C) e (T,L).
(d) Dal punto *(a)* e dal punto *(c)* segue che (M,L) e (T,C) sono equilibri di Nash e sono ottimi deboli secondo Pareto.
(e) Ricordiamo che $\tilde{c}(x_i) = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} c_i(x_i, x_{-i})$. Quindi: $\tilde{c}_1(T) = 0$, $\tilde{c}_1(M) = 0$, $\tilde{c}_1(B) = 0$. La strategia conservativa è quindi quella per cui $\tilde{c}(x_i)$ è massimo: tutte le strategie del giocatore 1 sono conservative. Analogamente, $\tilde{c}_2(L) = 0$, $\tilde{c}_2(C) = 0$, $\tilde{c}_2(R) = 0$: tutte le strategie del giocatore 2 sono conservative.

Esercizio 4: Equilibrio di Nash per giochi con infinite strategie. Nel caso di questo esercizio siamo di fronte ad un gioco con un numero finito di giocatori ma ciascun giocatore ha un numero infinito di strategie. In questo caso quindi non possiamo costruire la consueta matrice dei payoff e cercare di determinare gli equilibri di Nash per ispezione. Dobbiamo quindi ricorrere alle best response function.
Per quanto riguarda il giocatore 1 la funzione di payoff è $c_1(x_1, x_2) = x_1(x_2 - x_1)$; indichiamo con $c_{1,1}(x_1) = x_1(\hat{x_2} - x_1)$ il payoff del giocatore 1 fissata la strategia $\hat{x_2} \in X_2$, $c_{1,1}(x_1)$ è una funzione quadratica in x_1.
Per quanto riguarda il giocatore 2 la funzione di payoff è $c_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1 - x_2)$; indichiamo con $c_{2,2}(x_2) = x_2(1 - \hat{x_1} - x_2)$ il payoff del giocatore 2 fissata la strategia $\hat{x_1} \in X_1$, $c_{2,2}(x_2)$ è una funzione quadratica in x_2.
Ricordiamo che le best response function sono definite nel seguente modo:

$$b_1(\hat{x_2}) = \{x_1 \in X_1 : x_1 \in argmax\ c_{1,1}(x_1)\}$$

$$b_2(\hat{x_1}) = \{x_2 \in X_2 : x_2 \in argmax\ c_{2,2}(x_2)\}$$

In particolare, si osservi che le funzioni $c_{1,1}(x_1)$ e $c_{2,2}(x_2)$ possono essere rappresentate come una parabole con la concavità verso il basso. Per determinare il massimo calcoliamo $\frac{\partial c_{1,1}}{\partial x_1} = \hat{x_2} - 2x_1 = 0$, da cui $b_1(x_2) = \{\frac{\hat{x_2}}{2}\}$. Procediamo analogamente per il secondo giocatore: $\frac{\partial c_{2,2}}{\partial x_2} = 1 - \hat{x_1} - 2x_2 = 0$, da cui $b_2(x_1) = \{\frac{1-\hat{x_1}}{2}\}$.
Ricordiamo quindi che $x = (x_1, x_2)$ è un equilibrio di Nash iff $x_i \in b_i(x_{-i})$ per ogni i. Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{x_2}{2} \\ x_2 = \frac{1-x_1}{2} \end{array} \right\}$$

la cui soluzione è $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Il vettore delle strategie $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ è quindi l'unico equilibrio di Nash.

Esercizio 6
(a) Per il giocatore 1 T è debolmente dominata da M e strettamente dominata da B. Comunque, il giocatore 1 non ha una strategia debolmente dominante Per il giocatore 2 la strategia L è debolmente dominata da C, e C è debolmente dominata da L; comunque neanche il giocatore 2 ha una strategia debolmente dominante.

(b) Per determinare gli equilibri di Nash utilizziamo come nell'esercizio 3 le best response functions. Per il giocatore 1:

$$\begin{array}{lll} c_1(T,L) < c_1(M,L) = c_1(B,L) & \Rightarrow & b_1(L) = \{M,B\} \\ c_1(T,C) = c_1(M,C) < c_1(B,C) & \Rightarrow & b_1(C) = \{B\} \\ c_1(T,R) < c_1(B,R) < c_1(M,R) & \Rightarrow & b_1(R) = \{M\} \end{array}$$

Per il giocatore 2:

$$\begin{array}{lll} c_2(T,L) = c_2(T,C) < c_2(T,R) & \Rightarrow & b_2(T) = \{R\} \\ c_2(B,L) = c_2(B,C) < c_2(B,R) & \Rightarrow & b_2(B) = \{R\} \\ c_2(M,R) < c_2(M,L) = c_2(M,C) & \Rightarrow & b_1(M) = \{L,C\} \end{array}$$

L'unico equilibrio di Nash è quindi il vettore di strategie (M,L).
(c) I vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto sono $(M,R),(B,R)$ e (B,C).
(d) Dal punto *(b)* e dal punto *(c)* si deduce che l'equilibrio di Nash non è ottimo debole secondo Pareto.
(e) Abbiamo: $\tilde{c}$. $\tilde{c}_1(T) = 0$, $\tilde{c}_1(M) = 1$, $\tilde{c}_1(B) = 1$; $max\{\tilde{c}_1(T),\tilde{c}_1(M),\tilde{c}_1(B)\} = 1$, le strategie conservative del giocatore 1 sono quindi M e B. $\tilde{c}_2(L) = 0$, $\tilde{c}_2(C) = 0$, $\tilde{c}_2(R) = 0$; $max\{\tilde{c}_2(L),\tilde{c}_2(C),\tilde{c}_2(R)\} = 0$, tutte le strategie del giocatore 2 sono quindi conservative.