Teoria dei giochi e delle decisioni
Aste ed incidenti: Terzo compito di verifica

Nota In questi esercizi per equilibri di Nash si intende equilibri di Nash PURI.

Esercizio 1. La soluzione è disponibile in rete al link http://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/SOLS.HTM

Esercizio 2. *(a)* Confrontando l'asta di secondo e di terzo prezzo, osserviamo che per uno stesso vettore di strategie $x = (x_1, \dots, x_n)$ le due aste determinano lo stesso vincitore. L'unica differenza è nel payoff del vincitore, che aumenta della quantità $q(x) = secmax(x) - termax(x)$, dove $secmax(x)$ e $termax(x)$ indicano rispettivamente il secondo e il terzo valore massimo del vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ (quindi $q(x) \geq 0$).

Per prima cosa confrontiamo, per l'asta di terzo prezzo, le strategie $(x_i = v_i)$ e $(x_i < v_i)$. Dividiamo lo spazio delle strategie in quattro classi:
1) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta vincitore sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i < v_i)$;
2) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta non vincitore sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i < v_i)$;
3) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta vincitore con $(x_i = v_i)$ e non vincitore con $(x_i < v_i)$;
4) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta non vincitore $(x_i = v_i)$ e vincitore con $(x_i < v_i)$.

L'ultima classe è chiaramente vuota! Ricordiamo ora che per l'asta di secondo prezzo la strategia $(x_i = v_i)$ domina debolmente la strategia $(x_i < v_i)$, ovvero per un giocatore i, fissato il vettore x_{-i}, $C_i(x_i = v_i, x_{-i}) \geq C_i(x_i < v_i, x_{-i})$. Per ciascuna delle tra classi residue, analizziamo quindi come varia per l'asta di terzo prezzo il payoff del giocatore i, rispetto l'asta di secondo prezzo:
1) il payoff di i aumenta di $q(x)$ sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i < v_i)$;
2) il payoff di i non cambia sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i < v_i)$;
3) il payoff di i aumenta di $q(x)$ con $(x_i = v_i)$ ma non cambia con $(x_i < v_i)$

quindi chiaramente $(x_i = v_i)$ domina debolmente $(x_i < v_i)$.

Confrontiamo quindi, per l'asta di terzo prezzo, le strategie $(x_i = v_i)$ e $(x_i > v_i)$. Procedendo come sopra dividiamo lo spazio delle strategie in quattro classi:
1) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta vincitore sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i > v_i)$;
2) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta non vincitore sia con $(x_i = v_i)$ che con $(x_i > v_i)$;
3) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta vincitore con $(x_i = v_i)$ e non vincitore con $(x_i > v_i)$;
4) i vettori di strategia in cui il giocatore i risulta non vincitore $(x_i = v_i)$ e vincitore con $(x_i > v_i)$.

Ma la terza classe è chiaramente vuota! Inoltre nella quarta classe, rispetto all'asta di secondo prezzo il payoff di i non cambia con $(x_i = v_i)$ ma aumenta di $q(x)$ con $(x_i > v_i)$. In particolare, se $x_2 > x_3 > \ldots > x_n$, con $x_2 > v_1 > x_3$, il payoff del primo giocatore è $(v_1 - x_3) > 0$ se gioca una strategia $x_1 > x_2$, mentre è 0 altrimenti. Quindi chiaramente $(x_1 = v_1)$ non domina debolmente $(x_1 > v_1)$ e quindi, in generale, $(x_i = v_i)$ non domina debolmente $(x_i > v_i)$.

(b) Assumiamo senza perdita di generalità che $v_1 > v_2 > v_3 \ldots$. Consideriamo il vettore di strategie $x = (v_1, \dots, v_n)$. Il giocatore 1 vince l'asta ed ha un payoff pari a $c_1 = v_1 - v_3$, mentre $c_i = 0 \; \forall i = 2, \dots, n$. Questo vettore è un equilibrio di Nash? No, infatti se il giocatore 2 gioca $x_2 = v_1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, vince l'asta e il suo payoff passa da 0 ad un valore $c_2 = v_2 - v_3 > 0$.

Esercizio 3. First-price auction. Indichiamo con vw la strategia di ciascun giocatore, dove v è la quantità di denaro che il giocatore è disposto a inverstire e $w \in \{x, y, z\}$ è la politica scelta. Dobbiamo quindi verificare se il vettore di strategie $(103y, 103z)$ è un equilibrio di Nash. Si noti che in questo caso il governo implementa la politica Y. Il payoff dei giocatori corrispondente a tale vettore di strategie è $c_A(103y, 103z) = 3 - 103 = -100$, $c_B(103y, 103z) = -100$. Dobbiamo quindi verificare: *(i)* che il giocatore A non ha interesse a cambiare strategia, dato che il giocatore B gioca $103z$, *(ii)* che il giocatore B non ha interesse a cambiare strategia, dato che il giocatore A gioca $103y$.

(i) Supponiamo inizialmente che il giocatore A scelga comunque la politica y. Cambiare strategia in $(103+\varepsilon)y$, $\forall\varepsilon > 0$, non è conveniente infatti $c_A((103+\varepsilon)y, 103z) = 3-103-\varepsilon = -100-\varepsilon < c_A(103y, 103z)$. Analogamente, cambiare strategia in $(103-\varepsilon)y$, $\forall\varepsilon > 0$, non è conveniente infatti $c_A((103-\varepsilon)y, 103z) = -100 = c_A(103y, 103z)$ (si noti che in questo caso il governo implementerebbe la politica z).

Supponiamo quindi che il giocatore A cambi la politica scelta ed in particolare scelga la politica x. La strategia $(103+\varepsilon)x$, $\forall\varepsilon \geq 0$, non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica x e $c_A((103+\varepsilon)x, 103z) = 0-103-\varepsilon = -103-\varepsilon < c_A(103y, 103z)$. La strategia $(103-\varepsilon)x$, $\forall\varepsilon > 0$, analogamente non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica z e $c_A((103-\varepsilon)x, 103z) = -100 = c_A(103y, 103z)$.

Supponiamo infine che il giocatore A scelga la politica z. In questo caso, qualunque sia la quantità di denaro che il primo giocatore è disposto a inverstire, il governo implementa la politica z. Il payoff del primo giocatore non può quindi essere in ogni caso maggiore del valore -100 che egli attribuisce alla politica z. (Qui il testo dell'esercizio è un pò impreciso, perché non spiega chi/quanto paga nel caso in cui i giocatori scelgono la *stessa* politica. In ogni caso, poiché il pagamento non può essere negativo (!), il primo giocatore non può avere un payoff > -100). Possiamo quindi concludere che il giocatore A non è interessato a cambiare strategia se il giocatore B gioca $103z$.

(ii) Supponiamo inizialmente che il giocatore B scelga comunque la politica z. Cambiare strategia in $(103+\varepsilon)z$ $\forall\varepsilon > 0$ non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica z e $c_B(103y, (103z+\varepsilon)) = 3-103-\varepsilon = -100-\varepsilon < c_B(103y, 103z)$. Cambiare strategia in $(103-\varepsilon)z$ $\forall\varepsilon > 0$ non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica y e $c_B(103y, (103-\varepsilon)z) = -100 = c_B(103y, 103z)$.

Supponiamo quindi che il giocatore B cambi la politica scelta ed in particolare scelga la politica x. Se sceglie la strategia $(103+\varepsilon)x$, $\forall\varepsilon \geq 0$, non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica x e $c_B(103y, (103+\varepsilon)x) = 0-103-\varepsilon = -103-\varepsilon < c_B(103y, 103z)$. La strategia $(103-\varepsilon)x$, $\forall\varepsilon > 0$, analogamente non è conveniente, infatti il governo implementerebbe la politica y e $c_B(103y, (103-\varepsilon)x) = -100 = c_B(103y, 103z)$.

Supponiamo infine che il giocatore B scelga la politica y. In questo caso, qualunque sia la quantità di denaro che il secondo giocatore è disposto a inverstire, il governo implementa la politica y. Il payoff del secondo giocatore non può quindi essere in ogni caso maggiore del valore -100 che egli attribuisce alla politica y. Possiamo quindi concludere che il giocatore B non è interessato a cambiare strategia se il giocatore A gioca $103y$. Il vettore di strategie $(103y, 103z)$ è quindi un equilibrio di Nash.

Menu auction. Estendendo la notazione introdotta nel caso precedente, dobbiamo dimostrare che il vettore di strategie $(3x\ 6y\ 0z, 3x\ 0y\ 6z)$ è un equilibrio di Nash. Il payoff dei giocatori corrispondente a tale vettore di strategie è $c_A(3x\ 6y\ 0z, 3x\ 0y\ 6z) = 0-3 = -3$, $c_B(3x\ 6y\ 0z, 3x\ 0y\ 6z) = 0-3 = -3$. Dobbiamo quindi verificare: *(i)* che il giocatore A non ha interesse a cambiare strategia, dato che il giocatore B gioca $3x\ 0y\ 6z$, *(ii)* che il giocatore B non ha interesse a cambiare strategia, dato che il giocatore A gioca $3x\ 6y\ 0z$. In questo caso il metodo migliore per affrontare il problema è di dimostrare che $x_A = (3x\ 6y\ 0z)$ è la riposta migliore alla giocata $x_B = (3x\ 0y\ 6z)$ per il giocatore A, e viceversa.

(i) Data la strategia $(3x, 0y, 6z)$ di B, partizioniamo le strategie di A in tre classi: 1) le stategie che portano il governo ad adottare la politica x, quelle che portano il governo ad adottare la politica y, quelle che portano il governo ad adottare la politica z.

Vediamo qual è la best response del giocatore A alla strategia $(3x, 0y, 6z)$ di B e che porta il governo ad adottare la politica x. Sia $(\alpha x, \beta y, \gamma z)$ la strategia scelta da A, naturalmente con $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Affinché il governo scelga la stategia x devono valere: $\alpha + 3 \geq \beta + 0$ e $\alpha + 3 \geq \gamma + 6$. In queste ipotesi, il payoff di A è: $-\alpha + 0$. In altre parole, per scegliere la sua best response alla strategia $(3x, 0y, 6z)$ di B il giocatore A deve risolvere il seguente problema di PL: $max - \alpha$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0;\ \alpha + 3 \geq \beta; \alpha + 3 \geq \gamma + 6\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $(3x, (0 \leq \beta \leq 6)y, 0z)$ che hanno valore -3.

Vediamo qual è la best response del giocatore A alla strategia $(3x, 0y, 6z)$ di B e che porta il governo ad adottare la politica y. In queste ipotesi, il payoff di A è: $-\beta + 3$. Procedendo come sopra, il giocatore A deve risolvere il seguente problema di PL: $max(-\beta + 3)$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0;\ \beta \geq \alpha + 3; \beta \geq \gamma + 6\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $((0 \leq \alpha \leq 3)x, 6y, 0z)$ che hanno valore -3.

Vediamo infine qual è la best response del giocatore A alla strategia $(3x, 0y, 6z)$ di B e che porta il governo ad adottare la politica z. In queste ipotesi, il payoff di A è: $-\gamma - 100$. Procedendo come sopra, il giocatore A deve risolvere il seguente problema di PL: $max(-\gamma - 100)$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0;\ \gamma + 6 \geq \alpha + 3; \gamma + 6 \geq \beta\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $((0 \leq \alpha \leq 3)x, (0 \leq \beta \leq 6)y, 0z)$ che hanno valore -100.

Possiamo quindi concludere che $b_A(3x, 0y, 6z) = \{(3x, (0 \leq \beta \leq 6)y, 0z)\} \cup \{((0 \leq \alpha \leq 3)x, 6y, 0z)\}$.

(ii) Procediamo come sopra. Vediamo qual è la best response del giocatore B alla strategia $(3x, 6y, 0z)$ di A e che porta il governo ad adottare la politica x. Sia $(\alpha x, \beta y, \gamma z)$ la strategia scelta da B, naturalmente con $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Affinché il governo scelga la stategia x devono valere: $\alpha + 3 \geq \beta + 6$ e $\alpha + 3 \geq \gamma + 0$. In queste ipotesi, il payoff di B è: $-\alpha + 0$. In altre parole, per scegliere la sua best response alla strategia $(3x, 6y, 0z)$ di A il giocatore B deve risolvere il seguente problema di PL: $max - \alpha$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0;\ \alpha + 3 \geq \beta + 6; \alpha + 3 \geq \gamma\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $(3x, 0y, (0 \leq \gamma \leq 6)z)$ e con valore -3.

Vediamo qual è la best response del giocatore B alla strategia $(3x, 6y, 0z)$ di A e che porta il governo ad adottare la politica y. In queste ipotesi, il payoff di B è: $-\beta - 100$. Procedendo come sopra, il giocatore B deve risolvere il seguente problema di PL: $max(-\beta - 100)$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0;\ \beta + 6 \geq \alpha + 3; \beta + 6 \geq \gamma\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $((0 \leq \alpha \leq 3)x, 0y, (0 \leq \gamma \leq 6)z)$ che hanno valore -100.

Vediamo infine qual è la best response del giocatore B alla strategia $(3x, 6y, 0z)$ di A e che porta il governo ad adottare la politica z. In queste ipotesi, il payoff di B è: $-\gamma + 3$. Procedendo come sopra, il giocatore B deve risolvere il seguente problema di PL: $max(-\gamma + 3)$ s.t. $\{\alpha, \beta, \gamma \geq 0; \gamma \geq \alpha + 3; \gamma \geq \beta + 6\}$. Le soluzioni ottime sono tutti i punti $((0 \leq \alpha \leq 3)x, 0y, 6z)$ che hanno valore -3.

Possiamo quindi concludere che $b_B(3x, 6y, 0z) = \{(3x, 0y, (0 \leq \gamma \leq 6)z)\} \cup \{((0 \leq \alpha \leq 3)x, 0y, 6z)\}$.

Possiamo infine osservare che la strategia $(3x, 6y, 0z)$ del giocatore A è una best response alla strategia $(3x, 0y, 6z)$ del giocatore B e, viceversa, la strategia $(3x, 0y, 6z)$ del giocatore B è una best response alla strategia $(3x, 6y, 0z)$ del giocatore A. Quindi $((3x, 6y, 0z), (3x, 0y, 6z))$ è un equilibrio di Nash.

Esercizio 4: Equilibrio sotto responsabilità stretta. Per determinare gli equilibri di Nash del gioco utilizziamo le best response functions. Innanzitutto osserviamo che i payoff dei giocatori sono $c_1(x_1, x_2) = -x_1 - L(x_1, x_2)$ e $c_2(x_1, x_2) = -x_2$, e ricordiamo che le variabili x_1 ed x_2 sono non-negative. Le best response functions sono quindi:

$$b_1(x_2) = \left\{ \arg\max_{x_1 \geq 0} \ -x_1 - L(x_1, x_2) \right\}$$

$$b_2(x_1) = \{x_2 = 0\}$$

Sia $x_1^* = \arg\max_{x_1 \geq 0} \ -x_1 - L(x_1, 0)$, ne consegue che l'unico equilibrio di Nash del gioco è il vettore di strategie $(x_1, x_2) = (x_1^*, 0)$.