Teoria dei giochi e delle decisioni
Giochi cooperativi: Soluzione del quinto compito di verifica

Esercizio 1 (i) Sappiamo che una funzione è caratteristica se e solo se $v(\emptyset) = 0$ e per ogni $Q \subseteq N$, $\forall$ partizione di $Q \subseteq N$ in classi $S_1, \ldots, S_h$ si ha che $v(Q) \geq \sum_{i=1}^{h} v(S_i)$: naturalmente, possiamo assumere che le classi siano almeno due e tutte non vuote. Segue che dobbiamo considerare: $Q = \{A,B,C\}$ e una sua qualunque partizione in due o tre classi (non vuote); $Q = \{A,B\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote); $Q = \{A,C\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote); $Q = \{B,C\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote).

Sia $Q = \{A,B,C\}$. Le possibili partizioni di Q sono $P_Q^1 = \{\{A\},\{B\},\{C\}\}$, $P_Q^2 = \{\{A,B\},\{C\}\}$, $P_Q^3 = \{\{A,C\},\{B\}\}$, $P_Q^4 = \{\{A\},\{B,C\}\}$. Verifichiamo quindi che

$$\begin{array}{lcl} v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B\}) + v(\{C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 2+1+1 = 4 \\ v(Q) \geq v(\{A,B\}) + v(\{C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 6+1 = 7 \\ v(Q) \geq v(\{A,C\}) + v(\{B\}) & \Rightarrow & 18 \geq 6+1 = 7 \\ v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B,C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 2+4 = 6 \end{array}$$

Sia $Q = \{A,B\}$. L'unica partizione di Q è $P_Q^1 = \{\{A\},\{B\}\}$, verifichiamo quindi che

$$v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B\}) \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 2+1 = 3$$

Sia $Q = \{A,C\}$. L'unica partizione di Q è $P_Q^1 = \{\{A\},\{C\}\}$, verifichiamo quindi che

$$v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{C\}) \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 2+1 = 3$$

Sia $Q = \{B,C\}$. L'unica partizione di Q è $P_Q^1 = \{\{B\},\{C\}\}$, verifichiamo quindi che

$$v(Q) \geq v(\{B\}) + v(\{C\}) \quad \Rightarrow \quad 4 \geq 1+1 = 2$$

Da cui possiamo concludere che la funzione v è una funzione caratteristica.

(ii) Sappiamo che il nucleo del gioco è rappresentato dal seguente insieme di equazioni e disequazioni:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \geq 2 \\ \alpha_2 \geq 1 \\ \alpha_3 \geq 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18 \end{array}$$

Utilizzando l'ultima equazione per esprimere α_3 in funzione di α_1 ed α_2, possiamo ridurre il problema nella forma di un insieme di disequazioni con due sole variabili. In particolare sostituendo quindi $\alpha_3 = 18 - \alpha_1 - \alpha_2$, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \geq 2 \\ \alpha_2 \geq 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 \leq 12 \\ \alpha_1 \leq 14 \\ \alpha_3 = 18 - \alpha_1 - \alpha_2 \end{array}$$

Abbiamo riscritto il nostro sistema come un sistema con 6 disuguaglianze in due variabili x_1, x_2 e infine una uguaglianza che associa a ogni vettore (x_1, x_2) il valore x_3 della terza variabile. In altre parole, le prime 6 disequazioni determinano la *proiezione* del nucleo nello spazio delle sole due variabili x_1, x_2, l'uguaglianza "estende" ogni punto (x_1, x_2) che appartiene alla proiezione del nucleo in un punto (x_1, x_2, x_3) del nucleo.

È immediato osservare che la proiezione del nucleo nello spazio delle sole due variabili x_1, x_2 è il poliedro mostrato in figura 1, che ha per vertici i punti $(2,4)$ $(2,12)$ $(5,1)$ $(5,12)$ $(14,1)$ $(14,3)$.

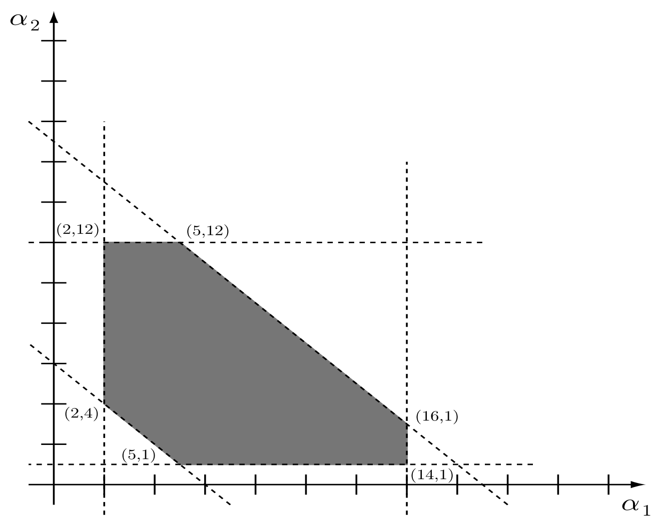

Figure 1: La proiezione sul piano $\alpha_1\alpha_2$ del nucleo del gioco dell'esercizio 1

Segue che il nucleo del gioco è il poliedro con vertici: $(2,4,12)$ $(2,12,4)$ $(5,1,12)$ $(5,12,1)$ $(14,1,3)$ $(14,3,1)$.

Esercizio 2 (i) Innanzitutto scriviamo l'insieme di equazioni e disequazioni che determinano il nucleo del gioco

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1 \geq \frac{\rho}{5} \\
\alpha_2 \geq \frac{\rho}{5} \\
\alpha_3 \geq \frac{\rho}{5} \\
\alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{\rho}{2} \\
\alpha_1 + \alpha_3 \geq \frac{\rho}{2} \\
\alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{\rho}{2} \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1
\end{array}
$$

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente, utilizziamo l'ultima equazione per riscrivere il sistema:

$$
\begin{array}{l}
\frac{\rho}{5} \leq \alpha_1 \leq 1 - \frac{\rho}{2} \\
\frac{\rho}{5} \leq \alpha_2 \leq 1 - \frac{\rho}{2} \\
\frac{\rho}{2} \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1 - \frac{\rho}{5} \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1
\end{array}
$$

Si osservi che condizione necessaria (ma non sufficiente, come vedremo poi) perché il nucleo sia non vuoto è che $\frac{\rho}{5} \leq 1 - \frac{\rho}{2}$, cioè $\rho \leq \frac{10}{7}$. Supponiamo quindi che $\rho \leq \frac{10}{7}$. Procedendo come nell'esercizio precedente, la proiezione del nucleo nello spazio delle sole due variabili α_1, α_2 determina il poliedro:

$$\begin{aligned} \tfrac{\rho}{5} &\leq \alpha_1 \leq 1-\tfrac{\rho}{2} \\ \tfrac{\rho}{5} &\leq \alpha_2 \leq 1-\tfrac{\rho}{2} \\ \tfrac{\rho}{2} &\leq \alpha_1+\alpha_2 \leq 1-\tfrac{\rho}{5} \end{aligned}$$

È facile vedere che questo poliedro è non vuoto se e solo $\rho \leq \frac{4}{3}$. In questo caso, esso è un poliedro con vertici $\left(\frac{3}{10}\rho, \frac{\rho}{5}\right)$, $\left(\frac{\rho}{5}, \frac{3}{10}\rho\right)$, $\left(\frac{\rho}{5}, 1-\frac{\rho}{2}\right)$, $\left(1-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{10}\rho, 1-\frac{\rho}{2}\right)$, $\left(1-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{10}\rho\right)$ se $0 \leq \rho \leq \frac{5}{4}$. Estendendo questo poliedro nello spazio originario, otteniamo il poliedro con vertici $\left(\frac{3}{10}\rho, \frac{\rho}{5}, 1-\frac{\rho}{2}\right)$, $\left(\frac{\rho}{5}, \frac{3}{10}\rho, 1-\frac{\rho}{2}\right)$, $\left(\frac{\rho}{5}, 1-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{10}\rho\right)$, $\left(1-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{5}, \frac{3}{10}\rho\right)$, $\left(\frac{3}{10}\rho, 1-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{5}\right)$, $\left(1-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{10}\rho, \frac{\rho}{5}\right)$ per $0 \leq \rho \leq \frac{5}{4}$.

Per $\frac{5}{4} \leq \rho \leq \frac{4}{3}$ invece il nucleo è un poliedro con vertici $\left(1-\frac{\rho}{2}, 1-\frac{\rho}{2}, \rho-1\right)$, $\left(1-\frac{\rho}{2}, \rho-1, 1-\frac{\rho}{2}\right)$, $\left(\rho-1, 1-\frac{\rho}{2}, 1-\frac{\rho}{2}\right)$.

(ii) Ricordiamo che in questo caso $\mathcal{N}_p = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Per $\rho = \frac{10}{7}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} v(S) &= \tfrac{2}{7} \quad \text{se } |S| = 1 \\ v(S) &= \tfrac{5}{7} \quad \text{se } |S| = 2 \\ v(S) &= 1 \quad \text{se } S = N \end{aligned}$$

Allora se prendiamo $\lambda_S = \left[0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, otteniamo

$$\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) = \frac{1}{2}(\frac{5}{7} \cdot 3) = \frac{15}{14} > v(N) = 1$$