Teoria dei giochi e delle decisioni
Giochi cooperativi e valore di Shapley: Soluzione del sesto compito di verifica

Esercizio 1 (i) Sappiamo che il valore di Shapley per ogni giocatore $i \in N$ può essere determinato utilizzando la formula:

$$S_i(v) = \sum_{T \subseteq N: i \in T} \frac{(|T|-1)!\,(n-|T|)!}{n!}\,(v(T) - v(T \setminus \{i\})) = \sum_{T \subseteq N: i \in T} a(|T|,n)\,(v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

Innanzitutto determiniamo i coefficienti $a(|T|,n)$:

$$\begin{array}{l} a(1,5) = \frac{0!4!}{5!} = \frac{1}{5} \\ a(2,5) = \frac{1!3!}{5!} = \frac{1}{20} \\ a(3,5) = \frac{2!2!}{5!} = \frac{1}{30} \\ a(4,5) = \frac{3!1!}{5!} = \frac{1}{20} \\ a(5,5) = \frac{4!0!}{5!} = \frac{1}{5} \end{array}$$

Ora restano da svolgere i calcoli per ogni singolo giocatore.

$$\begin{aligned} S_A(v) = {} & \frac{1}{5}\,(v(\{A\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,C\}) - v(\{C\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,D\}) - v(\{D\})) + \\ & + \frac{1}{20}\,(v(\{A,E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,D\}) - v(\{B,D\})) + \\ & + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,E\}) - v(\{B,E\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,C,D\}) - v(\{C,D\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,C,E\}) - v(\{C,E\})) + \\ & + \frac{1}{30}\,(v(\{A,D,E\}) - v(\{D,E\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,C,D\}) - v(\{B,C,D\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,C,E\}) - v(\{B,C,E\})) + \\ & + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,D,E\}) - v(\{B,D,E\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,C,D,E\}) - v(\{C,D,E\})) + \\ & + \frac{1}{5}\,(v(\{A,B,C,D,E\}) - v(\{B,C,D,E\})) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B(v) = {} & \frac{1}{5}\,(v(\{B\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{B,C\}) - v(\{C\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{B,D\}) - v(\{D\})) + \\ & + \frac{1}{20}\,(v(\{B,E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,D\}) - v(\{A,D\})) + \\ & + \frac{1}{30}\,(v(\{A,B,E\}) - v(\{A,E\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{B,C,D\}) - v(\{C,D\})) + \frac{1}{30}\,(v(\{B,C,E\}) - v(\{C,E\})) + \\ & + \frac{1}{30}\,(v(\{B,D,E\}) - v(\{D,E\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,C,D\}) - v(\{A,C,D\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,C,E\}) - v(\{A,C,E\})) + \\ & + \frac{1}{20}\,(v(\{A,B,D,E\}) - v(\{A,D,E\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{B,C,D,E\}) - v(\{C,D,E\})) + \\ & + \frac{1}{5}\,(v(\{A,B,C,D,E\}) - v(\{A,C,D,E\})) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$S_C(v) = \frac{1}{5}\,(v(\{C\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20}\,(v(\{A,C\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{B,C\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20}\,(v(\{C,D\}) - v(\{D\})) +$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{C,E\})-v(\{E\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,B,C\})-v(\{A,C\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,C,D\})-v(\{A,D\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{A,C,E\})-v(\{A,E\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,C,D\})-v(\{B,D\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,C,E\})-v(\{B,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{C,D,E\})-v(\{D,E\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,C,D\})-v(\{A,B,D\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,C,E\})-v(\{A,B,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{B,C,D,E\})-v(\{B,D,E\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,C,D,E\})-v(\{A,D,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\left(v(\{A,B,C,D,E\})-v(\{A,B,D,E\})\right)=$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$$

$$S_D(v)=\frac{1}{5}\left(v(\{D\})-v(\emptyset)\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,D\})-v(\{A\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{B,D\})-v(\{B\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{C,D\})-v(\{C\})\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{D,E\})-v(\{E\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,B,D\})-v(\{A,B\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,C,D\})-v(\{A,C\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{A,D,E\})-v(\{A,E\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,C,D\})-v(\{B,C\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,D,E\})-v(\{B,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{C,D,E\})-v(\{C,E\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,C,D\})-v(\{A,B,C\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,D,E\})-v(\{A,B,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{B,C,D,E\})-v(\{B,C,E\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,C,D,E\})-v(\{A,C,E\})\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\left(v(\{A,B,C,D,E\})-v(\{A,B,C,E\})\right)=$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{4}{15}$$

$$S_E(v)=\frac{1}{5}\left(v(\{E\})-v(\emptyset)\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,E\})-v(\{A\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{B,E\})-v(\{B\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{C,E\})-v(\{C\})\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{D,E\})-v(\{D\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,B,E\})-v(\{A,B\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{A,C,E\})-v(\{A,C\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{A,D,E\})-v(\{A,D\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,C,E\})-v(\{B,C\})\right)+\frac{1}{30}\left(v(\{B,D,E\})-v(\{B,D\})\right)+$$

$$+\frac{1}{30}\left(v(\{C,D,E\})-v(\{C,D\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,C,E\})-v(\{A,B,C\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{A,B,D,E\})-v(\{A,B,D\})\right)+$$

$$+\frac{1}{20}\left(v(\{A,C,D,E\})-v(\{A,C,D\})\right)+\frac{1}{20}\left(v(\{B,C,D,E\})-v(\{B,C,D\})\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\left(v(\{A,B,C,D,E\})-v(\{A,B,C,D\})\right)=$$

$$=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{11}{60}$$

Si può verificare l'esattezza del risultato verificando che la somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori è pari a 1.

Esercizio 2

(i) È facile verificare per $n \leq 4$ la funzione $v(T)$ non è superadditiva, perché è possibile prendere due sottoinsiemi disgiunti di N, T_1 e T_2, con $T_1 \geq n-2$ e $T_2 \geq n-2$ tali che $v(T_1)+v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$ violando così la condizione di superadditività. Sia quindi $n \geq 5$. Per calcolare $S_i(v)$ utilizziamo:

$S_i(v) = \frac{1}{n!}$ (n.ro permutazoni: A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente), $\forall i \in N$

Le permutazioni tali che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte quelle in cui i è in posizione $(n-2)-esima$ e sono quindi in numero $(n-1)!$. Segue quindi che $S_i(v) = \frac{1}{n}$ $\forall i \in N$.

(ii) In questo caso se $n > 3$ la funzione $v(T)$ non è superadditiva, perché è sempre possibile prendere due sottoinsiemi di N disgiunti di cardinalità pari, T_1 e T_2, la cui unione ovviamente ha cardinalità pari. Si otterrebbe quindi $v(T_1)+v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$ violando così la condizione di superadditività.

(iii) La funzione $v(T)$ non è superadditiva. Per dimostrarlo basta prendere un sottoinsieme T_1 tale che $i \in T_1$ ma $j \notin T_1$ ed un sottoinsieme T_2 tale che $j \in T_2$ ma $i \notin T_2$, in modo tale che T_1 e T_2 siano disgiunti; ovviamente si ha che $i \in T_1 \cup T_2$ e $j \in T_1 \cup T_2$, da cui $v(T_1)+v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$.

(iv) Questo gioco è una variante del gioco a maggioranza semplice. È immediato verificare che la funzione $v(T)$ è superadditiva. Infatti se non fosse superadditiva dovremmo poter prendere due sottoinsiemi disgiunti di donne ciascuno con cardinalità strettamente maggiore di $\frac{m}{2}$, ma questo non è chiaramente possibile perché la cardinalità dell'insieme delle donne è pari a m. Per determinare il valore di Shapley di ciascun giocatore osserviamo preliminarmente che ciascun uomo è un giocatore inutile, infatti la sua presenza o meno all'interno della coalizione non modifica il valore della coalizione. A questo punto ci siamo ridotti ad un gioco a maggioranza semplice sull'insieme delle donne, il valore di Shapley è quindi $S_i(v) = 0$ $\forall i \in$ Uomini e $S_i(v) = \frac{1}{m}$ $\forall i \in$ Donne.

Esercizio 3 Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo (N, v) dobbiamo definire la funzione v. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 9$ e $v(\{B\}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max z_A^1 + 3z_A^2 + 2z_B^1 + z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 4$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 6$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 4 - z_A^1$ e $z_B^2 = 6 - z_A^2$. Possiamo così ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max -z_A^1 + 2z_A^2 + 14$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 4$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 6$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(4,0)$ $(0,6)$ e $(4,6)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(0,6)$ ed il valore ottimo è pari a 26. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A, B\}) = 26$ e la allocazione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (0,6)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (4,0)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori α_1 ed α_2 tali che:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \geq 9 \\
&\alpha_2 \geq 6 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 = 26
\end{aligned}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (16, 10)$.