Teoria dei giochi e delle decisioni
Equilibri di Nash, ottimi secondo Pareto e strategie dominanti: Soluzione del secondo compito di verifica

Nota In questi esercizi per equilibri di Nash si intende equilibri di Nash PURI.

***Esercizio 5: Un progetto comune.**
(a) Abbiamo che $c_1(x_1,x_2) = \frac{3}{2}x_1x_2 - x_1^2$ e $c_2(x_1,x_2) = \frac{3}{2}x_1x_2 - x_2^2$. Come nell'esercizio 4, per entrambi i giocatori la funzione di payoff è quadratica nella loro variabile, ed in particolare è nuovamente una parabola con la concavità rivolta verso il basso; il suo massimo sarà quindi nel punto in cui si annulla la derivata. Per determinare il massimo calcoliamo $\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = \frac{3}{2}x_2 - 2x_1 = 0$, da cui $b_1(x_2) = \{\frac{3}{4}x_2\}$. Per il giocatore 2 $\frac{\partial c_2}{\partial x_2} = \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 = 0$, da cui $b_2(x_1) = \{\frac{3}{4}x_1\}$. Mettendo a sistema le due condizioni otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4}x_2 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_1 \end{array} \right\}$$

La cui soluzione è $(x_1,x_2) = (0,0)$. Si osservi che la soluzione rispetta i vincoli $0 \leq x_i \leq 1$ per $i = 1,2$, il vettore delle strategie trovato è quindi l'equilibrio di Nash del gioco.

Dobbiamo adesso determinare se l'equilibrio di Nash che abbiamo trovato è un ottimo debole secondo Pareto. Innanzitutto osserviamo che nell'equilibrio di Nash $c_1 = c_2 = 0$. Per capire se l'equilibrio di Nash è ottimo secondo Pareto dobbiamo verificare se esiste un vettore di strategie in cui entrambi i giocatori abbiano un payoff maggiore.

Nel seguito mostriamo un *metodo* per determinare questo punto. Dato un vettore di strategie $\bar{x}$, questo *non* è ottimo (debole) secondo Pareto se esiste un altro vettore di strategie $x \in X = X_1 \times X_2$ tale che $c_1(x) > c_1(\bar{x})$ e $c_2(x) > c_2(\bar{x})$. Cercare un punto che soddisfi tali condizioni equivale a risolvere il seguente problema di programmazione matematica:

$$\begin{array}{l} \max \quad \varepsilon \\ \text{subject to} \\ \quad c_1(x) \geq c_1(\bar{x}) + \varepsilon \\ \quad c_2(x) \geq c_2(\bar{x}) + \varepsilon \\ \quad x \in X \\ \quad \varepsilon \geq 0 \end{array}$$

Se il valore della soluzione ottima di questo problema è $\varepsilon = 0$, allora il vettore di strategie $\bar{x}$ è ottimo secondo Pareto. Se invece il valore della soluzione ottima al problema è $\varepsilon > 0$, allora il punto $\bar{x}$ non è ottimo secondo Pareto. Nel nostro caso particolare, il programma precedente diviene:

$$\begin{array}{l} \max \quad \varepsilon \\ \text{subject to} \\ \quad \frac{3}{2}x_1x_2 - x_1^2 \geq \varepsilon \\ \quad \frac{3}{2}x_1x_2 - x_2^2 \geq \varepsilon \\ \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\ \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \quad \varepsilon \geq 0 \end{array}$$

Dunque, il punto $(0,0)$ è ottimo secondo Pareto se e solo se il valore della soluzione ottima di questo problema è $\varepsilon = 0$. Come risolviamo questo problema? È un problema di programmazione non lineare vincolata, per il quale abbiamo condizioni necessarie di ottimo, le condizioni di Karush Kuhn Tucker o di KKT (Vedi Appendice). Tuttavia l'applicazione delle condizioni KKT a questo problema è un pò laboriosa, quindi preferiamo tentare un approccio "indiretto", seguendo il suggerimento del testo.

Cerchiamo quindi di trovare un punto $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ che massimizzi la funzione $g(x_1, x_2) = c_1(x_1, x_2) + c_2(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$. L'idea è che un tale punto è un buon candidato a mostrare che $(0,0)$ non è ottimo secondo Pareto: infatti, se $(0,0)$ non è ottimo secondo Pareto, esiste $x \in X_1 \times X_2$ tale che $c_1(x) > c_1(0,0)$ e $c_2(x) > c_2(0,0)$: in particolare varrà $g(x) > g(0,0)$.

Vogliamo quindi massimizzare una funzione quadratica su un quadrato di lato unitario. Questa volta l'applicazione delle condizioni KKT è semplice, quindi procediamo.

Per applicare le condizioni KKT, è necessario riportare il problema in forma di minimo e tutte le disequazioni che definiscono i vincoli in forma di $\leq$. La funzione Lagrangiana è quindi: $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -3x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1 - 1) + \lambda_2(x_2 - 1)$. Le condizioni KKT sono quindi:

$$
\begin{aligned}
&-3x_2 + 2x_1 + \lambda_1 \geq 0 \\
&x_1(-3x_2 + 2x_1 + \lambda_1) = 0 \\
&-3x_1 + 2x_2 + \lambda_2 \geq 0 \\
&x_2(-3x_1 + 2x_2 + \lambda_2) = 0 \\
&x_1 \leq 1 \\
&\lambda_1(x_1 - 1) = 0 \\
&x_2 \leq 1 \\
&\lambda_2(x_2 - 1) = 0 \\
&\lambda_i \geq 0 \text{ per } i = 1,2 \\
&0 \leq x_i \text{ per } i = 1,2
\end{aligned}
$$

Con qualche semplice calcolo è possibile vedere che le uniche due soluzioni al precedente sistema sono i punti $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0,0)$ e $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (1,1,1,1)$. Questi due punti sono dunque *candidati* a essere punti di minimo di $-g(x_1, x_2)$, ovvero di massimo di $g(x_1, x_2)$. (Ricordiamo infatti che le condizioni di Karush Kuhn Tucker sono in generale condizioni *necessarie* di ottimo. In realtà, come potete vedere in figura, dove è graficata la funzione $g(x_1, x_2)$, il punto (unico) di massimo è proprio (1, 1)).

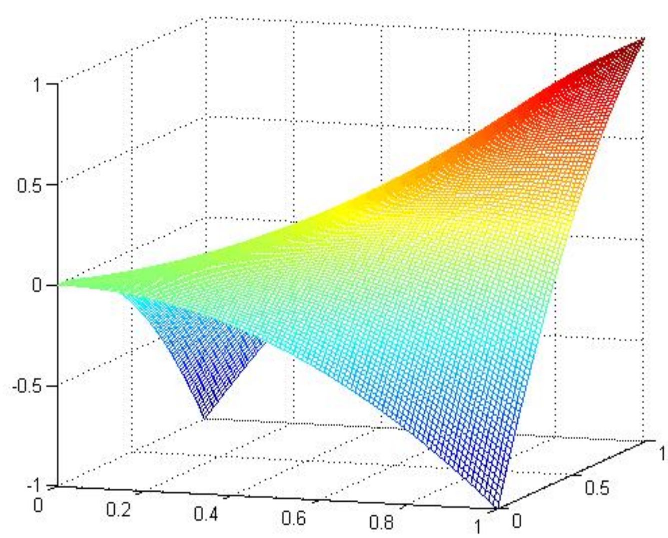

Figure 1: La funzione $g(x_1, x_2)$

Comunque, per quelli che sono i nostri scopi, il punto $(1,1)$ è un buon candidato a mostrare che $(0,0)$ non è ottimo secondo Pareto. Infatti, il payoff di entrambi i giocatori in corrispondenza al punto $(1,1)$ è $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Il punto $(0,0)$ non è quindi un ottimo debole secondo Pareto.

(b) Abbiamo che $c_1(x_1,x_2) = 2x_1x_2 - x_1$ e $c_2(x_1,x_2) = 2x_1x_2 - x_2$. In questo caso ciascun giocatore ha una funzione lineare nella propria variabile. In particolare se mettiamo in evidenza la variabile di ciascun giocatore otteniamo $c_1(x_1,x_2) = (2x_2-1)x_1$ e $c_2(x_1,x_2) = (2x_1-1)x_2$, da cui possiamo osservare che entrambe le funzioni sono rette che passano per l'origine il cui coefficiente angolare dipende dalla variabile dell'altro giocatore. In particolare, visto che vogliamo trovare il massimo di tali funzioni negli intervalli $x_1 \in [0,1]$ e $x_2 \in [0,1]$, siamo interessati al segno del coefficiente angolare. In conclusione le funzioni di best response per ciascun giocatore sono:

$$b_1(x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \{x_1 = 1\} & \text{se } x_2 > \frac{1}{2} \\ \{0 \leq x_1 \leq 1\} & \text{se } x_2 = \frac{1}{2} \\ \{x_1 = 0\} & \text{se } x_2 < \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$b_2(x_1) = \left\{ \begin{array}{ll} \{x_2 = 1\} & \text{se } x_1 > \frac{1}{2} \\ \{0 \leq x_2 \leq 1\} & \text{se } x_1 = \frac{1}{2} \\ \{x_2 = 0\} & \text{se } x_1 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Se anche in questo caso andiamo a risolvere i sistemi corrispondenti, analizzando tutti i possibili casi, troviamo che gli equilibri di Nash di questo gioco sono i vettori di strategie $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e $(1,1)$.
Dobbiamo adesso determinare se gli equilibri di Nash trovati sono anche ottimi deboli secondo Pareto. Chiaramente l'unico candidato tra i due equilibri ad essere ottimo debole secondo Pareto è il punto $(1,1)$. In questo caso l'analisi si rivela particolarmente semplice. Consideriamo infatti il giocatore 1; il suo payoff è $c_1(x_1,x_2) = (2x_2-1)x_1$ e cerchiamo di valutare il valore massimo che tale payoff può assumere. Visto che abbiamo una retta che passa per l'origine, vogliamo che il coefficiente angolare sia positivo e più grande possibile, ne consegue che $x_2 = 1$. Fissato x_2 pari a 1, il payoff è massimizzato per $x_1 = 1$, quindi c_1 è massimo per il vettore di strategie $(1,1)$. Ne consegue che $(1,1)$ è ottimo secondo Pareto, perché il giocatore 1 non è interessato a spostarsi da tale punto.

Appendice: Le condizioni di Karush Kuhn Tucker

Dato un problema di programmazione matematica nella forma

$$\min \quad f(x)$$

subject to

$$\begin{array}{ll} g_i(x) \leq 0 & i = \{1,\ldots,m\} \\ h_j(x) \leq 0 & j = \{1,\ldots,p\} \end{array}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $g_i \in C^1$ $\forall i = \{1,\ldots,m\}$, $h_j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $h_j \in C^1$ $\forall j = \{1,\ldots,p\}$.

Sotto opportune ipotesi di regolarità dei vincoli, condizione *necessaria* affinché un punto x sia punto di minimo del problema formulato è che esistano $\lambda : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $\mu : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ tali che (x,λ,μ) sia una *tripla di Karush Kuhn Tucker*.

Definiamo quindi $\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=i}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$ funzione lagrangiana associata al problema. Una tripla di Karush Kuhn Tucker è un vettore (x,λ,μ) che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{ll} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = 0 & \text{stazionarietà} \\ \lambda_i g_i(x,y) = 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\} & \text{complementarità} \\ g_i(x,y) \leq 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\}; h_j(x,y) = 0 \text{ per } j = \{1,\ldots,p\} & \text{ammissibilità} \\ \lambda_i \geq 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\} & \text{non negatività dei moltiplicatori} \end{array}$$

In particolare, se la funzione $f(x)$ è convessa e l'insieme definito dai vincoli $g(x) \leq 0$ e $h(x) = 0$ è convesso, allora le condizioni di Karush Kuhn Tucker sono necessarie e *sufficienti*, quindi un punto x

ammissibile è di minimo per f se e solo se esistono $\lambda : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $\mu : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ tali che (x, λ, μ) è una tripla di Karush Kuhn Tucker.

Vediamo ora un'interessante ed utile riformulazione delle condizioni di KKT nel caso in cui alcune delle variabili siano vincolate in segno. Siamo quindi interessati ad analizzare un problema di programmazione matematica del tipo:

$$\min \quad f(x)$$

subject to

$$\begin{array}{ll} g_i(x,y) \leq 0 & i = \{1,\ldots,m\} \\ h_j(x,y) \leq 0 & j = \{1,\ldots,p\} \\ x \geq 0 & \end{array}$$

dove abbiamo partizionato il vettore delle variabili in due parti. Indichiamo con x il vettore delle variabili non negative, con $x = (x_1,\ldots,x_k)$ e con y il vettore delle variabili libere, con $y = (x_{k+1},\ldots,x_n)$. È possibile dimostrare facilmente che le condizioni di KKT possono essere riformulate nella maniera seguente. Sia di nuovo $\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=i}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$:

$$\begin{array}{ll} \nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda,\mu) \geq 0;\ \nabla_y \mathcal{L}(x,y,\lambda,\mu) = 0 & \text{stazionarietà} \\ \lambda_i g_i(x,y) = 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\};\ x^T \nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda,\mu) = 0 & \text{complementarità} \\ g_i(x,y) \leq 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\}; h_j(x,y) = 0 \text{ per } j = \{1,\ldots,p\};\ x \geq 0 & \text{ammissibilità} \\ \lambda_i \geq 0 \text{ per } i = \{1,\ldots,m\} & \text{non negatività dei moltiplicatori} \end{array}$$

Si osservi che avremmo potuto utilizzare le condizioni di KKT generali, includendo i vincoli di non negatività nell'insieme dei vincoli $g_i(x) \leq 0$; in tal caso però sarebbe stato necessario introdurre un moltiplicatore per ogni variabile vincolata in segno. Con la riformulazione presentata invece non dobbiamo introdurre moltiplicatori per le variabili vincolate in segno, a patto di aggiungere una nuova condizione di complementarità e di modificare leggermente la condizione di stazionarietà.