Teoria dei Giochi – Prova del 21 Luglio 2011

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ______________________________

Esercizio 1 Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $C = \{1,2,3,4,5,6\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1,\dots,6$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

- Giocatore 1: $\{2,1,3,6,4,5\}$;
- Giocatore 2: $\{3,1,2,6,5,4\}$;
- Giocatore 3: $\{5,2,4,1,3,6\}$;
- Giocatore 4: $\{3,5,4,1,2,6\}$;
- Giocatore 5: $\{6,1,2,3,4,5\}$;
- Giocatore 6: $\{3,4,5,6,2,1\}$.

1.1 Dire se il matching $M = \{(1,2),(2,1),(3,5),(4,4),(5,6),(6,3)\}$ è una soluzione stabile rispetto alle coalizioni e certificare la risposta (n.b. dire che un matching è stabile perché lo è rispetto tutte le coalizioni, senza fornire prova di questo non è un certificato).

1.2 Dire se il matching $M = \{(1,5),(2,1),(3,2),(4,4),(5,6),(6,3)\}$ è una soluzione stabile rispetto alle coalizioni e certificare la risposta (n.b. dire che un matching è stabile perché lo è rispetto tutte le coalizioni, senza fornire prova di questo non è un certificato).

1.3 Si consideri ora un'istanza con n giocatori ed n case, assumendo che il giocatore $i-$esimo possieda la $i-$esima casa. Supponiamo che i giocatori forniscano tutti la stessa graduatoria. Come è fatto un matching stabile? Giustificare brevemente la risposta.

Soluzione Sappiamo che, per l'HAP, l'algoritmo TTCA restituisce l'unico matching presente nel nucleo del gioco. Di conseguenza, per verificare la stabilità di una soluzione rispetto le coalizioni possiamo verificare che questa sia quella ottenuta con il TTCA. In caso contrario, chiaramente, la soluzione non è stabile.

1.1 Il TTCA restituisce, in due iterazioni, il matching $M = \{(1,2),(2,1),(3,5),(4,4),(5,6),(6,3)\}$, quindi in questo caso la risposta è affermativa.

1.2 Il matching $M = \{(1,5),(2,1),(3,2),(4,4),(5,6),(6,3)\}$ non è stabile rispetto alle coalizioni, in quanto è diverso dal matching restituito dal TTCA, ovvero dal matching del punto 1.1. In alternativa, possiamo osservare come la coalizione costituita dal solo giocatore 1 non sia stabile, in quanto il giocatore peggiora la propria utilità.

1.3 L'unico matching stabile M è quello che assegna ad ogni giocatore i la propria casa i.

Infatti, assumiamo, senza perdità di generalità che la graduatoria comune sia $\{1,2,3,\dots,n-1,n\}$; il giocatore 1 sceglierà di tenere la propria casa e in nessun caso accetterà di modificare la sua scelta (altrimenti, la coalizione costituita dal solo giocatore 1 non sarebbe stabile). A questo punto, la cosa migliore che può fare il giocatore è tenere la propria casa, e in nessun caso accetterà di modificare la sua scelta (altrimenti, la coalizione costituita dal solo giocatore 2 non sarebbe stabile). Tale ragionamento può essere ripetuto induttivamente fino al giocatore n, che non potrà fare altro che tenere la propria casa.

Esercizio 2 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -4 \leq x_1 \leq 6\}$, quello del secondo giocatore è

$X_2 = \{x_2 : -3 \leq x_2 \leq 3\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = (1+3x_2)(2-x_1)$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1x_2 - 4x_2 + 3$.

2.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

2.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

2.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 2.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.
2.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \; (1+3x_2)(2-x_1)$$
$$-4 \leq x_1 \leq 6$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \; \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1x_2 - 4x_2 + 3$$
$$-3 \leq x_2 \leq 3$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -4 & \text{se } -3 \leq x_2 < -\frac{1}{3} \\ [-4,6] & \text{se } x_2 = -\frac{1}{3} \\ 6 & \text{se } -\frac{1}{3} < x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} 3 & \text{se } -4 \leq x_1 \leq \frac{1}{6} \\ 4-6x_1 & \text{se } \frac{1}{6} \leq x_1 \leq \frac{7}{6} \\ -3 & \text{se } \frac{7}{6} \leq x_1 \leq 6 \end{cases}$$

2.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esiste un solo punto di intersezione delle best response function il punto $(\frac{13}{18}, -\frac{1}{3})$, che è quindi l'unico equilibrio di Nash.

Esercizio 3 Nel consiglio comunale di un remoto comune di un paese sottosviluppato siedono 12 consiglieri. Questi consiglieri sono 11 uomini e una sola donna (la cosa non desti meraviglia: in fondo è solo il consiglio comunale di un remoto comune di un paese sottosviluppato). Per riequilibrare la cosa, un commissario sapiente riesce a imporre al consiglio comunale il seguente statuto: l'approvazione di una legge richiede il voto a favore di una maggioranza stretta di deputati (quindi, almeno 7) che comunque includa l'unico consigliere donna. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato con questo statuto (giustificare la risposta).

3.1 Piccato per l'interferenza del commissario, il consiglio decide di rivedere la propria composizione passando a un consiglio con 10 uomini e 2 donne. Il commissario impone quindi la seguente modifica allo statuto: l'approvazione di una legge richiede il voto a favore di una maggioranza stretta di deputati (quindi, almeno 7) che includa almeno un consigliere donna. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato con questo nuovo statuto (giustificare la risposta).

Soluzione Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato donna. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono tutte quelle in cui ella si trova in settima, ottava, ..., dodicesima posizione. Sappiamo che le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono $(12-1)!$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato donna è:

$$S_d(v) = \frac{6 \cdot 11!}{12!} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda i deputati uomini, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di ciascun deputato uomo è:

$$S_i(v) = \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{22}.$$

3.1 Prendiamo in considerazione un deputato donna. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono: tutte quelle in cui ella si trova in settima posizione; ottava e l'altro deputato donna non si trova nelle prime sette posizioni; nona e l'altro deputato donna non si trova nelle prime otto posizioni... undicesima e l'altro deputato donna non si trova nelle prime dieci posizioni. Segue:

$$S_i(v) = \frac{11! + 4 \cdot 10! + 3 \cdot 10! + 2 \cdot 10! + 10!}{12!} = \frac{11! + 10 \cdot 10!}{12!} = \frac{7}{44}.$$

Segue anche che il valore di Shapley di ciascun deputato uomo è:

$$S_i(v) = \frac{1}{10}\left(1 - 2 \cdot \frac{7}{44}\right) = \frac{3}{44}.$$

Il commissario non è riuscito a riequilibrare la composizione grottesca del consiglio comunale. Una commissaria forse ci sarebbe riuscita.

Esercizio 4 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono cinque: A, B, C, D, E; ciascun giocatore deve scegliere un numero dall'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

I cinque giocatori scelgono un numero e lo annunciano simultaneamente. Vince il gioco, o vincono il gioco, il giocatore (risp. i giocatori) che sceglie (risp. scelgono) il numero meno frequente. Per esempio: se A e B, annunciano 1, C annuncia 2, D annuncia 3, E annuncia 4, allora vincono C, D e E; se A, B e C annunciano 4 e D e E annunciano 3, allora vincono D e E; se A, B e D annuciano 4, E annuncia 5 e C annuncia 1, allora vincono E e C etc. Se tutti i giocatori annunciano numeri diversi, o annunciano tutti lo stesso numero, non ci sono vincitori. Nel caso ci siano vincitori, il meccanismo di payoff è il seguente: ogni giocatore che perde dà un euro a cisacun giocatore che vince.

Dire quali sono i punti di equilibrio di Nash, giustificando brevemente la risposta.

4.1 Considerare lo stesso esercizio precedente, ma nell'ipotesi in cui i 5 giocatori debbano scegliere un numero dall'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Dire quali sono i punti di equilibrio di Nash per questo nuovo gioco (non è richiesto di giustificare la risposta).

Soluzione L'unico equilibrio di Nash è quello in cui tutti i giocatori scelgono un numero diverso. Infatti, in questo caso non ci sono vincitori e un giocatore che provasse a cambiare unilateralmente la propria scelta perderebbe. In tutti gli altri casi c'è almeno un giocatore che perde, e che non perderebbe se potesse cambiare unilateralmente la propria scelta.

4.1 Gli equilibri di Nash sono quelli in cui ogni numero è scelto da almeno un giocatore, per esempio: (1,1,2,3,4); (1,2,1,3,4); (3,4,2,3,5) etc ovvero tutti quei casi in cui solo due giocatori scelgono uno stesso numero. Ci limitiamo a osservare che questi punti sono equilibri di Nash, il fatto che gli altri punti non lo siano può essere dimostrato con gli stessi argomenti utilizzati nella prima parte dell'esercizio. In particolare, se consideriamo per esempio il punto (1,1,2,3,4), osserviamo che il terzo, quarto e quinto giocatore non hanno interesse a cambiare unilateralmente la propria scelta perché perderebbero (mentre stanno vincendo), mentre il primo e secondo non hanno interesse a cambiare unilateralmente la propria scelta perché continuerebbero a perdere esattamente un euro