Teoria dei Giochi – Prova del 2 Dicembre 2011

Cognome, Nome, email: ______________________________

Esercizio 1 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 5 uomini e 5 donne. I seguenti insiemi ordinati rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna (sono quindi degli ordini totali):

- Uomo 1: $\{A,B,C,D,E\}$;
- Uomo 2: $\{B,C,D,E,A\}$;
- Uomo 3: $\{C,D,E,A,B\}$;
- Uomo 4: $\{D,E,A,B,C\}$;
- Uomo 5: $\{E,A,B,C,D\}$;
- Donna A: $\{3,2,4,1,5\}$;
- Donna B: $\{4,3,5,2,1\}$;
- Donna C: $\{5,4,1,3,2\}$;
- Donna D: $\{1,5,2,4,3\}$;
- Donna E: $\{2,1,3,5,4\}$;

1.1 Il matching $M = \{(1,A),(2,B),(3,C),(4,D),(5,E)\}$ è una soluzione stabile?
1.2 Il matching $M = \{(1,B),(2,C),(3,D),(4,A),(5,E)\}$ è una soluzione stabile?
1.3 Il matching $M = \{(1,C),(2,D),(3,E),(4,A),(5,B)\}$ è una soluzione stabile?
1.4 Il matching $M = \{(1,D),(2,E),(3,A),(4,B),(5,C)\}$ è una soluzione stabile?

(*Per ognuna delle precedenti risposte: in caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è necessario mostrare una coalizione rispetto alle quali M non è stabile*).

Soluzione 1.1 In questo caso M è stabile. Infatti ogni uomo fa coppia con la donna che è prima nella sua graduatoria, quindi non possono esistere coalizioni che rompono la stabilità di M.

1.2 In questo caso M non è stabile. Non è stabile rispetto le coalizioni $S_1 = (2,B)$, $S_2 = (3,C)$, $S_3 = (4,D)$.

1.3 In questo caso M è stabile. Possiamo verificarlo considerando tutte le 25 coalizioni formate da un uomo e una donna.

1.4 In questo caso M è stabile. Infatti ogni donna fa coppia con l' uomo che è primo nella sua graduatoria, quindi non possono esistere coalizioni che rompono la stabilità di M.

Esercizio 2 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -1 \leq x_1 \leq 4\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -2 \leq x_2 \leq 7\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = (4-2x_2)(1-x_1)$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2+3)+13$.

2.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

2.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

2.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 2.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.
2.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (4-2x_2)(1-x_1)$$
$$-1 \leq x_1 \leq 4$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2+3) + 13$$
$$-2 \leq x_2 \leq 7$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} 4 & \text{se } -2 \leq x_2 < 2 \\ [-1,4] & \text{se } x_2 = 2 \\ -1 & \text{se } 2 < x_2 \leq 7 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} x_1^2+3 & \text{se } -1 \leq x_1 \leq 2 \\ 7 & \text{se } 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

2.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esiste un solo punto di intersezione delle best response function il punto $(-1,4)$, che è quindi l'unico equilibrio di Nash.

Esercizio 3. Consideriamo il meccanismo d'asta in busta chiusa di primo prezzo per un bene conteso dai giocatori A,B,C,D,E, che rispettivamente attribuiscono al bene oggetto dell'asta valore 25, 20, 15, 10, 5. Supponiamo che l'offerta di ogni giocatore sia un numero reale non negativo (è l'ipotesi che implicitamente abbiamo assunto a lezione!). Supponiamo però di risolvere le situazioni di parità di offerta a favore del giocatore *ultimo* in ordine alfabetico.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se essa è vera o falsa (non è richiesto di giustificare la risposta "VERO", mentre la risposta "FALSO" va certificata con un controesempio; penalità per risposte errate).

- Non esiste un equilibrio di Nash in cui B vince l'asta. ☐ VERO ☐ FALSO
- Non esiste un equilibrio di Nash in cui non sia A a vincere l'asta. ☐ VERO ☐ FALSO
- Non esiste un equilibrio di Nash. ☐ VERO ☐ FALSO

Esercizio 3bis. Supponiamo ora che l'offerta di ogni giocatore debba essere un numero *intero* non negativo, lasciando invariato tutto il resto. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se essa è vera o falsa (non è richiesto di giustificare la risposta "VERO", mentre la risposta "FALSO" va certificata con un controesempio; penalità per risposte errate).

- Non esiste un equilibrio di Nash in cui B vince l'asta. ☐ VERO ☐ FALSO
- Non esiste un equilibrio di Nash in cui non sia A a vincere l'asta. ☐ VERO ☐ FALSO
- Non esiste un equilibrio di Nash. ☐ VERO ☐ FALSO

Soluzione 3 VERO: in un (qualunque) equilibrio di Nash B deve avere un'utilità non negativa, quindi deve offrire al più 20. Ma se B offre al più 20 e vince l'asta, allora A potrebbe offrire 20 + ε e vincere l'asta, migliorando la sua utilità da 0 a $5-\varepsilon$. Quindi non esiste un equilibrio di Nash in cui B vince l'asta. VERO: il ragionamento va come nel caso precedente, ma supponendo di volta in volta che sia C, o D, o E a vincere l'asta. VERO: dai punti precedenti segue che in un equilibrio di Nash è A a vincere l'asta. Ma questo non è possibile: per la regola adottata per risolvere le situazioni di parità, segue che A vince se e solo se la sua offerta, sia x, è strettamente maggiore della migliore tra le offerte degli altri giocatori, sia y. Ma poiché assumiamo che l'offerta di ogni giocatore sia un numero reale, allora A potrebbe migliorare il suo payoff offrendo $(x+y)/2$.

Soluzione 3bis VERO: in un (qualunque) equilibrio di Nash B deve avere un'utilità non negativa, quindi deve offrire al più 20. Ma se B offre al più 20 e vince l'asta, allora A potrebbe offrire 21 e vincere l'asta, migliorando la sua utilità da 0 a 4. Quindi non esiste un equilibrio di Nash in cui B vince l'asta. VERO: il ragionamento va come nel caso precedente, ma supponendo di volta in volta che sia C, o D, o E a vincere l'asta. FALSO: Il punto (21, 20, 20, 20 , 20) è un equilibrio di Nash (e non è l'unico).

Esercizio 4 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. I giocatori sono A e B. Ogni giocatore deve scegliere un numero, non necessariamente diverso da quello del suo avversario, dall'insieme di numeri $\{1,3,9,27,81,243\}$. Il giocatore A vince un euro se il numero da lui scelto è (strettamente) maggiore del numero scelto da B, oppure è esattamente 1/3 del numero scelto da B. In tutti gli altri casi A perde un euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che A e B devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risovere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per A:

- $\xi_1^i = \frac{1}{6}, \forall i = 1,\dots,6$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}; \xi_1^i = 0, \forall i = 3,\dots,6$
- $\xi_1^5 = \xi_1^6 = \frac{1}{2}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1,\dots,4$

e le seguenti strategie per B:

- $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j = 1,\dots,6$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \frac{1}{2}; \xi_2^j = 0, \forall j = 3,\dots,6$
- $\xi_2^5 = \xi_2^6 = \frac{1}{2}; \xi_2^j = 0, \forall j = 1,\dots,4.$

4.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

4.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

4.3 Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuare il valore del gioco, spiega perché non è possibile).

4.4 Indica se qualcuna di queste strategie è un equilibrio di Nash. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

Soluzione 4 La matrice C dei payoff in forma di costo per il primo giocatore è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{6} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1,\ldots,6$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{6}, \forall i = 1,\ldots,6$ è $z = \frac{2}{3}$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{2}{3}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$ e $\xi_1^i = 0, \forall i = 3,\ldots,6$ è $z = 1$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^5 = \xi_1^6 = \frac{1}{2}$ e $\xi_1^i = 0, \forall i = 1,\ldots,4$ è $z = 0$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{6} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1,\ldots,6$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,6$$

$$\sum_{j=1}^{6} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j = 1,\ldots,6$ è $w = -\frac{2}{3}$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{2}{3}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \frac{1}{2}$ e $\xi_2^j = 0, \forall j = 3,\ldots,6$ è $w = -1$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = 0, \forall j = 1,\ldots,4$ e $\xi_2^5 = \xi_2^6 = \frac{1}{2}$ è $w = 0$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = w(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0$ e quindi la strategia $(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è conservativa per il primo giocatore e la strategia $(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è conservativa per il secondo giocatore (e, ovviamente, le altre strategie non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è 0. Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 5 In un parlamento siedono 7 deputati. Di questi 5 provengono da una stessa regione A, uno proviene da una regione B, e uno proviene da una regione C. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della maggioranza dei deputati della regione A (cioè almeno 3 deputati della regione A), il voto del deputato della regione B e il voto del deputato della regione C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione 5 Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\#\text{ permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato della regione B. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono: 1) tutte quelle in cui egli si trova in settima posizione; 2) tutte quelle in cui egli si trova in sesta posizione e il deputato della regione C si trova in una delle prime 5 posizioni; 3) tutte quelle in cui egli si trova in quinta posizione e il deputato della regione C si trova in una delle prime 4 posizioni. Sappiamo che le permutazioni in cui il deputato della regione B si trova in una posizione fissata e il deputato della regione C in un'altra posizione fissata sono 5!. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato A è:

$$S_A(v) = \frac{6 \cdot 5! + 5 \cdot 5! + 4 \cdot 5!}{7!} = \frac{5}{14}.$$

Naturalmente il valore di Shapley del deputato della regione C è uguale a quello del deputato della regione B. Per quanto riguarda i deputati della regione A, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di un deputato della regione A è:

$$S_i(v) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{10}{14}\right) = \frac{2}{35}.$$