Teoria dei Giochi – Prova del 24 Febbraio 2012

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ______________________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{2,4,8,16,32,64,128\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{2,4,8,16,32,64,128\}$. Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario: se $x \geq y$ o $x = \frac{y}{2}$ vinci 1 euro, in tutti gli altri casi perdi un euro.

1.1 Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura* e determina eventuali strategie debolmente dominanti per il primo e il secondo giocatore.

1.2 D'ora in poi considera l'*estensione in strategia mista* del gioco. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{7}\ \forall i = 1,\dots,7$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{7}\ \forall j = 1,\dots,7$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

1.3 Qualcuna delle strategie indicate al punto 2.2 è conservativa? (Giustifica brevemente la risposta).

1.4 Quali sono gli equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarli, spiega perché non è possibile).

1.5 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiega perché non è possibile).

Soluzione

1.1 Giocare 64 e giocare 128 sono due strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, mentre giocare 128 è una strategia debolmente dominante per il secondo giocatore. Si osservi che l'incrocio di due strategie debolmente dominanti determina un equilibrio di Nash, quindi in particolare le coppie di strategie $(64,128)$ e $(128,128)$ rappresentano due equilibri di Nash per il gioco con strategie pure. In entrambi gli equilibri tu vinci un euro e il tuo avversario perde un euro.

1.2 La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{7} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{i=1}^{7} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{7}$ $\forall i = 1, \ldots, 7$ è $z = \frac{3}{7}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, (in media) $\frac{3}{7}$ di euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{7} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{j=1}^{7} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{7}$ $\forall j = 1, \ldots, 7$ è -1. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.

1.3 Gli equilibri di Nash in strategia pura sono (particolari) equilibri di Nash in strategia mista. Segue dal punto 1.1 che il valore del gioco è -1, quindi la strategia proposta per il tuo avversario è conservativa.

1.4 Gli equilibri di Nash in strategia mista, oltre a quelli indicati al punto 1.1, sono quelli in cui il primo giocatore gioca 64 o 128 e il secondo giocatore gioca la strategia proposta al punto 1.2. (Ci sono anche altri equilibri di Nash, quelli indicati erano quelli più facilmente deducibili dallo svolgimento dell'esercizio).

1.5 Come osservato precedentemente il valore del gioco è -1.

Esercizio 2 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -6 \leq x_1 \leq 2\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -2 \leq x_2 \leq 4\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(2x_2 - 4) + 7x_2$ e $C_2(x_1, x_2) = (3 - x_2)(1 - x_1)$.

2.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

2.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

2.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 2.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.
2.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(2x_2-4) + 7x_2$$
$$-6 \le x_1 \le 2$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (3-x_2)(1-x_1)$$
$$-2 \le x_2 \le 4$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -6 & \text{se } -2 \le x_2 \le -1 \\ 2x_2-4 & \text{se } -1 \le x_2 \le 3 \\ 2 & \text{se } 3 \le x_2 \le 4 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} 4 & \text{se } -6 \le x_1 < 1 \\ [-2,4] & \text{se } x_1 = 1 \\ -2 & \text{se } 1 < x_1 \le 2 \end{cases}$$

2.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esiste un solo punto di intersezione delle best response function il punto $(1, \frac{5}{2})$, che è quindi l'unico equilibrio di Nash.

Esercizio 3. Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1,2,3,4,5\}$ e $C = \{1,2,3,4,5\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1,\dots,5$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

- Giocatore 1: $\{2,5,3,4,1\}$;
- Giocatore 2: $\{3,4,5,2,1\}$;
- Giocatore 3: $\{4,5,1,2,3\}$;
- Giocatore 4: $\{3,4,1,2,5\}$;
- Giocatore 5: $\{3,4,1,5,2\}$.

3.1 Dire se il matching $M = \{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$ è una soluzione stabile rispetto alle coalizioni e giustificare la risposta (*per rispondere al quesito: se il matching è stabile, fornire una prova dell'affermazione; se il matching non è stabile fornire una coalizione che lo certifichi*).

3.2 Dire se il matching $M = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,3),(5,1)\}$ è una soluzione stabile rispetto alle coalizioni e giustificare la risposta (*per rispondere al quesito: se il matching è stabile, fornire una prova dell'affermazione; se il matching non è stabile fornire una coalizione che lo certifichi*).

3.3 Si consideri ora una qualsiasi istanza dell'House Allocation Problem con n giocatori ed n case. Che proprietà devono avere le graduatorie dei giocatori affinché l'algoritmo TTCA restituisca il matching stabile in una sola iterazione?

Soluzione

3.1 Il matching $M = \{(1,5),(2,3),(3,1),(4,2),(5,4)\}$ non è stabile; una possibile coalizione per certificarlo è $S_2 = \{3,5\}$, in quanto se i giocatori 3 e 5 si scambiassero le proprie case (qundi $M' = \{(3,5),(5,3)\}$), aumenterebbero entrambe la loro utilità rispetto alla casa assegnatagli da M.

3.2 Il TTCA restituisce, in due iterazioni, il matching $M = \{(1,2),(2,5),(3,4),(4,3),(5,1)\}$, quindi in questo caso la risposta è affermativa.

3.3 L'algoritmo restituisce il matching stabile in una sola iterazione se e solo se non esistono due giocatori diversi che hanno la stessa casa al primo posto in graduatoria (o, in modo euiqvalente, se ogni casa è al primo posto in graudatoria per qualche giocatore). Infatti se tale condizione è verificata, alla prima iterazione costruiamo un grafo diretto dove ogni componente è un ciclo orientato.

Esercizio 4 In un parlamento siedono 7 deputati. Di questi 3 provengono da una stessa regione A, 3 provengono da una regione B, e uno proviene da una regione C. L'approvazione di ogni legge richiede il voto di una maggioranza stretta dei deputati (cioè almeno 4 deputati) che includa almeno un deputato di ogni regione. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

4 bis. Supponete ora che per approvare una legge sia sufficiente che a suo favore voti almeno un deputato di ogni regione (non è più necessaria la maggioranza stretta dei deputati). Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione 4 Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato della regione C. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono: 1) tutte quelle in cui egli si trova in settima posizione; 2) tutte quelle in cui egli si trova in sesta posizione; 3) tutte quelle in cui egli si trova in quinta posizione; 4) tutte quelle in cui egli si trova in quarta e nelle prime 3 posizioni c'è almeno un deputato di A e almeno un deputato di B.

Sappiamo che le permutazioni in cui il deputato della regione C si trova in una posizione fissata sono 6!. Le permutazioni in cui il deputato della regione C si trova in quarta posizione mentre nelle prime 3 posizioni ci sono i 3 deputati di A o i 3 deputati di B sono $2(3! \cdot 3!)$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato della regione C è:

$$S_A(v) = \frac{4 \cdot 6! - 2(3! \cdot 3!)}{7!} = \frac{117}{210}.$$

Per quanto riguarda i deputati della regione A, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. E naturalmente il valore di Shapley di un deputato della regione A è uguale a quello di un deputato della regione B. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di un deputato della regione A (oppure B) è:

$$S_i(v) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{117}{210}\right) = \frac{31}{420}.$$

Soluzione 4bis

Osserviamo che per il deputato della regione C le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono le stesse del caso precedente più quelle in cui C è in terza posizione e nelle prime due posizioni ci sono un deputato di A e un deputato di B, che sono in numero $18 \cdot 4!$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato della regione C è:

$$S_C(v) = \frac{4 \cdot 6! - 2(3! \cdot 3!) + 18 \cdot 4!}{7!} = \frac{9}{14}.$$

Segue che il valore di Shapley di un deputato della regione A (oppure B) è:

$$S_i(v) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{9}{14}\right) = \frac{5}{84}.$$

Esercizio 5. In un palazzo vivono 10 famiglie. Sarebbe necessario provvedere a riparare l'ascensore, e per fare questo sono necessari 350 euro. Per non creare imbarazzi alle famiglie meno abbienti, nell'androne del palazzo viene lasciata una cassetta in cui ogni famiglia è invitata a lasciare 50 euro. Naturalmente l'ascensore sarà riparata se almeno 7 famiglie lasciano 50 euro. In realtà tutte le 10 famiglie dispongono di 50 euro, ma ognuna di loro è tentata di utilizzare i propri 50 euro per ridipingere la porta della propria casa.

Ognuna delle 10 famiglie ha quindi due opzioni: depositare i 50 euro nella cassetta oppure utilizzare i 50 euro per ridipingere la propria porta. Ovviamente, per ogni famiglia la soluzione migliore sarebbe avere l'ascensore funzionante *e* la porta ridipinta, ma dovendo scegliere, ogni famiglia comunque preferisce avere l'ascensore funzionante piuttosto che la porta ridipinta (e per semplicità assumiamo che i soldi depositati nella cassetta, se non sufficienti a riparare l'ascensore, non verranno restituiti). Si formuli questa situazione come un gioco e si determini se, quanti e quali equilibri di Nash ha tale gioco.

Soluzione 5 Gli unici equilibri di Nash del gioco sono quelli in cui esattamente 7 familglie depositano 50 euro nella cassetta e quelli in cui nessuna famiglia deposita 50 euro nella cassetta. In tutte le altre situazioni ogni famiglia che deposita 50 euro migliorerebbe il proprio payoff se decidesse (unilateralmente) di ritirare il deposito.