Teoria dei Giochi – Prova del 24 Luglio 2012

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ______________________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{6,7,8,9,10\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{3,4,5\}$. Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario: se x e y hanno un divisore comune diverso da 1 vinci una quantità di euro pari a $MCD(x,y)$ (dove MCD sta per *Massimo Comune Divisore*), in tutti gli altri casi perdi un euro.

1.1 Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1,\dots,5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = 0$
- $\xi_1^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^5 = \frac{2}{5}$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{3}\ \forall j = 1,\dots,3$
- $\xi_2^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^3 = \frac{2}{5}$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^3)$ il vettore stocastico associato alle 3 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

1.2 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.1 è conservativa? (Giustifica brevemente la risposta).

1.3 Quali sono gli equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarli, spiega perché non è possibile).

1.4 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiega perché non è possibile).

Soluzione La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{5} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1,\dots,3$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1,\dots,5$ è $z = -\frac{1}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{5}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = 0$ è $z = -\frac{1}{2}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^5 = \frac{2}{5}$ è $z = -\frac{7}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, in media $1,4$ euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1,\dots,5$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1,\dots,3$$

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{3}\ \forall j = 1,\dots,3$ è -2. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 2 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^3 = \frac{2}{5}$ è $-\frac{7}{5}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $1,4$ euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(3/5,0,0,0,2/5) = w(3/5,0,2/5)$ quindi la strategia $(3/5,0,0,0,2/5)$ è conservativa per te e la strategia $(3/5,0,2/5)$ è conservativa per il tuo avversario (e, le altre strategie, che restituiscono un payoff atteso diverso da $-1,4$, non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è $-1,4$. Infine, naturalmente, la coppie di strategie conservative individuate determina un equilibrio di Nash.

Esercizio 2 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -4 \leq x_1 \leq 6\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -5 \leq x_2 \leq 5\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1(4x_2+6)+3$ e $C_2(x_1,x_2) = (3+x_1)(4-x_2)$.

2.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

2.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

2.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 2.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.

2.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min x_1^2 - x_1(4x_2+6)+3$$
$$-4 \le x_1 \le 6$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (3+x_1)(4-x_2)$$
$$-5 \le x_2 \le 5$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -4 & \text{se } -5 \le x_2 \le -\frac{7}{2} \\ 2x_2+3 & \text{se } -\frac{7}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2} \\ 6 & \text{se } \frac{3}{2} \le x_2 \le 5 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} -5 & \text{se } -4 \le x_1 < -3 \\ [-5,5] & \text{se } x_1 = -3 \\ 5 & \text{se } -3 < x_1 \le 6 \end{cases}$$

2.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esistono tre punti di intersezione delle best response function (e quindi tre equilibri di Nash): $(-4,-5)$, $(6,5)$ e $(-3,-3)$.

Esercizio 3. Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti insiemi ordinati rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna:

- Uomo 1: $\{B,C,D,A\}$;
- Uomo 2: $\{B,C,A,D\}$;
- Uomo 3: $\{A,B,C,D\}$;
- Uomo 4: $\{C,A,D,B\}$.

- Donna A: $\{2,3,1,4\}$;
- Donna B: $\{2,3,4,1\}$;
- Donna C: $\{1,2,3,4\}$;
- Donna D: $\{4,1,2,3\}$.

3.1 Il matching $M = \{(1,D),(2,A),(3,B),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? *(In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta (+/-); in caso negativo, invece, mostrare **tutte** le coalizioni rispetto alle quali M non è stabile.)*

3.2 Il matching $M = \{(1,C),(2,B),(3,A),(4,D)\}$ è una soluzione stabile? *(In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta (+/-); in caso negativo, invece, mostrare **tutte** le coalizioni rispetto alle quali M non è stabile.)*

3.3 Il matching $M = \{(1,C),(2,D),(3,A),(4,B)\}$ è una soluzione stabile? *(In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta (+/-); in caso negativo, invece, mostrare **tutte** le coalizioni rispetto alle quali M non è stabile.)*

Soluzione

3.1 In questo caso M non è stabile. Non è stabile rispetto le coalizioni $S_1 = (1,C)$, $S_2 = (2,B)$, $S_3 = (2,C)$.

3.2 In questo caso M è stabile. La cosa può essere verificata esaminando tutte le coalizioni formate da un uomo e una donna, oppure verificando che questo matching è quello restituito dall'algoritmo di Gale-Shapley partendo dagli uomini.

3.3 In questo caso M non è stabile. Non è stabile rispetto le coalizioni $S_1 = (2,A)$, $S_2 = (2,B)$, $S_3 = (4,D)$.

Esercizio 4 In un parlamento siedono 9 deputati. Di questi, 4 provengono da una stessa regione A, 4 provengono da una regione B, e uno proviene da una regione C. L'approvazione di ogni legge richiede il voto di una maggioranza stretta dei deputati (cioè almeno 5 deputati) che includa il deputato della regione C.

E' possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo? (Se non è possibile, spiegare perché.) In caso affermativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

4 bis. Supponete ora che il parlamento decida di modificare la regola di approvazione di una legge, in modo tale che l'approvazione di ogni legge richieda il voto di una maggioranza stretta dei deputati (cioè almeno 5 deputati) oppure il voto di una qualunque coalizione che includa il deputato della regione C (per esempio, la coalizione formata dal solo deputato proveniente dalla regione C è in grado di far approvare una legge).

E' possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo? (Se non è possibile, spiegare perché.) In caso affermativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato proveniente dalla regione C. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono tutte quelle in cui questi si trova in quinta, sesta, settima, ottava, e nona posizione. Sappiamo che le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono $(9-1)!$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato della regione C è:

$$S(v) = \frac{5 \cdot 8!}{9!} = \frac{5}{9}.$$

Per quanto riguarda i deputati della regioni A e B , essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di ciascuno di questi deputati è:

$$S(v) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{1}{18}.$$

4 bis. In questo caso il gioco non è un gioco cooperativo: per esempio, la coalizione formata da tutti i deputati delle regioni A e B ha valore 1 e la coalizione formata dal solo deputato della regione C ha anch'essa valore 1. Ma questo contraddice la condizione $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$, se $S, T \subseteq N$ sono tali che $S \cap T = \emptyset$.

Esercizio 5. Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono sette, e ciascun giocatore deve scegliere una lettera dell'alfabeto italiano (21 lettere). Le lettere scelte vengono annunciate simultaneamente.

Se tutti i giocatori scelgono una vocale, o se tutti i giocatori scelgono una consonante, non ci sono vincitori. Se un solo giocatore sceglie una consonante, allora questo giocatore vince il gioco e riceve un euro da ciascuno degli altri 6 giocatori. In tutti gli altri casi – ovvero, detto Q l'insieme dei giocatori che scelgono una vocale, in tutti i casi in cui $1 \leq |Q| \leq 5$ –, ciascun giocatore che sceglie una vocale riceve un euro da ciascun giocatore che sceglie una consonante.

Dire per quali valori di $|Q|$ si ha un equilibrio di Nash, giustificando la risposta in modo dettagliato.

Soluzione L'unico equilibrio di Nash è quello in cui un solo giocatore sceglie una consonante. Infatti:

- se $|Q| = 0$, allora ciascun giocatore avrebbe interesse a scegliere invece una vocale perché il suo payoff (in forma di utilità) passerebbe da 0 a 6;
- se $1 \leq |Q| \leq 4$, allora ciascun giocatore, che ha scelto una consonante, avrebbe interesse a scegliere invece una vocale perché il suo payoff passerebbe da $-|Q|$ a $7-(|Q|+1)$;
- se $|Q| = 5$, allora ciascun giocatore, che ha scelto una consonante, avrebbe interesse a scegliere invece una vocale perché il suo payoff passerebbe da -5 a -1;
- se $|Q| = 6$, allora nessun giocatore ha interesse a cambiare la sua scelta e siamo in un equilibrio di Nash;
- se $|Q| = 7$, allora ciascun giocatore avrebbe interesse a scegliere invece una consonante perché il suo payoff passerebbe da 0 a 6.