Teoria dei Giochi – Prova del 28 Settembre 2012

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ____________________

Esercizio 1. Considera il seguente gioco non cooperativo. È data una rete con insieme dei nodi $V = \{s, x_1, x_2, y, t\}$ e insieme degi archi $E = \{a_1 = (s, x_1), a_2 = (s, x_2), b_1 = (x_1, y), b_2 = (x_2, y), c_1 = (y, t), c_2 = (y, t), c_3 = (y, t), d_1 = (x_1, t), d_2 = (x_2, t)\}$ (si noti che gli archi c_1, c_2 e c_3 sono "paralleli").

Ci sono quattro giocatori: A, B, C, D. Il giocatore A controlla gli archi a_1 e a_2, il giocatore B controlla gli archi b_1 e b_2, il giocatore C controlla gli archi c_1, c_2 e c_3, il giocatore D controlla gli archi d_1 e d_2. Ciascun giocatore sceglie uno degli archi che controlla, che hanno il seguente costo: gli archi a_1, b_1 e c_1 costano 5, gli archi a_2 e d_2 costano 2, gli archi b_2, d_1, c_2 e c_3 costano 15. Se i quattro archi scelti inducono un cammino da s a t, allora ciascun giocatore ottiene 8 unità (n.b. questo vale anche per un eventuale giocatore che abbia scelto un arco che non appartiene ad alcun cammino da s a t). Se invece gli archi scelti non contengono alcun cammino da s a t, allora ciascun giocatore ottiene 0.

Il payoff di ciascun giocatore (in forma di costo) è quindi pari al costo dell'arco scelto, se gli archi scelti non inducono un cammino da s a t; altrimenti è pari al costo dell'arco scelto meno 8.

Dire quali delle possibili stati del gioco è un equilibrio di Nash, giustificando la risposta in modo dettagliato.

Soluzione Ci sono 24 stati possibili. Nessuno degli stati che contiene b_2, c_2, c_3 o d_1 determina un equilibrio di Nash, perché questi archi costano 15 e quindi un giocatore che ne avesse scelto uno pagherebbe almeno 15-8= 7, e poiché il costo di ogni altro arco è minore di 7 avrebbe in ogni caso convenienza a cambiare. Rimangono quindi da esaminare 2 stati. Gli stati (a_1, b_1, c_1, d_2) e (a_2, b_1, c_1, d_2). Il primo stato non è un equilibrio di Nash perché il primo giocatore migliorerebbe il proprio payoff cambiando la propria strategia. Il secondo stato, come è facile verificare, è l'unico equilibrio di Nash.

Esercizio 2. Considera il seguente gioco non cooperativo. È data una rete con insieme dei nodi $V = \{s, x_1, x_2, t\}$ e insieme degi archi $E = \{a_1 = (s, x_1), a_2 = (x_1, x_2), a_3 = (x_1, x_2), a_4 = (x_2, t), a_5 = (x_2, t)\}$ (si noti che gli archi a_2 e a_3, e gli archi a_4 e a_5 sono "paralleli").

Ogni giocatore controlla un arco (abbiamo quindi 5 giocatori: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$) e l'utilità di una coalizione è 1 se e solo se nel grafo indotto dagli archi controllati dai giocatori della coalizione esiste un cammino da s a t; altrimenti l'utilità della coalizione è 0.

Il gioco cosi definito è cooperativo? (Se non lo è, spiegare perché.) In caso affermativo, determinare il valore di Shapley di ciascun giocatore, giustificando la risposta.

Soluzione Il gioco è cooperativo. Inoltre è del tutto equivalente a un gioco "parlamentare" in cui ci sono 5 giocatori: uno proveniente da una regione A, due provenienti da una regione B e due provenienti da una regione C, e in cui l'approvazione di una legge richiede il voto a favore di almeno un deputato di ogni regione. La analisi del gioco mostra che il valore di Shapley del giocatore della regione A è pari a $\frac{8}{15}$, mentre il valore di Shapley di tutti gli altri giocatori è pari a $\frac{7}{60}$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1, \dots, 8$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

- Giocatore 1: $\{2, 7, 3, 4, 8, 6, 5, 1\}$;
- Giocatore 2: $\{2, 3, 8, 7, 5, 1, 4, 6\}$;
- Giocatore 3: $\{4, 2, 3, 7, 8, 1, 6, 5\}$;
- Giocatore 4: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

- Giocatore 5: $\{4,7,1,3,6,5,2,8\}$;
- Giocatore 6: $\{5,3,8,1,4,2,7,6\}$;
- Giocatore 7: $\{2,4,3,5,8,1,7,6\}$;
- Giocatore 8: $\{3,1,2,7,4,5,6,8\}$.

3.1 Trovare il matching stabile utilizzando il TTCA (*fornire una breve descrizione di ogni iterazione*).

3.2 Esiste un matching che non è stabile rispetto la coalizione $S = \{6,7\}$? (In caso affermativo, esibire un tale matching)

3.3 Si consideri ora un'istanza dell'HAP con 6 giocatori e 6 case. Si forniscano delle graduatorie per i vari giocatori tali che il TTCA richieda **almeno due iterazioni** per fornire il matching (stabile) $M = \{(1,5),(2,6),(3,1),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

Soluzione 3.1 L'algoritmo TTCA restituisce, in cinque iterazioni, il seguente matching:
$M = \{(1,7),(2,2),(3,3),(4,1),(5,6),(6,5),(7,4),(8,8)\}$.

3.2 Innanzitutto osserviamo che le possibili allocazioni "interne" per la coalizione $\{6,7\}$ sono due: ciascuno dei 2 giocatori rimane nella proprio casa, oppure i due gocatori si scambiano le case. Sia ora M un matching qualsiasi. Se M assegna ad almeno uno dei giocatori 6 e 7 una casa dall'insieme $\{1,2,3,4,5,8\}$, allora questo giocatore preferisce la casa che gli assegna M a quella che ciascuna delle due possibili allocazioni interne della coalizione $\{6,7\}$ potrebbe assegnargli: quindi M è stabile. Consideriamo quindi il caso di un matching M che assegni ai due giocatori 6 e 7 le case dell'insieme $\{6,7\}$: si noti che M assegna ai giocatori $\{6,7\}$ le case secondo una delle due possibili allocazioni interne. Per cui M potrebbe non essere stabile rispetto la coalizione $S = \{6,7\}$ solo se l'*altra* coalizione interna assegnasse ad entrambi i giocatori una casa non peggiore di quella assegnatagli da M, e ad almeno uno dei due una casa migliore: ma questo non è possibile perché entrambi preferiscono la casa 7. Quindi non esiste alcun matching non stabile rispetto alla coalizione $S = \{6,7\}$.

3.3 Una possibile soluzione è:

- Giocatore 1: $\{5,\dots\}$;
- Giocatore 2: $\{5,6,\dots\}$;
- Giocatore 3: $\{1,\dots\}$;
- Giocatore 4: $\{5,4\dots\}$;
- Giocatore 5: $\{3,\dots\}$;
- Giocatore 6: $\{5,2,\dots\}$.

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -2 \le x_1 \le 5\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -3 \le x_2 \le 5\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = (7+x_1)(2-x_2)$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2 - 4x_1) + 16$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best responses, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

4.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 4.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (7+x_1)(2-x_2)$$
$$-2 \leq x_1 \leq 5$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2-4x_1)+16$$
$$-3 \leq x_2 \leq 5$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -2 & \text{se } -3 \leq x_2 < 2 \\ [-2,5] & \text{se } x_2 = 2 \\ 5 & \text{se } 2 < x_2 \leq 5 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} 5 & \text{se } -2 \leq x_1 \leq -1 \\ x_1^2-4x_1 & \text{se } -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -3 & \text{se } 1 \leq x_1 \leq 3 \\ x_1^2-4x_1 & \text{se } 3 \leq x_1 \leq 5 \end{cases}$$

4.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esistono tre punti di intersezione delle best response function (e quindi tre equilibri di Nash): $(5,5)$, $(2+\sqrt{6},2)$ e $(2-\sqrt{6},2)$.

Esercizio 5 Considera il seguente gioco. Tu puoi scegliere una lettera tra $\{A,E,I,O,U\}$; il tuo avversario può scegliere una parola tra $\{CANE, GATTO, FLUSSO, PESO, CUBI\}$. Se la parola giocata dal tuo avversario contiene la lettera da te scelta allora perdi 1 euro, altrimenti vinci 1 euro.

5.1 Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^5 = \frac{1}{3}$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$.
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^4 = \frac{1}{5}$, $\xi_1^3 = \frac{2}{5}$ e $\xi_1^5 = 0$.
- $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^2 = \xi_1^5 = \frac{1}{2}$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{5}\ \forall j = 1,\dots,5$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^4 = \frac{1}{5}$, $\xi_2^3 = 0$ e $\xi_2^5 = \frac{2}{5}$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^5)$ il vettore stocastico associato alle 3 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

5.2 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.1 è conservativa? (Giustifica brevemente la risposta).

5.3 Quali sono gli equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarli, spiega perché non è possibile).

5.4 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiega perché non è possibile).

Soluzione La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{5} c_{ij} \xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 5$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^5 = \frac{1}{3}$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$. è $z = \frac{1}{3}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, perdi, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{3}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^4 = \frac{1}{5}$, $\xi_1^3 = \frac{2}{5}$ e $\xi_1^5 = 0$ è $z = -\frac{1}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{5}$ euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^2 = \xi_1^5 = \frac{1}{2}$ è $z = 0$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{5} c_{ij} \xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{j=1}^{5} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{5}$ $\forall j = 1,\dots,5$ è $-\frac{3}{5}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{3}{5}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^4 = \frac{1}{5}$, $\xi_2^3 = 0$ e $\xi_2^5 = \frac{2}{5}$ è $-\frac{1}{5}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{5}$ di euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(1/5,1/5,2/5,1/5,0) = w(1/5,1/5,0,1/5,2/5)$ quindi la strategia $(1/5,1/5,2/5,1/5,0)$ è conservativa per te e la strategia $(1/5,1/5,0,1/5,2/5)$ è conservativa per il tuo avversario (e, le altre strategie che restituiscono un payoff atteso diverso da $-\frac{1}{5}$ non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è $-\frac{1}{5}$. Infine, naturalmente, la coppia di strategie conservative individuate determina un equilibrio di Nash.