Teoria dei Giochi – Prova del 30 Novembre 2012

Cognome, Nome, Corso di Laurea, email: ______________________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{3,4,8,16,38\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{2,12,24,19\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Il primo giocatore vince un euro se $x > y$ e y non è un divisore di x, oppure se $x < y$ ma x è un divisore di y. (Analogamente, il secondo giocatore vince un euro se $x < y$ e x non è un divisore di y, oppure se $x > y$ ma y è un divisore di x.)

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

1.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo giocatore, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

1.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

1.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore

- $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1,\dots,5$

e la seguente strategia per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

1.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

1.5 Esistono equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

1.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Soluzione

1.1 Giocare 3 è una strategia debolmente dominante per il primo giocatore; giocare 19 è una strategia debolmente dominante per il secondo giocatore.

1.2 $(3,19),(4,19),(8,19),(16,19),(38,19)$ sono tutti gli equilibri di Nash del gioco in strategia pura.

Poiché il gioco è un gioco antagonistico, il valore dei payoff nei punti di equilibrio di Nash deve essere lo stesso ed è pari al valore del gioco, in questo caso pari a 1. Si ricordi che, in generale, non è detto che un gioco antagonistico in strategia *pura* ammetta un equilibrio di Nash e abbia quindi un valore.

1.3 La matrice C dei payoff per il primo giocatore (in forma di costo) è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{5} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1,\ldots,4$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1,\ldots,5$ è $z = 1$. Quindi, se il primo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1,\ldots,5$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,4$$

$$\sum_{j=1}^{4} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\ldots,4$ è $w = -\frac{1}{2}$. Quindi, se il secondo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.

1.4 - 1.6 Abbiamo visto al punto 1.1 che giocare 3 è una strategia debolmente dominante per il primo giocatore e giocare 19 è una strategia debolmente dominante per il secondo giocatore. Sappiamo che una strategia debolmente dominante pura è anche una strategia debolmente dominante mista. Quindi segue che (1,0,0,0,0) è una strategia debolmente dominante mista per il primo giocatore e (0,0,0,1) è una strategia debolmente dominante mista per il secondo giocatore. Poiché, per qualunque gioco, una strategia debolmente dominante è anche una strategia conservativa, segue che (1,0,0,0,0) è una strategia conservativa mista per il primo giocatore e (0,0,0,1) è una strategia conservativa per il secondo giocatore.

Inoltre, poiché un equilibrio di Nash puro è anche un equilibrio di Nash misto, tutti gli equilibri di Nash indicati al punto 1.2 sono equilibri di Nash per il gioco misto (naturalmente dovremmo esprimerli come vettori di probabilità).

Infine, segue banalmente che il gioco misto ha lo stesso valore del gioco puro che è pari a 1. Possiamo concludere quindi che per il gioco *misto*:

- Il gioco misto ha valore 1.

- Oltre alla strategia conservative (1,0,0,0,0) per il primo giocatore e (0,0,0,1) per il secondo giocatore, anche (1/5,1/5,1/5,1/5,1/5) è una strategia conservativa per il primo giocatore. Infatti, se il primo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) proprio 1, il valore del gioco.

- Oltre a tutti gli equilibri di Nash individuati al punto 1.2, poiché in ogni caso l'incrocio di strategie conservative determina sempre un equilibrio di Nash, è un equilibrio di Nash in strategia mista anche il punto ((1/5,1/5,1/5,1/5,1/5), (0,0,0,1)).

Esercizio 2 In un parlamento siedono 10 deputati. Di questi, 8 provengono da una stessa regione A mentre 2 provengono da una stessa regione B. Una legge può essere approvata se e solo se a suo favore votano gli 8 deputati di A (più eventualmente qualche deputato di B) oppure i 2 deputati di B e *almeno* un deputato di A.

2.1 Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

2.2 Supponete ora che una legge possa essere approvata anche dai soli deputati di B. Ovvero una legge è approvata se e solo se a suo favore votano gli 8 deputati di A (più eventualmente qualche deputato di B) oppure i 2 deputati di B (più eventualmente qualche deputato di A). Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

Soluzione 2 Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge, ed è 0 altrimenti. Osserviamo che vale la superadditività in quanto le coalizioni che sono in grado di far approvare una legge (ovvero, a valore uno) sono tutte quelle che contengono gli 8 deputati di A o che contengono entrambi i deputati di B e almeno un deputato di A: non esistono dunque due coalizioni disgiunte a valore 1.

Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato i proveniente dalla regione A. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono alcune di quelle in cui il deputato si trova in nona, ottava o terza posizione. In particolare, se si trova in nona posizione, sono vincenti le coalizioni in cui in decima posizione c'èun deputato della regione B. Invece, se si trova in nona posizione, sono vincenti le coalizioni in cui in nona e decima posizione ci sono i deputati della regione B. Infine, se si trova in terza posizione, sono vincenti le coalizioni in cui in prima e seconda posizione ci sono i deputati della regione B.

Siano b_1 e b_2 i giocatori provenienti dalla regione B. Sappiamo che le permutazioni in cui il deputato i si trova in nona posizione e il deputato b_1 si trova in decima posizione sono 8!; analogamente le permutazioni in cui il deputato i si trova in nona posizione e il deputato b_2 si trova in decima posizione sono 8!. Inoltre, le permutazioni in cui il deputato i si trova in ottava posizione, il deputato b_1 si trova in nona posizione e il deputato b_2 si trova in decima posizione sono 7!; analogamente le permutazioni in cui il deputato i si trova in ottava posizione, il deputato b_2 si trova in nona posizione e il deputato b_1 si trova in decima posizione sono 7!. Infine, è immediato vedere che le permutazioni in cui il deputato i si trova in terza posizione, il deputato b_1 si trova in prima posizione e il deputato b_2 si trova in seconda posizione sono 7!; analogamente le permutazioni in cui il deputato i si trova in terza posizione, il deputato b_2 si trova in prima posizione e il deputato b_1 si trova in seconda posizione sono 7!.

Quindi il valore del deputato i è pari a $\frac{8!+8!+7!+7!+7!+7!}{10!} = \frac{8+8+1+1+1+1}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{20}{720} = \frac{1}{36}$: quindi il potere di ciascun deputato della regione A è $\frac{1}{36}$.

Per quanto riguarda il generico deputato della regione B, possiamo concludere che il suo valore di Shapley è:

$$S(v) = \frac{1}{2}\left(1 - 8 \cdot \frac{1}{36}\right) = \frac{7}{18}.$$

2.2 Non vale la superadditività. Esistono due coalizioni disgiunte in grado di far approvare una legge (ovvero, a valore uno): la coalizione che contiene i soli 8 deputati di A e la coalizione che contiene i soli 2 deputati di B.

Esercizio 3. Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1,\dots,8$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

- Giocatore 1: $\{2,1,3,4,5,6,7,8\}$;
- Giocatore 2: $\{8,1,5,4,6,3,2,7\}$;
- Giocatore 3: $\{1,4,6,8,5,2,3,7\}$;
- Giocatore 4: $\{1,2,8,6,3,5,4,7\}$;
- Giocatore 5: $\{3,8,7,6,5,4,2,1\}$;
- Giocatore 6: $\{4,6,8,7,5,2,1,3\}$;
- Giocatore 7: $\{5,8,2,6,3,4,7,1\}$;
- Giocatore 8: $\{2,7,6,3,1,4,5,8\}$.

3.1 Trovare il matching stabile utilizzando il TTCA (*fornire una breve descrizione di ogni iterazione*).

3.2 Il matching $M = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,1),(5,8),(6,3),(7,5),(8,7)\}$ è stabile rispetto alla coalizione $S = \{5,6,7\}$? (Giustificare brevemente la risposta.)

3.3 Il matching $M = \{(1,3),(2,1),(3,6),(4,5),(5,8),(6,7),(7,2),(8,4)\}$ è stabile rispetto alla coalizione $S = \{1,3,4\}$? (Giustificare brevemente la risposta).

3.4 Esiste un matching che non è stabile rispetto la coalizione $S = \{2,3\}$? (In caso affermativo, esibire un tale matching; in caso negativo, giustificare brevemente la risposta.)

Soluzione 3.1 L'algoritmo TTCA restituisce, in cinque iterazioni, il seguente matching:
$M = \{(1,1),(2,8),(3,5),(4,6),(5,3),(6,4),(7,7),(8,2)\}$.

3.2 È stabile perché in qualunque soluzione "interna" adottata dai giocatori della coalizione S, il giocatore 5 peggiorerebbe la propria utilità, dato che preferisce la casa assegnatagli da M alle case $\{5,6,7\}$.

3.3 Non è stabile perché i giocatori della coalizione S potrebbero adottare la soluzione "interna" $\overline{M}_S = \{(1,1),(3,4),(4,3)\}$, quindi tutti i giocatori migliorerebbero la propria utilità.

3.4 Un matching M non è stabile rispetto la coalizione $\{2,3\}$ se (e solo se):

- M assegna al giocatore 2 la casa 2 e al giocatore 3 la casa 3;
- oppure M assegna al giocatore 2 la casa 7 e al giocatore 3 o la casa 2 o la casa 3;
- oppure M assegna al giocatore 3 la casa 7 e al giocatore 2 o la casa 2 o la casa 3.

Esercizio 4. Si consideri una istanza del facility location game con 5 giocatori $\{A,B,C,D,E\}$ che vogliono connettersi a un'*unica* facility F. Il costo di apertura della facility è $f_F \in \mathcal{R}_+$, mentre il costo di connessione di ciascun giocatore alla facility è pari a $c_{IF} \in \mathcal{R}_+$, con $I \in \{A,B,C,D,E\}$.

È vero che il nucleo del gioco è sempre non vuoto? In caso affermativo, fornire una soluzione nel nucleo (senza giustificare la risposta); in caso negativo spiegare brevemente perché in alcuni casi il nucleo sarà vuoto.

Soluzione Il nucleo è sempre non vuoto. È immediato vedere che la soluzione che assegna a ogni giocatore i il payoff $c_{IF} + \frac{f_F}{5}$ è nel nucleo. (Intuitivamente, ogni soluzione in cui ciascun giocatore paga il proprio costo di connessione e tutti i giocatori si dividono in qualche modo il costo dell'unica facility va bene: essendoci una sola facility, non capita mai che la soluzione ottima paghi per aprire una facility che è conveniente solo per alcuni giocatori “disagiati”, e quindi non capita mai che gli altri giocatori trovino conveniente rompere la grande coalizione).

Esercizio 5 Considera il seguente gioco non cooperativo. È dato un grafo orientato G con insieme dei nodi $N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e insieme degi archi $A = \{(v_i, v_{i+1}), 1 \le i \le n\}$ (con la convenzione che $v_{n+1} \equiv v_1$), ovvero G è un ciclo orientato con n nodi.

Ci sono n giocatori: ogni giocatore controlla un nodo (quindi l'insieme dei giocatori coincide con l'insieme dei nodi). Ogni giocatore v_i ha a disposizione due strategie: la strategia A e la strategia B. Per determinare il payoff di ciascun giocatore utilizziamo il seguente meccanismo: ogni giocatore v_i, $1 \le i \le n$, dà un euro al giocatore v_{i+1} se e solo se v_i e v_{i+1} hanno scelto una strategia diversa. Naturalmente il payoff del giocatore v_i sarà determinato da quello che egli/ella eventualmente dà al giocatore v_{i+1} e da quello che egli/ella eventualmente riceve dal giocatore v_{i-1} (con la convenzione che $v_{n+1} \equiv v_1$ e che $v_0 \equiv v_n$).

5.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il generico giocatore v_i, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

5.2 Si supponga ora che n sia un numero dispari. Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

5.3 Si supponga ora che n sia un numero pari. Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

Soluzione Non esistono strategie debolmente dominanti: per esempio, se il giocatore $i-1$ è nella classe A e il giocatore $i+1$ è nella classe B, allora per il giocatore i la migliore risposta è la strategia B; viceversa, se il giocatore $i-1$ è nella classe B e il giocatore $i+1$ è nella classe A, allora per il giocatore i la migliore risposta è la strategia A.

5.2-5.3 Il generico giocatore i non è interessato a modificare la propria strategia (qualunque essa sia !) se il giocatore $i-1$ e il giocatore $i+1$ scelgono la stessa strategia. Quindi sono equilibri di Nash quelli in cui tutti i giocatori scelgono la stessa strategia: $(A, A, \ldots, A)$ e $(B, B, \ldots, B)$. Sono inoltre equilibri di Nash quelli in cui, per ogni i, il giocatore e il giocatore $i+1$ scelgono strategia diversa: questo è possibile solo per n pari.

È facile verificare che gli altri stati non conducono ad equilibri di Nash. Quindi, riepilogando: se n è dispari gli equilibri di Nash sono due: $(A, A, \ldots, A)$ e $(B, B, \ldots, B)$. Se n è pari gli equilibri di Nash sono quattro: $(A, A, \ldots, A)$, $(B, B, \ldots, B)$, $(A, B, A, B, \ldots, A, B)$ e $(B, A, B, A, \ldots, B, A)$.