Teoria dei Giochi – Prova del 3 Dicembre 2014

Cognome, Nome, email, numero di matricola: ______________________________

Esercizio 1 Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1,\dots,8$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

Giocatore 1: $\{2,6,7,4,3,1,8,5\}$;
Giocatore 2: $\{7,5,6,1,2,3,4,8\}$;
Giocatore 3: $\{2,5,6,1,4,7,3,8\}$;
Giocatore 4: $\{2,7,6,1,3,4,5,8\}$;
Giocatore 5: $\{7,6,5,4,3,2,1,8\}$;
Giocatore 6: $\{7,2,6,3,5,4,1,8\}$;
Giocatore 7: $\{7,3,5,6,4,2,1,8\}$;
Giocatore 8: $\{3,1,2,4,5,6,7,8\}$.

1.1 Trovare il matching stabile utilizzando il TTCA (*fornire una breve descrizione di ogni iterazione*).

1.2 Il matching $M = \{(1,3),(2,5),(3,4),(4,1),(5,6),(6,2),(7,7),(8,8)\}$ è stabile rispetto alla coalizione $S = \{1,3,4\}$? (Giustificare brevemente la risposta.)

Soluzione

1.1 Il TTCA fornisce in cinque iterazioni il matching stabile $M = \{(1,4),(2,5),(3,3),(4,1),(5,6),(6,2),(7,7),(8,8)\}$

1.2 Il matching considerato non è stabile rispetto alla coalizione $S = \{1,3,4\}$. Infatti, nel considerare i diversi modi in cui questi tre giocatori possono coalizzarsi, notiamo come al giocatore 4 debba per forza essere assegnata la casa 1 così che la sua utilità non peggiori; a questo punto possiamo o assegnare le case a 3 e ad 1 come fatto dal matching M, caso nel quale nessun giocatore migliorerebbe la propria utilità , oppure assegniamo la casa 4 al giocatore 1 e la casa 3 al giocatore 3, ma in tal caso il giocatore 3 avrebbe un utilità peggiore. Segue che M è stabile rispetto ad S.

Esercizio 2 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di costo, dove a è un qualunque numero intero (positivo o negativo):

		Giocatore 2		
		A	B	C
Giocatore 1	D	$8,4$	$3,4$	$5,6$
	E	$1,a$	$a+1,2a-2$	$7,6$
	F	$6-a,a$	$5,4$	$9,3$

2.1 Dire per quali valori di a esistono equilibri di Nash del gioco (se ne esistono) e quali sono.

Il punto (D,B) è un equilibrio di Nash per $a \geq 2$. Il punto (E,A) è un equilibrio di Nash per $2 \leq a \leq 5$. Il punto (E,B) è un equilibrio di Nash per $a \leq 2$.

2.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di a esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono.

Per il primo giocatore non esistono mai strategie debolmente dominanti. Per il secondo giocatore, giocare A è una strategia debolmente dominante per $2 \leq a \leq 3$.

2.3 Porre adesso $a = 5$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso.

Per $a = 5$, gli ottimi deboli secondo Pareto sono: $(F,C),(F,B),(F,A),(D,B),(D,A),(E,A)$.

Esercizio 3 Considera il seguente gioco. I giocatori sono A e B. A deve scegliere un numero dall'insieme di numeri $\{2,3,5,7,11\}$, B deve scegliere un numero dall'insieme di numeri$\{9,10,21,55,49\}$. Il giocatore A vince 1 euro (perso da B) se sceglie un numero che è un divisore del numero scelto da B. Analogamente, il giocatore B vince 1 euro (perso da A) se sceglie un numero che è un divisore del numero scelto da A.

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

I giocatori non hanno strategie debolmente dominanti.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

Non esistono equilibri di Nash.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

3.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che A e B devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per A:

- $\xi_1^j = \frac{1}{5}, \forall j = 1,\dots,5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^5 = \frac{1}{3}; \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$
- $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{3}; \xi_1^1 = \xi_1^5 = 0$

e le seguenti strategie per B:

- $\xi_2^i = \frac{1}{5}, \forall i = 1,\dots,5$
- $\xi_2^1 = \xi_2^4 = \xi_2^5 = \frac{1}{3}; \xi_2^2 = \xi_2^3 = 0.$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^5 = \frac{1}{3}; \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0.$

Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

Forumulando i problemi di programmazione lineare che devono risolvere il primo e il secondo giocatore per determinare le proprie strategie conservative, è facile vedere che il giocatore A in corrispondenza alle tre strategie paga rispettivamente $-1/5, 0, -1/3$.

Forumulando i problemi di programmazione lineare che devono risolvere il primo e il secondo giocatore per determinare le proprie strategie conservative, è facile vedere che il giocatore B in corrispondenza alle tre strategie paga rispettivamente $2/5, 0, 1/3, 1/3$.

3.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 3.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

3.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

3.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

La terza strategia per A e la seconda e la terza strategia per B sono conservative. Il loro incrocio determina 2 equilibri di Nash e il valore del gioco, pari a -1/3.

Esercizio 4 Si consideri nuovamente il gioco del punto precedente, ma si supponga che ora il giocatore B debba scegliere il proprio numero dall'insieme $\{9,15,21,30,33\}$, mentre l'insieme di numeri per il giocatore A non cambia.

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

4.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

Per il primo giocatore giocare 3 è una strategia debolmente dominante. Per il secondo giocatore, giocare 9 è una strategia debolmente dominante.

4.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

$(3,9),(3,15),(3,21),(3,30),(3,33)$.

4.3 Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco. Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Gli equilibri di Nash in strategia pura sono tali anche in strategia mista e determinano il valore del gioco, che in questo caso è -1.

Esercizio 5 In un parlamento siedono 9 deputati. Di questi, 6 vengono dalla regione A e 3 provengono dalla regione B.

5.1 Supponete che una legge possa essere approvata solo se a suo favore votano la stretta maggioranza dei deputati di A (almeno 4 quindi) e la stretta maggioranza dei deputati di B (almeno 2 quindi). Dire se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, e in caso determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

È facile vedere che si tratta di un gioco cooperativo semplice in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato della regione B. Le permutazioni in cui ella è determinante sono tutte quelle in cui questa si trova in sesta, settima, e ottava posizione e nelle posizioni seguenti si trova esattamente un altro deputato di B.

Le permutazioni in cui si trova in sesta posizione e nelle posizioni seguenti si trova esattamente un altro deputato di B sono sono $2 \cdot \binom{5}{1}\binom{3}{1}$ 6!. Le permutazioni in cui si trova in settima posizione e nelle posizioni seguenti si trova esattamente un altro deputato di B sono sono $2 \cdot \binom{6}{1}\binom{2}{1}$ 6!. Le permutazioni in cui si trova in ottava posizione e nella posizione seguente si trova esattamente un altro deputato di B sono $2 \cdot \binom{7}{1}\ \binom{1}{1}$ 6!. Il valore di Shapley di ciascun deputato B è quindi $\frac{(30+24+14)6!}{9!} = \frac{17}{126}$. Il valore di Shapley di ciascun deputato A è quindi $\frac{1-3\frac{17}{126}}{6} = \frac{25}{252}$

5.2 Supponete quindi che una legge possa essere approvata solo se a suo favore votano la stretta maggioranza dei deputati di B (almeno 2 quindi) e almeno un deputato di A. Dire se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

È facile vedere che si tratta di un gioco cooperativo semplice in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato della regione A. Le permutazioni in cui ella è determinante sono tutte quelle in cui questa si trova in terza posizione e prima ci sono due deputati di B e quelle in cui si trova in quarta posizione e prima ci sono tre deputati di B.

Le permutazioni in cui si trova in terza posizione e prima ci sono due deputati di B sono sono $2 \cdot \binom{3}{2}$ $6!$. Le permutazioni in cui si trova in quarta posizione e prima ci sono tre deputati di B sono sono $3! \cdot 5!$. Il valore di Shapley di ciascun deputato A è quindi $\frac{(6+1)6!}{9!} = \frac{1}{72}$. Il valore di Shapley di ciascun deputato B è quindi $\frac{1-6\frac{1}{72}}{3} = \frac{11}{36}$

5.3 Per ognuna delle soluzioni eventualmente individuate a uno dei due punti precedenti, dire se la soluzione appartiene al nucleo del gioco e, in caso contrario, giustificare la risposta.

Nessuna delle due soluzioni è nel nucleo. Infatti, una qualunque coalizione diversa dalla grande coalizione e che sia in grado di far approvare una legge (nel primo caso, per esempio, 4 deputati di A e 2 di B; nel secondo caso, per esempio, 1 deputati di A e 2 di B) ha valore 1, ma la somma dei payoff dei suoi membri è strettamente minore di 1.

Esercizio 6 È vero che nella soluzione di una *qualunque* istanza dell'House Allocation Problem esiste *sempre* almeno un giocatrice i a cui l'Algoritmo TTCA assegna la casa per lei migliore (ovvero la prima casa nella lista delle preferenze di i)? Non è richiesto di giustificare la risposta: basta rispondere si o no. Ma se rispondete, considerate che è prevista una penalità per una risposta errata.

6.1 È vero che nella soluzione di una *qualunque* istanza dell'House Allocation Problem esiste *sempre* almeno un giocatrice i a cui l'Algoritmo TTCA assegna la casa per lei peggiore (ovvero l'ultimaa casa nella lista delle preferenze di i)? Non è richiesto di giustificare la risposta: basta rispondere si o no. Ma se rispondete, considerate che è prevista una penalità per una risposta errata.

Soluzione

6 Si è vero. Tutti quei giocatori che formano un ciclo alla prima iterazione del TTCA (notare che ne esiste sempre almeno uno) ottengono la casa per loro migliore.

6.1 No, non è vero. Per esempio ogni giocatore ottiene la sua casa preferita in un'istanza in cui ogni giocatore indica come prima preferenza una casa diversa da tutti gli altri (e.g. ogni giocatore indica come prima preferenza casa propria).