Teoria dei Giochi – Prova del 13 Settembre 2010

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ____________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono tre: A, B, C; ciascun giocatore deve scegliere un numero secondo il seguente schema: A può scegliere solo il numero 1; B può scegliere il numero 1, oppure il numero 2; C può scegliere il numero 1, oppure il numero 2, oppure il numero 3.

I tre giocatori scelgono un numero (anche se in realtà A non ha scelta) e lo annunciano simultaneamente. Se i tre giocatori hanno scelto tutti e tre lo stesso numero, i tutti e tre un numero diverso, non ci sono vincitori. Se invece esattamente 2 giocatori hanno scelto lo stesso numero, essi perdono e danno entrambi un euro al giocatore che ha scelto il numero diverso.

1.1 Indica gli equilibri di Nash del gioco, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.2 Se esistono equilibri di Nash, indica quali equilibri di Nash sono anche punti di ottimo debole secondo Pareto (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.3 Indica le strategie debolmente dominanti per ciascun giocatore, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

Soluzione. 1.1. Ogni punto ammissibile può essere rappresentato con una tripla (x, y, z), dove x è il numero scelto da A; y è il numero scelto da B; z è il numero scelto da C. Esistono quindi 6 punti ammissibili: $\{(1,1,1); (1,1,2); (1,1,3);\ (1,2,1); (1,2,2); (1,2,3)\}$. È facile verificare che gli unici equilibri di Nash sono i punti $(1,1,2)$ e $(1,2,3)$. **Soluzione. 1.2.** Entrambi i punti sono punti di ottimo debole secondo Pareto. **Soluzione. 1.3.** Per il primo giocatore banalmente giocare 1 è una strategia debolmente dominante; per il secondo giocatore giocare 2 è una strategia debolmente dominante; per il terzo giocatore giocare 3 è una strategia debolmente dominante.

Esercizio 2 Considera il seguente gioco cooperativo dove ciascun giocatore ha dei guanti, sinistri o destri, e l'obiettivo è quello di accoppiare paia di guanti: quindi, il valore di una coalizione è 1 se e solo se essa dispone di almeno un guanto sinistro e almeno un guanto destro (altrimenti è zero).

2.1 Supponi che i giocatori siano 4 e i primi tre giocatori, A, B, C dispongono solo di un guanto sinistro, mentre il quarto giocatore dispone solo di un guanto destro. Qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore (è richiesto di giustificare la risposta).

2.2 Supponi quindi che i giocatori siano n e i primi $n-1$ giocatori dispongano solo di un guanto sinistro, mentre l'ultimo giocatore dispone solo di un guanto destro. Qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore (non è richiesto di giustificare la risposta).

Soluzione. 2.1. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{numero permutazioni } p\text{: } A_p^i \text{ vince}, A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

.

Prendiamo in considerazione il giocatore $i = A$. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono solo quelle in cui $i = A$ è in seconda posizione e D è in prima posizione, quindi sono

$(4-2)! = 2$. Il valore di Shapley del primo giocatore è quindi 2/24 = 1/12. Per simmetria, anche B e C hanno valore 1/12; quindi D ha valore 1 - 3/12 = 3/4.

Soluzione. 2.2. Prendiamo in considerazione il giocatore $i = A$. Procedendo come prima, le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono solo quelle in cui $i = A$ è in seconda posizione e D èin prima posizione, quindi sono $(n-2)!$. Il valore di Shapley del primo giocatore è quindi $\frac{1}{n(n-1)}$. Per simmetria, ciascuno dei primi $n-1$ giocatori hanno valore $\frac{1}{n(n-1)}$; quindi D ha valore $\frac{n-1}{n}$.

Esercizio 3 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un numero tra $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ (n.b. può capitare che entrambi scegliate lo stesso numero). Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario:

- Se $x = 2y$, vinci 2 euro;
- Se $x > 2y$, perdi un euro;
- Se $x < 2y$, vinci un euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risovere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{6}, \forall i = 1, \dots, 6$
- $\xi_1^1 = 1$ e $\xi_1^i = 0, \forall i = 2, \dots, 6$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^j = \frac{1}{4}, \forall j = 3, \dots, 6$
- , $\xi_2^j = 0, \forall j = 1, \dots, 5$ e $\xi_2^6 = 1$;

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^6)$ il vettore stocastico associato alle 6 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^6)$ il vettore stocastico associato alle 6 possibili strategie pure del secondo giocatore).

3.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

3.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

3.3 Indica se qualcuna di queste strategie è un equilibrio di Nash. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

Soluzione: La matrice C dei payoff in forma di costo per il primo giocatore è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{6} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \dots, 6$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\sum_{i=1}^{6} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{6}, \forall i = 1, \dots, 6$ è $z = \frac{1}{6}$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{6}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = 1$ e $\xi_1^i = 0, \forall i = 2, \dots, 6$ è $z = -1$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, vince, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{6} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 6$$

$$\sum_{j=1}^{6} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^j = \frac{1}{4}, \forall j = 3, \dots, 6$ è $w = -\frac{5}{4}$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{5}{4}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = 0, \forall j = 1, \dots, 5$ e $\xi_2^6 = 1$ è $w = -1$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(1,0,0,0,0,0) = w(0,0,0,0,0,1)$ e quindi la strategia $(1,0,0,0,0,0)$ è conservativa per il primo giocatore e la strategia $0,0,0,0,0,1)$ è conservativa per il secondo giocatore (e, ovviamente, le altre due strategie non lo sono). Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -1 \leq x_1 \leq 25\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : x_2 \geq 1\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = x_1^2 - 6x_1(1-x_2^2) + 2x_1x_2$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{3}{2}x_2^2 - 3x_2x_1^2 - 6(2-2x_1)x_2$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

Soluzione

4.1 Non possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché l'insieme X_2 non è compatto.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min x_1^2 - 6x_1(1-x_2^2) + 2x_1x_2$$

$$-1 \leq x_1 \leq 5$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \frac{3}{2}x_2^2 - 3x_2x_1^2 - 6(2-2x_1)x_2$$

$$x_2 \geq 1$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{se } x_2 \geq 1 \end{array} \right. \qquad b_2(x_1) = \left\{ \begin{array}{ll} (x_1-2)^2 & \text{se } -1 \leq x_1 \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x_1 \leq 3 \\ (x_1-2)^2 & \text{se } 3 \leq x_1 \leq 5 \end{array} \right.$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che l'unico punto di intersezione delle best reponse function, quindi l'unico equilibrio di Nash è $(x_1,x_2)^N = (-1,9)$.