Teoria dei Giochi – Prova del 24 Settembre 2010

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ____________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono tre: A,B,C; ciascun giocatore deve scegliere un numero secondo il seguente schema: A può scegliere solo il numero 1; B può scegliere il numero 1, oppure il numero 2; C può scegliere il numero 1, oppure il numero 2, oppure il numero 3.

I tre giocatori scelgono un numero (anche se in realtà A non ha scelta) e lo annunciano simultaneamente. Se i tre giocatori hanno scelto tutti e tre lo stesso numero, i tutti e tre un numero diverso, non ci sono vincitori. Se invece esattamente 2 giocatori hanno scelto lo stesso numero, essi vincono e ricevono entrambi un euro dal giocatore che ha scelto il numero diverso.

1.1 Indica gli equilibri di Nash del gioco, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.2 Indica tutti i punti di ottimo debole secondo Pareto, ovvero sia quelli che sono equilibri di Nash che quelli che non lo sono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.3 Indica le strategie debolmente dominanti per ciascun giocatore, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

Soluzione. 1.1. Ogni punto ammissibile può essere rappresentato con una tripla (x,y,z), dove x è il numero scelto da A; y è il numero scelto da B; z è il numero scelto da C. Esistono quindi 6 punti ammissibili: $\{(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);\ (1,2,1);(1,2,2);(1,2,3)\}$. È facile verificare che gli unici equilibri di Nash sono i punti $(1,1,1)$ e $(1,2,2)$. **Soluzione. 1.2.** Tutti i punti sono punti di ottimo debole secondo Pareto. **Soluzione. 1.3.** Per il primo giocatore banalmente giocare 1 è una strategia debolmente dominante; per il secondo e il terzo giocatore giocare 1 è una strategia debolmente dominante.

Esercizio 2 Un gruppo di cinque delinquenti $\{A,B,C,D,E\}$ vuole effettuare una rapina in banca. Ciascuno di loro ha una particolare attitudine: A è in grado di aprire le cassaforti (e non sa fare altro); B e C sono in grado di guidare (e non sanno fare altro); D ed E sanno usare le armi (e non sanno fare altro). La rapina andrà a buon fine se e solo se ad essa partecipano: almeno un delinquente in grado di aprire le cassaforti, almeno un delinquente in grado di guidare; almeno un delinquente in grado di usare le armi. Qual è il valore di Shapley di ciascun delinquente? (È richiesto di giustificare la risposta.)

Soluzione. 2.1. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{numero permutazioni } p\text{: } A_p^i \text{ vince}, A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}.$$

Prendiamo in considerazione il giocatore $i = A$. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono solo quelle in cui $i = A$ è in terza posizione e nelle prime due posizioni ci sono uno tra B e C e uno tra D ed E, quelle in cui $i = A$ è in quarta posizione, quelle in cui $i = A$ è in quinta posizione. Il valore di Shapley del primo giocatore è quindi $\frac{16+24+24}{120} = 8/15$. Per simmetria, B, C, D ed E hanno lo stesso valore, pari quindi a $\frac{1-\frac{8}{15}}{4} = \frac{7}{60}$.

Esercizio 3 Si consideri il gioco antagonista descritto, per il primo giocatore, dalla seguente matrice di costo :

	Giocatore 2	
	a	b
Giocatore 1 a	5	-3
b	-6	9

Considerare primo il gioco con strategie *pure*. Individuare, se esistono, le strategie conservative per ogni giocatore. Individuare, se esistono, gli equilibri di Nash del gioco.

Considerare quindi l'estensione del gioco in strategia *mista*. Formulate il problema di individuare la strategia conservativa di ciascun giocatore. Determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori (suggerimento: risolvete il problema per via grafica). Individuare gli equilibri di Nash del gioco.

Soluzione esercizio 3:

Per quanto riguarda il gioco con strategie pure la strategia conservativa è giocare a per il primo giocatore, mentre è giocare b per il secondo giocatore. Il gioco non ha equilibri di Nash. Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolovere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq 5\varepsilon_1^1 - 6\varepsilon_1^2$$

$$z \geq -3\varepsilon_1^1 + 9\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_1^1 e z.

$$\min z$$

$$z \geq 11\varepsilon_1^1 - 6$$

$$z \geq -12\varepsilon_1^1 + 9$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

Per via grafica possiamo osservare che il punto di ottimo è il punto di intersezione delle due rette $z = 11\varepsilon_1^1 - 6$ e $z = -12\varepsilon_1^1 + 9$, in corrispondenza del quale $\varepsilon_1^1 = \frac{15}{23}$, $\varepsilon_1^2 = \frac{8}{23}$ e $z = \frac{27}{23}$, cioé il primo giocatore perde in media al più $\frac{27}{23}$.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq 5\varepsilon_2^1 - 3\varepsilon_2^2$$

$$w \leq -6\varepsilon_2^1 + 9\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

che nuovamente, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\max w$$

$$w \leq 8\varepsilon_2^1 - 3$$

$$w \leq -15\varepsilon_2^1 + 9$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{12}{23}, \frac{11}{23}\right)$ e $w = \frac{27}{23}$, cioé il secondo giocatore vince in media al più $\frac{27}{23}$

L'equilibrio dell'estensione del gioco in strategia mista è dato dalla coppia di strategie miste $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{15}{23}, \frac{8}{23}\right)$ $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{12}{23}, \frac{11}{23}\right)$.

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -5 \leq x_1 \leq 6\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -3 \leq x_2 \leq 4\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1, x_2) = 6 + 3x_2 - 2x_1 - x_1x_2$ e $C_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

Soluzione

4.1 Sì possiamo affermare l'esistenza a priori di almeno un equilibrio di Nash poiché le funzioni di payoff sono continuamente differenziabili e convesse nelle rispettive variabili e gli insiemi X_1 e X_2 sono sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ quindi sono compatti.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min 6 + 3x_2 - 2x_1 - x_1x_2 = (3 - x_1)(2 + x_2)$$

$$-5 \leq x_1 \leq 6$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ 2x_1 + x_1x_2 = x_1(2+x_2)$$

$$-3 \leq x_2 \leq 4$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -5 & \text{se } -3 \leq x_2 < -2 \\ \text{qualsiasi} & \text{se } x_2 = -2 \\ 6 & \text{se } -2 < x_2 \leq 4 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} 4 & \text{se } -5 \leq x_1 < 0 \\ \text{qualsiasi} & \text{se } x_1 = 0 \\ -3 & \text{se } 0 < x_1 \leq 6 \end{cases}$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che l'unico punto di intersezione delle best reponse function, quindi l'unico equilibrio di Nash è $(x_1, x_2)^N = (0, -2)$.