Esercizio 1. Considera il seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un intero tra 1 e 100. Se il numero x che hai scelto è minore di quello y del tuo avversario, allora tu vinci un euro, a meno che $x = y - 1$, nel qual caso il tuo avversario vince un euro. Se il numero x che hai scelto è maggiore di quello y del tuo avversario, allora lui vince un euro, a meno che $y = x - 1$, nel qual caso tu vinci un euro. Se $x = y$ c'è un pareggio.

Formula il problema di programmazione lineare che consente di calcolare il valore del gioco. Dire quindi quali tra le seguenti strategie è conservativa per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$
- $\xi_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1, \ldots, 50$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 100$
- $\xi_1^{98} = \xi_1^{99} = \xi_1^{100} = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1, \ldots, 97$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^i, \ldots, \xi_1^{100})$ il vetore stocastico associato alle 100 possibili strategie pure del primo giocatore).

Soluzione. (Attenzione : nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.) La matrice A che descrive il gioco è una matrice 100×100. L'elemento a_{ij} è pari al numero di euro che perdi nel caso tu scelga l'intero i e il tuo avversario l'intero j. Quindi:

$$A: \quad a_{ij} = \begin{cases} +1 & i \geq j+2 \\ -1 & i = j+1 \\ 0 & i = j \\ +1 & i = j-1 \\ -1 & i \leq j-2 \end{cases}$$

Il problema di PL associato alla scelta della migliore strategia per te è quindi il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{100} a_{ij} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

cioè

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{j-2} -x_i + x_{j-1} - x_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{100} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

Poiché il gioco è simmetrico, il suo valore (che esiste!) deve essere 0.

Dobbiamo determinare se i vettori stocastici proposti sono strategie conservative per il primo giocatore. Poiché il gioco è a valore 0, una strategia conservativa deve determinare un valore $z^* = 0$. Per ogni strategia proposta dobbiamo quindi utilizzare la formulazione di PL scritta in precedenza per determinare se il valore corrispondente della funzione obiettivo è pari a zero.

- $x_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{100} + \sum_{i=3}^{100} \frac{1}{100} \rightarrow z \geq \frac{97}{100}$$

  Da cui $z \geq \frac{97}{100}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1, \ldots, 50$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{50} + \sum_{i=2}^{50} \frac{1}{50} \rightarrow z \geq \frac{48}{50}$$

  Da cui $z \geq \frac{48}{50}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 100$ è un vettore di strategie conservative, infatti considerando tutte le possibili risposte con strategie pure del secondo giocatore (cioè analizzando i vincoli per $j = 1..100$, abbiamo:

$$\begin{array}{lll} j = 1 & z \geq -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 2 & z \geq +\frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 3 & z \geq -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 4 & z \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -\frac{1}{3} \\ j \geq 5 & z \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -1 \end{array}$$

  Da cui otteniamo che $z = 0$, quindi il vettore stocastico proposto è una strategia conservativa per il primo giocatore.

- $x_1^{98} = x_1^{99} = x_1^{100} = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 1, \ldots, 97$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq \sum_{i=98}^{100} \frac{1}{3} \Rightarrow z \geq 1$$

Da cui $z \geq 1$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

Esercizio 2. (Il gioco del pari o dispari.) Due giocatori, P e D, annunciamo simultaneamente la loro giocata, che può essere un intero tra 1 e 5, (1 e 5 compresi). Il giocatore P vince un euro se la somma delle giocate è pari e perde un euro se la somma delle giocate è dispari. La cosa opposta avviene per il giocatore D.

Considerate l'estensione in strategia mista di questo gioco. Formulate con la programmazione lineare il problema di individuare una strategia minmax per il giocatore P. Dite quindi se la strategia in cui entrambi i giocatori utilizzano una distribuzione di probabilità uniforme (cioe' giocano 1, 2, 3, 4 o 5 con la stessa probabilità) conduce a un equilibrio di Nash, giustificando la risposta.

Soluzione. (Attenzione : nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.)

La matrice A dei payoff del primo giocatore (in forma di costo) è una matrice 5×5 tale che $a_{ij} = -1$ se $i + j$ è pari, 0 altrimenti.

Per verificare se le distribuzioni uniformi $\bar{x} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ del giocatore P e $\bar{y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ del giocatore D determinano un equilibrio di Nash possiamo, in questo caso, procedere in due modi. Potremmo calcolare $\tilde{C}_1(\bar{x})$ e $\tilde{C}_2(\bar{y})$ e verificare che $\tilde{C}_1(\bar{x}) = -\tilde{C}_2(\bar{y})$ (si noti che a differenza del gioco precedente questo gioco non è simmetrico, quindi non è detto sia a valore 0!). Oppure potremmo utilizzare la funzione best response e verichare che $\bar{y}$ (risp $\bar{x}$) sia per il secondo giocatore (risp. il primo giocatore) una migliore risposta quando il primo giocatore (risp. il secondo giocatore) gioca $\bar{x}$ (risp $\bar{y}$). Procederemo in questo secondo modo.

Se il primo giocatore (P) gioca la strategia uniforme $\bar{x} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, è facile vedere che giocare la strategia pura $[0, 1, 0, 0, 0]$ oppure $[0, 0, 0, 1, 0]$ è per il secondo giocatore una migliore risposta.

D'altro canto, se il secondo giocatore (D) risponde con la strategia $\bar{y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ alla strategia $\bar{x}$ del primo giocatore, allora il payoff atteso per ogni iterazione del gioco è pari a $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} \bar{x}_i a_{ij} \bar{y}_j = -\frac{1}{25}$, e quindi la strategia $\bar{y}$ non è per il secondo giocatore una risposta migliore quando il primo giocatore utilizza la distribuzione $\bar{x}$. La distribuzioni uniformi non determinano quindi un equilibrio di Nash, e quindi *almeno una delle due* non è una strategia conservativa. Per adesso non possiamo dire nulla di più ! (Ma come vedremo nel seguito, in realtà , nessuna delle due stategie è conservativa.)

Anche se non era richiesto dal testo, calcoliamo gli equilibri di Nash per il gioco. La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

$$z \geq x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

La soluzione del precedente PL è un pò laboriosa. Consideriamo quindi la seguente *riformulazione* del gioco. Osserviamo che per ciascun giocatore la scelta da effettuare è semplicemente quella di decidere se giocare un numero pari o un numero dispari. In questo senso, il gioco è quindi descritto dalla seguente matrice di payoff (in forma di costo):

Giocatore D

Giocatore P		P	D
	P	-1	1
	D	1	-1

La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2$$

$$z \geq x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $z = 0$. Il gioco quindi è fair. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il primo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

La formulazione di PL per trovare la strategia conservativa per il giocatore D è la seguente.

$$\max w$$

$$w \leq -y_1 + y_2$$

$$w \leq y_1 - y_2$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $w = 0$. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il secondo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

Esercizio 3. Considerate la rete stradale G rappresentata dal grafo orientato con nodi $\{S, A, B, T\}$ e archi $\{(S, A), (S, B), (A, T), (B, T)\}$, nella quale 4000 vetture devono viaggiare da S a T. Il tempo di viaggio da S a A e da B a T è pari, in minuti, al numero di vetture diviso 100, mentre il tempo di viaggio da A a T e da S a B è costante e pari a 45 minuti. Individuare un punto di equilibrio di Nash per questo gioco.

Considerate ora la stessa rete, ma includendo anche l'arco (A, B) e supponete che il tempo di viaggio su questo tratto sia costante e pari a 0 minuti. Individuare un punto di equilibrio di Nash per questo nuovo gioco. Dire quindi se il punto individuato è ottimo debole seconde Pareto.

Soluzione. Per rispondere alla prima parte della domanda, osserviamo che abbiamo un equilibrio di Nash quando 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, A, T) e 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, B, T) ed ogni vettura impiega quindi 65 minuti per andare da S a T. In tale situazione infatti, se una vettura che viaggia sul percorso (S, A, T) (risp. (S, B, T)) decidesse di cambiare percorso, allora impiegherebbe un tempo pari a $65.01 > 65$ per andare da S a T.

Per rispondere alla seconda parte della domanda, osserviamo che abbiamo un equilibrio di Nash quando tutte le 4000 vetture viaggiano sul percorso (S, A, B, T) con un tempo di percorrenza pari a 80 minuti. Infatti se una vettura decidesse di viaggiare sul percorso (S, A, T) o (S, B, T) impiegherebbe 85 minuti. Tale equilibrio di Nash **non** è ottimo debole secondo Pareto, infatti esiste una vettore di strategie in cui tutti le vetture impiegano meno di 80 minuti per andare da S a T. Questo vettore di strategie è quello corrispondente alla situazione in cui 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, A, T) e 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, B, T).

Anche se non era richiesto dal testo, analizziamo l'esistenza di altri equilibri di Nash per il gioco. Nel primo caso indichiamo con n_1 (risp. n_2) il numero di vetture che sceglie il percorso S, A, T (risp. S, B, T). Il tempo di viaggio t_1 (risp. t_2) sul primo (risp. secondo) percorso è pari a $\frac{n_1}{100} + 45$ (risp. $\frac{n_2}{100} + 45$). È immediato verificare che, se $n_1 \neq n_2$, e.g. $n_1 > n_2$, ogni giocatore che sceglie il primo percorso ha convenienza a commutare sul secondo: quindi l'unico equilibrio di Nash è quello individuato in precedenza in cui 2000 vetture scelgono il percorso superiore e 2000 vetture scelgono il percorso inferiore.

Passiamo a considerare il secondo caso. Siano n_1 e n_2 rispettivamente il numero di vetture che transitano sul tratto (S, A) e sul tratto (B, T). Allora, il tempo di percorrenza sul percorso (S, A, T) è pari a $45 + \frac{n_1}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso (S, A, B, T) è pari a $\frac{n_1}{100} + \frac{n_2}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso (S, B, T) è pari a $45 + \frac{n_2}{100}$. Si osservi che poiché n_1 e n_2 sono entrambi ≤ 4000, abbiamo che il tempo di percorrenza del percorso (S, A, B, T) è sempre minore dei tempi di percorrenza dei percorsi (S, A, T) e (S, B, T). Segue che l'unico equilibrio di Nash è quello in cui tutte le vetture scelgono il precorso (S, A, B, T), impiegando quindi 80 minuti.

Esercizio 4. Considerate un'elezione nella quale sono presenti due candidati, A e B. Dei $2m$ cittadini che hanno diritto al voto, m sostengono il candidato A, ed m sostengono il candidato B. Ciascun cittadino può scegliere se astenersi o votare per il candidato che sostiene. Andare a votare ha un costo pari a c con $0 < c < 1$. Un cittadino che si astiene ottiene un payoff pari a 2 se il candidato che sostiene vince, un payoff pari a 1 se i candidati pareggiano ed un payoff pari a 0 se il candidato che sostiene perde. Un cittadino che vota invece ottiene un payoff pari a $2 - c$ se il candidato che sostiene vince, un payoff pari a $1 - c$ se i candidati pareggiano ed un payoff pari a $-c$ se il candidato che sostiene perde.

(a) Il vettore di strategie in cui ogni giocatore vota è un equilibrio di Nash? **Sì** . Infatti in tale situazione i due candidati pareggiano e ogni votante ottiene un payoff pari a $1 - c$; se un qualsiasi giocatore decidesse di astenersi il candidato che sostiene perderebbe ed il giocatore otterrebbe un payoff pari a $0 < 1 - c$.

(b) Esiste un equilibrio di Nash in cui i due candidati pareggiano e non tutti i cittadini votano? **No**. Infatti un qualunque giocatore che si è astenuto se votasse farebbe vincere il candidato che sostiene ottenendo così un payoff pari a $2 - c > 1$.

(c) Esiste un equilibrio di Nash in cui un candidato vince per un solo voto di differenza? **No**. In questo caso almeno uno dei cittadini che sostengono il candidato perdente si è astenuto. Se tale cittadino votasse i candidati pareggerebbero e quindi otterrebbe un payoff pari a $1 - c > 0$.

(d) Esiste un equilibrio di Nash in cui un candidato vince per due o più voti di differenza? **No**. Infatti un qualunque cittadino che ha votato per il candidato vincente potrebbe astenersi ed ottenere così un payoff pari a $2 > 2 - c$.

(e) Elencare *tutti* gli equilibri di Nash del gioco. L'unico equilibrio di Nash del gioco è quello del punto (a). Infatti i punti (c) e (d) prendono in considerazione tutte le situazioni in cui uno dei due candidati vince, mentre i punti (a) e (b) prendono in considerazione tutte le situazioni in cui i candidati pareggiano.