Teoria dei Giochi – Prova del 16 Settembre 2013

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione, dove x è un qualunque numero intero (positivo o negativo):

Giocatore 2

Giocatore 1		A	B	C
	D	$6,3$	$1,4$	$4,1$
	E	$3+x, 4-x$	$2,2$	$3,1$
	F	$4,4$	$2,3+x$	$1,2$

1.1 Dire per quali valori di x esistono equilibri di Nash del gioco (se ne esistono) e quali sono.

1.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di x esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono.

1.3 Porre adesso $x = 0$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso.

Non è richiesto di giustificare alcuna risposta.

Esercizio 2 Consideriamo la seguente variazione del meccanismo d'asta in busta chiusa di secondo prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Vince l'asta il giocatore i che ha fatto l'offerta x_i più alta (a parità di offerta, vince il giocatore con indice i più basso), e paga un prezzo p pari a *un terzo* della seconda offerta più alta. Al solito, il payoff del giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta. Per semplicità supponiamo di avere 3 o più giocatori.

Quali delle seguenti affermazioni è vera? N.B. Se un'affermazione è vera, non è necessario fornire una giustificazione, se un'affermazione è falsa è necessario fornire un esempio in cui appunto è falsa.

Per il giocatore i ogni strategia $x > v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i ogni strategia $x < v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = 3v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = \frac{v_i}{3}$ è un strategia debolmente. dominante

Esercizio 3 Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,3,8,26\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,5,15,29\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Se $x+y$ è una potenza di 2 ma non è una potenza di 4, il primo giocatore vince un euro. In tutti gli altri casi c'è parità (quindi il secondo giocatore non può avere mai payoff positivo).

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risp.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

3.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\ldots,4$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\ldots,4$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 1, \xi_2^4 = 0$:

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\ldots,\xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\ldots,\xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

3.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

3.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

3.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Esercizio 4 In un parlamento siedono n deputati, con n pari, tra cui 3 deputati anziani. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della stretta maggioranza dei deputati (cioè almeno $\frac{n}{2}+1$), oppure il voto di esattamente $\frac{n}{2}$ deputati tra cui tutti e 3 i deputati anziani. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Esercizio 5 Si consideri la seguente istanza dell'House Allocation Problem: siano l'insieme dei giocatori e quello delle case rispettivamente $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, dove il giocatore $i-$esimo possiede la $i-$esima casa, con $i = 1,\ldots,8$. Le seguenti graduatorie rappresentano le preferenze dei vari giocatori rispetto le case e sono degli ordini totali:

- Giocatore 1: $\{2,3,4,7,6,8,5,1\}$;
- Giocatore 2: $\{4,1,2,3,5,6,7,8\}$;
- Giocatore 3: $\{2,4,5,3,7,8,1,6\}$;
- Giocatore 4: $\{5,8,7,6,4,3,2,1\}$;
- Giocatore 5: $\{2,3,6,7,4,1,8,5\}$;
- Giocatore 6: $\{5,7,3,2,6,1,4,8\}$;
- Giocatore 7: $\{4,3,5,2,1,6,7,8\}$;
- Giocatore 8: $\{6,4,2,3,7,5,1,8\}$.

5.1 Trovare il matching stabile utilizzando il TTCA (*fornire una breve descrizione di ogni iterazione*).

5.2 Il matching $M = \{(1,3),(2,1),(3,8),(4,7),(5,6),(6,2),(7,5),(8,4)\}$ è stabile rispetto alla coalizione $S = \{4,5,7\}$? (Giustificare brevemente la risposta.)

5.3 Esiste un matching che non è stabile rispetto la coalizione $S = \{1,5,8\}$? (In caso affermativo, esibire un tale matching; in caso negativo, giustificare brevemente la risposta.)

5.4 Si considerino ora le seguenti graduatorie parziali:

- Giocatore 1: $\{4,?,2,1,?\}$; Giocatore 2: $\{4,5,3,?,?\}$; Giocatore 3: $\{4,?,?,1,3\}$;
  Giocatore 4: $\{?,?,?,?,?\}$; Giocatore 5: $\{4,?,1,2,?\}$;

È possibile completare le graduatorie in modo tale che il matching $M = \{(1,3),(2,5),(3,1),(4,4),(5,2)\}$ sia stabile rispetto alle colazioni? (In caso positivo esibire un tale completamento, in caso negativo giustificare la risposta).