Teoria dei Giochi e delle Decisoni – Prova del 18 Luglio 2013

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 Data la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di minimizzazione

Giocatore 2

Giocatore 1		A	B	C
	D	$2,3$	$1,3$	$4,1$
	E	$3,5$	$0,0$	$2,2$
	F	$3,3$	$0,3$	$1,2$

(a) Fornire gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono).
(b) Fornire le strategie debolmente dominanti di ciascun giocatore (se ve ne sono).
(c) Fornire i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono). In caso, evidenziare punti che sono sia ottimi deboli secondo Pareto che equilibri di Nash.
(d) Fornire le strategie conservative di ciascun giocatore (se ve ne sono).

Non è richiesto di giustificare alcuna risposta.

Esercizio 2 Consideriamo il meccanismo d'asta in busta chiusa di *terzo* prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Vince l'asta il giocatore i che ha fatto l'offerta x_i più alta (a parità di offerta, vince il giocatore con indice i più basso), e paga un prezzo p pari alla *terza* offerta più alta. Il payoff del giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta. Per semplicità supponiamo di avere 3 o più giocatori.

Quali delle seguenti affermazioni è vera? N.B. Se un'affermazione è vera, non è necessario fornire una giustificazione, se un'affermazione è falsa è necessario fornire un esempio in cui appunto è falsa.

Per il giocatore i giocare una strategia $x > v_i$ è un strategia debolmente dominante

Per il giocatore i giocare una strategia $x < v_i$ è un strategia debolmente dominante

Per il giocatore i giocare una strategia $x = v_i$ è un strategia debolmente dominante

Esercizio 3. Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{2,4,8,20,38\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{3,12,15,19\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Il primo giocatore vince un euro se $x > y$ e y non è un divisore di x, oppure se $x < y$ ma x è un divisore di y. (Analogamente, il secondo giocatore vince un euro se $x < y$ e x non è un divisore di y, oppure se $x > y$ ma y è un divisore di x.)

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risp.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

3.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore

- $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1,\dots,5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \xi_1^5 = \frac{1}{2}$

e la seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

3.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

3.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

3.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Esercizio 4 In un parlamento siedono 9 deputati, tra cui 2 deputati anziani. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della stretta maggioranza (cioè almeno 5) che includa *entrambi* i deputati anziani. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

4.1 Dire quindi se la soluzione determinata al punto precedente è nel nucleo, giustificando la risposta: se la risposta è affermativa, spiegare brevemente il motivo; se la la risposta è negativa esibire una coalizione che romperebbe la grande coalizione.

Esercizio 5 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti ordini totali rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna:

- Uomo 1: $\{D,A,B,C\}$; Uomo 2: $\{A,D,C,B\}$; Uomo 3: $\{A,B,D,C\}$; Uomo 4: $\{B,C,D,A\}$.
- Donna A: $\{3,4,2,1\}$; Donna B: $\{1,2,4,3\}$; Donna C: $\{1,2,3,4\}$; Donna D: $\{3,2,1,4\}$.

Fornire un matching stabile, illustrando lo svolgimento dell'algoritmo.

5.1 Il matching $M = \{(1,B),(2,C),(3,D),(4,A)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

5.2 Si considerino ora le seguenti graduatorie di preferenza *parziali*:

- Uomo 1: $\{D,?,?,?\}$; Uomo 2: $\{A,?,?,B\}$; Uomo 3: $\{D,?,?,B\}$; Uomo 4: $\{?,?,?,?\}$.
- Donna A: $\{4,?,?,2\}$; Donna B: $\{?,?,?,?\}$; Donna C: $\{?,?,?,4\}$; Donna D: $\{4,?,1,?\}$.

È possibile completare le graduatorie in modo tale che il matching $M = \{(1,A),(2,C),(3,D),(4,B)\}$ risulti non stabile sia rispetto alla coalizione $S_1 = \{2,D\}$ che rispetto alla coalizione $S_2 = \{1,B\}$? (In caso affermativo, esibire un tale completamento; in caso negativo, non è invece necessario giustificare la risposta).