Teoria dei Giochi – Prova del 29 Novembre 2010

Cognome, Nome, email: ____

Esercizio 2 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. Tu puoi scegliere una lettera tra $\{A, B, P, R\}$; il tuo avversario può scegliere una parola tra $\{BACI, CABINA, PORTO, PREGO\}$. Se la parola scelta dal tuo avversario contiene la lettera che hai scelto, perdi un euro; se la parola scelta dal tuo avversario non contiene la lettera che hai scelto, perdi un euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1, \dots, 4$
- $\xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \frac{1}{2}, \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$
- $\xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{1}{2}$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1, 2, 3, 4$
- $\xi_2^1 = \frac{1}{2}, \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = 0$
- $\xi_2^1 = 0, \xi_2^2 = \frac{1}{2}, \xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = 0$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^3, \xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 3 possibili strategie pure del secondo giocatore).

2.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

2.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa.

2.3 Indica se alcune di queste strategie determinano un equilibrio di Nash.

2.4 Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuare il valore del gioco, spiega perché non è possibile).

Soluzione: La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \dots, 3$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\ldots,4$ è $z = \frac{1}{2}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{2}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = 1$ e $\xi_1^i = 0\ \forall i = 2,3,4$ è $z = 1$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \frac{1}{2}$, $\xi_1^2 = 0$, $\xi_1^3 = 0$ $\xi_1^4 = \frac{1}{2}$ è $z = 0$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1,\ldots,4$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,3$$

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{3}\ \forall j = 1,\ldots,3$ è $w = -\frac{1}{3}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{3}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2^2 = 0$, $\xi_2^3 = \frac{1}{2}$ è $w = 0$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(1/2,0,0,1/2) = w(1/2,0,1/2)$ e quindi la strategia $(1/2,0,0,1/2)$ è conservativa per te e la strategia $(1/2,0,1/2)$ è conservativa per il tuo avversario (e, le altre strategie che restituiscono un payoff atteso diverso da 0 non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è 0. Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 3 In un parlamento siedono 8 deputati $\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$. Una legge viene approvata se a suo favore votano almeno 6 deputati, oppure se a suo favore votano 5 deputati tra cui A, che è il presidente del parlamento. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato A. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono: 1) tutte quelle in cui egli si trova in sesta posizione; 2) tutte quelle in cui egli si trova in quinta posizione.

Sappiamo che le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono $(8-1)!$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato A è:

$$S_A(v) = \frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

Per quanto riguarda gli altri deputati, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley del deputato $i \in \{B,C,D,E,F,G,H\}$ è:

$$S_i(v) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{28}.$$

Esercizio 1 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono tre: A,B,C; ciascun giocatore deve scegliere un numero dall'insieme $\{1,2,3\}$.

I tre giocatori scelgono un numero e lo annunciano simultaneamente. Se i tre giocatori hanno scelto tutti e tre lo stesso numero, non ci sono vincitori. Se invece esattamente 2 giocatori hanno scelto lo stesso numero, questi perdono e danno entrambi un euro al giocatore che ha scelto il numero diverso. Se i tre giocatori hanno scelto tutti e tre un numero diverso, il giocatore che ha scelto il numero più basso riceve un euro da ciascuno degli altri giocatori.

1.1 Esistono punti di equilibrio di Nash in cui tutti i giocatori scelgono un numero diverso? In caso affermativo fornisci tali punti (senza ulteriori dettagli), in caso negativo non è richiesto di giustificare la risposta.

1.2 Esistono punti di equilibrio di Nash in cui due giocatori scelgono lo stesso numero e il terzo giocatore sceglie un numero diverso? In caso affermativo fornisci tali punti (senza ulteriori dettagli), in caso negativo non è richiesto di giustificare la risposta.

1.3 Esistono punti di equilibrio di Nash in cui tutti i giocatori scelgono lo stesso numero? In caso affermativo fornisci tali punti (senza ulteriori dettagli), in caso negativo non è richiesto di giustificare la risposta.

Soluzione. 1.1. Tutti i punti in cui i giocatori scelgono un numero diverso sono equilibri di Nash. **1.2.** Tutti i punti di questo tipo, purché almeno un giocatore scelga 1. **1.3.** Nessun punto in cui i giocatori scelgono lo stesso numero è un equilibrio di Nash.

Esercizio 4 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti insiemi ordinati rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna (sono quindi degli ordini totali):

- Uomo 1: $\{B,C,A,D\}$;
- Uomo 2: $\{D,C,B,A\}$;
- Uomo 3: $\{A,D,B,C\}$;
- Uomo 4: $\{C,A,D,B\}$.

- Donna A: $\{2,1,4,3\}$;
- Donna B: $\{4,3,2,1\}$;
- Donna C: $\{3,1,2,4\}$;
- Donna D: $\{1,4,3,2\}$.

4.1 Il matching $M = \{(1,B),(2,D),(3,A),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo è invece necessario giustificare la risposta).

4.2 Dire se il matching $M = \{(1,C),(2,D),(3,A),(4,B)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo è invece necessario giustificare la risposta).

4.3 Dire se il matching $M = \{(1,D),(2,A),(3,C),(4,B)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo è invece necessario giustificare la risposta).

Soluzione Per lo stable marriage problem sappiamo che un matching M è stabile se e solo la seguente condizione di stabilità è verificata: non esistono un uomo m e una donna w tali che m preferisce w al partner che il matching M gli assegna, e w preferisce m al partner che il matching M le assegna.

4.1 Il matching M è stabile. Anche se non era richiesto di giustificare quest'osservazione, osserviamo che M è stabile poiché assegna ad ogni uomo la donna che preferisce, e quindi la condizione di stabilità è banalmente verificata.

4.2 In questo caso M non è stabile. Per esempio esso non è stabile rispetto la coalizione composta dall'uomo 4 e la donna A.

4.3 Analogamente al punto 3.1, l matching M è stabile. Il matching assegna ad ogni donna l'uomo che preferisce (sebbene M assegni ad ogni uomo la donna che preferisce di meno in assoluto!).

Esercizio 5 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : -2 \leq x_1 \leq 2\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : 0 \leq x_2 \leq 5\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = (2+x_1)(3-x_2)$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2-4)+6$.

5.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

5.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

5.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 5.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.

5.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\begin{gathered}\min\ (2+x_1)(3-x_2)\\ -2 \leq x_1 \leq 2\end{gathered}$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\begin{gathered}\min\ \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(x_1^2-4)+6\\ 0 \leq x_2 \leq 5\end{gathered}$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} -2 & \text{se } 0 \leq x_2 < 3 \\ -2 \leq x_1 \leq 2 & \text{se } x_2 = 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x_2 \leq 5 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = 0$$

5.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esiste un solo punto di intersezione delle best response function il punto $(-2,0)$, che è quindi l'unico equilibrio di Nash.