Teoria dei Giochi – Prova del 25 Febbraio 2011

Cognome, Nome, email: ______________________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono tre: A,B,C. Ciascun giocatore deve scegliere un numero secondo il seguente schema: A può scegliere solo il numero 1; B può scegliere il numero 1, oppure il numero 2; C può scegliere il numero 1, oppure il numero 2, oppure il numero 3.

I tre giocatori scelgono un numero (anche se in realtà A non ha scelta) e lo annunciano simultaneamente. A questo punto si calcola la media M dei numeri annunciati e l'esito del gioco è determinato secondo il seguente schema:

- se i tre giocatori hanno annunciato rispettivamente x,y,z e vale $|x-M| < |y-M|$ e $|x-M| < |z-M|$, allora il giocatore che ha annunciato x riceve un euro dagli altri giocatori;
- se i tre giocatori hanno annunciato rispettivamente x,y,z e vale $|x-M| = |y-M| < |z-M|$, allora i giocatori che hanno annunciato x e y ricevono un euro dall'altro giocatore;
- se i tre giocatori hanno annunciato rispettivamente x,y,z e vale $|x-M| = |y-M| = |z-M|$, allora non ci sono vincitori.

1.1 Indica gli equilibri di Nash del gioco, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.2 Indica le strategie debolmente dominanti per il giocatore B e il giocatore C, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.3 Indica quali degli equilibri di Nash calcolati al punto 1.1. rimangono tali se il giocatore A potesse scegliere di giocare, oltre al numero 1, anche il numero 2.

Soluzione. 1.1. .

Analizziamo i sei casi possibili. Nel seguito, indichiamo con (a,b,c) lo stato del giocatore in cui il giocatore A gioca a, B gioca b, C gioca c:

$(1,1,1)$ è un equilibrio di Nash. In questo caso l'esito del gioco è un pareggio e il giocatore che cambiasse unilateralmente perderebbe;

$(1,2,1)$ non è un equilibrio di Nash. In questo caso A e C vincono, ma se B giocasse 1 invece di 2 ci sarebbe un pareggio;

$(1,1,2)$ non è un equilibrio di Nash. In questo caso A e B vincono, ma se C giocasse 1 invece di 2 ci sarebbe un pareggio;

$(1,2,2)$ è un equilibrio di Nash. In questo caso B e C vincono. A non può cambiare la sua strategia, mentre B e C cambiandola non migliorerebbero il proprio payoff;

$(1,1,3)$ non è un equilibrio di Nash. In questo caso A e B vincono, ma se C giocasse 1 invece di 3 ci sarebbe un pareggio;

$(1,2,3)$ non è un equilibrio di Nash. In questo caso B vince, ma se C giocasse 1 o 2 invece di 3 vincerebbe.

Soluzione. 1.2. Per il secondo giocatore non esistono strategie dominanti. Per il terzo giocatore la strategie debolmente dominante è giocare 1.

Soluzione. 1.3. Rimarrebbe equilibrio di Nash il solo punto (1,1,1).

Esercizio 2 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{1,2,3,4,5\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{1,2,3,4,5,6\}$. Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario:

- Se $|x-y|$ è pari vinci 1 euro (n.b. assumiamo 0 sia un numero pari);
- Se $|x-y|$ è dispari perdi 1 euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1, \ldots, 5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$ e $\xi_1^i = 0\ \forall i = 3, 4, 5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^5 = \frac{1}{3}$, $\xi_1^2 = \xi_1^4 = 0$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^3 = \frac{1}{3}, \xi_2^j = 0\ \forall j = 4, 5, 6$
- $\xi_2^j = \frac{1}{6}\ \forall j = 1, \ldots, 6$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^6)$ il vettore stocastico associato alle 6 possibili strategie pure del secondo giocatore).

2.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

2.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa.

2.3 Indica se alcune di queste strategie determinano un equilibrio di Nash.

2.4 Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuare il valore del gioco, spiega perché non è possibile).

Soluzione: La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{5} c_{ij} \xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 6$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1, \ldots, 5$ è $z = \frac{1}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore e in media, $\frac{1}{5}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$ e $\xi_1^i = 0\ \forall i = 3, 4, 5$ è $z = 0$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore e in media, 0 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^5 = \frac{1}{3}$, $\xi_1^2 = \xi_1^4 = 0$ è $z = 1$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore e in media, 1 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{6} c_{ij}\xi_2^j \ \ i = 1, \ldots, 5$$

$$\xi_2^j \geq 0 \ \ j = 1, \ldots, 6$$

$$\sum_{j=1}^{6} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^3 = \frac{1}{3}, \xi_2^j = 0 \ \forall j = 4, 5, 6$ è $-\frac{1}{3}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia paga, nel caso peggiore e in media, $\frac{1}{3}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{6} \ \forall j = 1, \ldots, 6$ è 0. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore e in media, 0 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(1/2, 1/2, 0, 0, 0) = w(1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ e quindi la strategia $(1/2, 1/2, 0, 0, 0)$ è conservativa per te e la strategia $(1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ è conservativa per il tuo avversario (e, le altre strategie che restituiscono un payoff atteso diverso da 0 non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è 0. Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 3 Nel consiglio di amministrazione di una società siedono cinque uomini e h donne (h dispari). Una decisione viene assunta se e solo se a suo favore vota sia la maggioranza stretta degli uomini (cioè almeno 3 uomini) che la maggioranza stretta delle donne (cioè almeno $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ donne).

3.1 Qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore se $h = 1$?

3.2 Qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore se $h = 3$?

Soluzione. 3.1. Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il deputato donna. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono tutte quelle in cui ella si trova in quarta, quinta e sesta posizione. Sappiamo che le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono $(6-1)!$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato donna è:

$$S_d(v) = \frac{3 \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda i deputati uomini, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di ciascun deputato uomo è:

$$S_i(v) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}.$$

Soluzione. 3.2. *Svoglimento intuitivo breve*. Come nel caso precedente gli uomini controlleranno complessivamente il 50% del potere e le donne controlleranno complessivamente il 50% del potere. Ovvero i 5 uomini si divideranno un fattore $\frac{1}{2}$, e quindi ciascun uomo avrà indice di Shapley $\frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10}$, e le 3 donne si divideranno l'altro fattore $\frac{1}{2}$, e quindi ciascuna donna avrà indice di Shapley $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$.

Svoglimento formale lungo. Prendiamo in considerazione il deputato donna. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono tutte quelle in cui ella si trova: in quinta posizione e nelle posizioni successive c'è esattamente una sola donna; in sesta posizione e nelle posizioni successive c'è esattamente una sola donna; in settima posizione e nelle posizioni successive c'è esattamente una sola donna.

Il primo termine corrisponde a contare le permutazioni con 5 uomini e 2 donne in cui nelle ultime tre posizioni c'è una sola donna. Siano d_1 e d_2 le due donne. Le permutazioni un cui una sola tra d_1 e d_2 è nelle ultime tre posizioni sono tutte quelle in cui d_1 e d_2 sono rispettivamente in posizione: 1,5; 1,6; 1,7; 2,5; 2,6; 2,7; 3,5; 3,6; 3,7; 4,5; 4,6; 4,7; 5,1; 6,1; 7,1; 5,2; 6,2; 7,2; 5,3; 6,3; 7,3; 5,4; 6,4; 7,4. Fissata uno qualunque di questi pattern, il numero di permutazioni per gli uomini è 5!. Quindi il numero totale è 24· 5!.

Il secondo termine corrisponde a contare le permutazioni con 5 uomini e 2 donne in cui nelle ultime due posizioni c'è una sola donna. Siano d_1 e d_2 le due donne. Le permutazioni un cui una sola tra d_1 e d_2 è nelle ultime due posizioni sono tutte quelle in cui d_1 e d_2 sono rispettivamente in posizione: 1,6; 1,7; 2,6; 2,7; 3,6; 3,7; 4,6; 4,7; 5,6; 5,7; 6,1; 7,1; 6,2; 7,2; 6,3; 7,3; 6,4; 7,4, 6,5; 7,5. Fissata uno qualunque di questi pattern, il numero di permutazioni per gli uomini è 5!. Quindi il numero totale è 20· 5!.

Il terzo termine corrisponde a contare le permutazioni con 5 uomini e 2 donne in cui in ultima posizione c'è una sola donna. Siano d_1 e d_2 le due donne. Le permutazioni un cui una sola tra d_1 e d_2 è nelle ultime due posizioni sono tutte quelle in cui d_1 e d_2 sono rispettivamente in posizione: 1,7; 2,7; 3,7; 4,7; 5,7; 6,7; 7,1; 7,2; 7,3; 7,4; 7,5; 7,6. Fissata uno qualunque di questi pattern, il numero di permutazioni per gli uomini è 5!. Quindi il numero totale è 12· 5!.

Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley del deputato donna è:

$$S_d(v) = \frac{24\cdot 5! + 20\cdot 5! + 12\cdot 5!}{8!} = \frac{1}{6}.$$

Per quanto riguarda i deputati uomini, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. La somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1, quindi possiamo concludere che il valore di Shapley di ciascun deputato uomo è:

$$S_i(v) = \frac{1}{5}\left(1 - 3\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{10}.$$

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : 0 \le x_1 \le 3\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -2 \le x_2 \le 27\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = (5-x_2)(3-x_1)$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(5x_1^2 - 6x_1) + 9$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di almeno un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response.

4.3 Individuare quindi gli equilibri di Nash del gioco, se essi esistono. (*NB* È sufficiente determinare gli eventuali equilibri di Nash per via grafica.)

Soluzione 4.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (5-x_2)(3-x_1)$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ \frac{1}{2}x_2^2 - x_2(5x_1^2 - 6x_1) + 9$$

$$-2 \leq x_2 \leq 27$$

Per determinare le funzioni best response dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} 3 & \text{se } -2 \leq x_2 < 5 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 & \text{se } x_2 = 5 \\ 0 & \text{se } 5 < x_2 \leq 27 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \ 5x_1^2 - 6x_1 \quad \text{se } 0 \leq x_1 \leq 3$$

4.3 Si può verificare graficamente o analiticamente che esiste un solo punto di intersezione delle best response function il punto $(\frac{3+\sqrt{34}}{5}, 5)$, che è quindi l'unico equilibrio di Nash.