- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**

- **Riferimenti**: Il riferimento principale è il testo di Osborne, capitoli 1 e 2. Le definizioni però sono tratte dal capitolo 2 delle dispense di Facchinei (tranne quelle di strategia debolmente e strettamente dominante, tratte dal testo di Osborne). I giochi Isp Routing Game, Pollution Game e Tragedy of the Commons sono dal testo di Nisan et al. (N.b. Per il testo di Osborne a volte sono riportati due diversi riferimenti: uno vale per i capitoli in download, uno vale per il testo "tradizionale".)

1 Giochi non-cooperativi

- Teoria dei giochi ci aiuta a intellegere quelle situazioni in cui *diversi* decisori interagiscono.

- Definizione gioco in forma normale: tripla $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{C_i\}_{i \in N}\}$: $N = \{1, \ldots, n\}$ insieme dei *giocatori*; $X_i \neq \emptyset$ insieme delle *strategie* (insieme *ammissibile*) del giocatore i; $C_i : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \mapsto \mathcal{R}_+$ *payoff*, in forma di *costo* (oppure *guadagno*).

- Parliamo di payoff, non di *vincitore/i* del gioco.

- Un vettore $(x_1, \ldots, x_n)$, con $x_i \in X_i$ per ogni i, è detto *stato* (ammissibile) o anche *punto* (ammissibile) del gioco.

1.1 Dilemma del prigioniero e simili

- Dilemma dei prigionieri (PD):

	Silent	*Confess*
Silent	$(2,2)$	$(5,1)$
Confess	$(1,5)$	$(4,4)$

- Osserviamo che per il primo giocatore (o per il secondo giocatore) esiste una strategia *dominante*: infatti qualunque cosa faccia l'altro giocatore, la cosa più conveniente è confessare. Tuttavia, per ciascun giocatore, il payoff nel caso in cui entrambi confessano è peggiore del payoff nel caso in cui entrambi rimangono in silenzio! Quindi la strategia dominante potrebbe non essere la strategia *migliore* per un giocatore. . .

- Giochi equivalenti al dilemma dei prigionieri: Isp routing game: le stategie sono Far (Silent) / Close (Confess) (n.b. il primo provider controlla la domanda $s_1 - t_1$, il secondo provider controlla $s_2 - t_2$, quindi le due strategie non sono del tutto equivalenti, perché si applicano a flussi diversi. Il payoff (costo) di ciascun giocatore è pari alla somma, presa su tutti gli archi del dominio di quel giocatore, del flusso su ciascun arco).

Giochi con payoff artificiali: Arms Race:

	Do not arm	*Arm*
Do not arm	$(0, 0)$	$(500, -500)$
Arm	$(-500, 500)$	$(100, 100)$

Giochi con payoff in forma di *guadagno*: Duopolio (High / Low).

	High	*Low*
High	$(1000, 1000)$	$(-200, 1200)$
Low	$(1200, -200)$	$(600, 600)$

- Assumiamo che: ogni giocatore conosca completamente le strategie e i payoff degli altri giocatori (*informazione completa*); ogni giocatore giochi la sua strategia simultaneamente (*gioco statico*); i giocatori non comunichino tra loro e scelgano la loro strategia individualmente (*gioco non cooperativo*).
- Gioco *finito* se ogni giocatore ha un numero finito di strategie.
- In questo corso assumiamo che il numero dei giocatori è finito.
- *Soluzione del gioco* Quale strategia sceglierà ciascun giocatore e quale sarà il vettore delle strategie risultante? Risposta non semplice e univoca.

1.2 Battle of sexes e simili

- Battle of the sexes (BoS):

	Football	*Exhibition*
Football	$(2, 1)$	$(0, 0)$
Exhibition	$(0, 0)$	$(1, 2)$

- Si noti come in questo gioco nessun giocatore abbia una strategia dominante!
- Giochi equivalenti a Battle of the sexes: due politici di uno stesso partito che devono prendere una posizione su un certo argomento; due aziende che si fondono e usano differenti sistemi operativi.
- Quale strategia sceglierà ciascun giocatore e quale sarà il vettore delle strategie risultante?

1.3 Strategie dominanti e ottimalità debole secondo Pareto

- Analizzeremo spesso il comportamento del giocatore i per una *data* scelta delle strategie degli altri giocatori. Definizione $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Per evidenziare variabile i-esima: (x_i, x_{-i}); per esempio $C_i(y_i, x_{-i}) = C_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

- Si definisce *best response* del giocatore i e si indica $B_i(x_{-i})$ l'*insieme* delle *migliori* strategie che il giocatore i può utilizzare se gli altri giocatori utilizzano la strategia x_{-i}, cioè $B_i(x_{-i}) = \{x'_i \in X_i : C_i(x'_i, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i}), \forall x_i \in X_i\}$.

- Formalizziamo il concetto di strategia dominante. Dato un gioco Γ (in forma di costo) una strategia $x'_i \in X_i$ è *debolmente dominante per il giocatore* i se, per ogni punto ammissibile (x_i, x_{-i}), con $x_i \neq x'_i$, risulta:

  $C_i(x'_i, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i})$.

  Analogamente:

  x_i è debolmente dominante per il giocatore i se e solo se $x_i \in B_i(x_{-i})$ per ogni $x_{-i} \in X_{-i}$.

- Strategia strettamente dominante: dato un gioco Γ (in forma di costo) una strategia $x'_i \in X_i$ è *strettamente dominante per il giocatore* i se per ogni punto ammissibile (x_i, x_{-i}), $x_i \neq x'_i$, risulta:

  $C_i(x'_i, x_{-i}) < C_i(x_i, x_{-i})$.

- Ottimo secondo Pareto. Dato un gioco Γ (in forma di costo), un punto ammissibile $x = (x_1, \dots, x_n)$ è un *ottimo debole di Pareto* se $\nexists$ un punto ammissibile x' tale che $C_i(x') < C_i(x)$, per ogni $i \in N$. In modo equivalente, possiamo dire che un punto ammissibile $x = (x_1, \dots, x_n)$ *non* è un ottimo debole secondo Pareto se esiste un altro punto ammissibile $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ tale che $C_i(x') < C_i(x)$, per ogni $i \in N$.

  Quindi, se un punto x è ottimo debole secondo Pareto, vuol dire che anche se i giocatori considerassero in modo "cooperativo" altri punti, esiste sempre un giocatore che non ha interesse a spostarsi da x.

  Ogni gioco finito ha almeno un punto che è ottimo debole secondo Pareto, per esempio consideriamo uno stato che minimizza il payoff di un certo giocatore. Quali sono i punti di ottimo deboli secondo Pareto per i precedenti giochi?

- In particolare se per un certo gioco ogni giocatore ha una strategia dominante e l'incrocio di queste strategie è un punto di ottimo debole secondo Pareto, allora possiamo immaginare che questa sarà la *probabile* soluzione del gioco. Il paradosso del gioco PD nasce dal fatto che il punto determinato dall'incrocio delle strategie debolmente dominanti dei giocatori *non* è un ottimo debole secondo Pareto! Che soluzione avrà questo gioco?

- E che soluzione avrà il gioco (BoS), dove i giocatori addirittura non hanno strategia dominante?

1.4 Equilibrio di Nash

- Come dicevamo prima, la risposta alle precedenti domande non è né semplice né univoca. Un concetto che ci aiuta è il seguente:
- Equilibrio di Nash: Dato un gioco Γ (in forma di costo) e un suo punto ammissibile $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. x^* è un equilibrio di Nash per Γ se risulta, per ogni $i \in N$:

$$C_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq C_i(x_i, x_{-i}^*),\ \forall x_i \in X_i.$$

- È possibile caratterizzare l'equilibrio di Nash utilizzando il concetto di best response: $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ è un equilibrio di Nash se e solo se $x_i^* \in B_i(x_{-i}^*)$ per ogni i.
- Interpretazione comportamentale: se un punto è un equilibrio di Nash, nessun giocatore può migliorare il proprio payoff modificando in modo *unilaterale* la propria strategia.
- Quali sono gli equilibri di Nash per i giochi precedenti?
- Osserviamo come, banalmente, se ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante, allora il punto incrocio delle strategie debolmente dominanti è un equilibrio di Nash. (Esempi di giochi con strategie dominanti: PD e simili.).

  Osserviamo anche che se ogni giocatore ha una strategia *strettamente* dominante allora il punto di incrocio di queste strategie è *l'unico* equilibrio di Nash del gioco.

  Tuttavia anche giochi senza strategie dominanti possono avere equilibri di Nash: BS e simili. Si noti anche che il gioco ha più equilibri di Nash (in casi come questo, a volte, si preferisce utilizzare definizioni differenti di equilibrio che possono condurre a individuare un unico punto di equilibrio).
- Quali dei giochi precedenti ha equilibri di Nash che sono ottimi deboli secondo Pareto? Osserviamo che il concetto di ottimo debole non è legato al concetto di equilibrio: per esempio, in PD l'equilibrio di Nash è l'unico punto che non è ottimo secondo Pareto!
- Interpretazione comportamentale: se un equilibrio di Nash è anche un ottimo debole di Pareto, esiste almeno un giocatore che non ha interesse a spostarsi dal punto anche *agendo in modo non unilaterale*, quindi la soluzione è abbastanza "stabile".
- È possibile che un gioco abbia più equilibri di Nash, di cui uno corrisponde a un vettore di strategie dominanti e l'altro no. Consideriamo un gioco in cui due giocatori possono decidere se recarsi all'aeroporto con una limousine o un taxi. La limousine costa 100, il taxi 50, ma se i giocatori scelgono lo stesso mezzo possono condividerlo e dividere la spesa. La matrice del gioco è quindi:

	Limo	*Taxi*
Limo	$(50, 50)$	$(100, 50)$
Taxi	$(50, 100)$	$(25, 25)$

Il gioco ha 2 equilibri di Nash, uno dei quali è indotto dalle strategie dominanti.

1.5 Altri Giochi

- Estensione del dilemma dei prigionieri a *molti giocatori*: Pollution game: (Controllo Emissioni/ Inquinamento). Se il giocatore i controlla emissioni aggiunge 3 unità al suo costo; se il giocatore i inquina aggiunge una unità di costo al payoff di *ciascun giocatore*.

  Consideriamo un qualunque stato in cui almeno un giocatore controlla le emissioni. Qual è il payoff di questo giocatore se k (naturalmente, $k < n$) giocatori inquinano? Un tale stato può essere un equilibrio di Nash?

  Evidenziare come in questo caso lo spazio dei punti ammissibili possa essere messo in corrispondenza 1-1 con i vertici del ipercubo n-dimensionale, se si assume: $x_i = 1$ se il giocatore i controlla le emissioni, $x_i = 0$ se il giocatore i inquina. Allora il payoff del giocatore i è pari a $C_i(x_1, \ldots, x_n) = 3x_i + \sum_{j=1..n}(1 - x_j)$.

  Osservare come $C_i(x_i, x_{-i}) = 2x_i + n - t$, dove $t = \sum_{j \neq i} x_j$. Segue facilmente che l'unico equilibrio di Nash del gioco è $(0, \ldots, 0)$. Osservare come l'equilibrio di Nash costi a ogni giocatore $n/3$ più di quanto costa la soluzione $(1, \ldots, 1)$ in cui nessuno inquina, che però non è stabile!

  Osservare anche come la scelta di inquinare è dominante per ciascun giocatore (il che dimostra di nuovo che $(0, \ldots, 0)$ è un equilibrio di Nash).

- Osservare come fino al pollution game abbiamo *rappresentato* i giochi elencando *tutte* le possibili strategie e, per ogni strategia, il payoff di ciascun giocatore (ovvero utilizzando delle matrici). Si osservi tuttavia che mentre per definire una singola istanza del pollution game bastano 3 numeri (numero di giocatori, costo dell'inquinamento, costo del controllo), il numero di strategie è pari a 2^n, e quindi una tale rappresentazione sarebbe esponenziale nel numero dei giocatori. La stessa cosa si applica a fortiori ai giochi infiniti, per cui una tale rappresentazione esplicita non può esistere. Questi argomenti diventano naturalmente cruciali per considerazioni di tipo algoritmico ...

- Un gioco non finito: Tragedy of the commons.

  Evidenziare come in questo caso lo spazio dei punti ammissibili possa essere messo in corrispondenza 1-1 con i punti del poliedro $\{x \in \mathcal{R}^n_+ : x_j \leq 1, \forall j\}$. Allora il payoff del giocatore i è pari a $C_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i(1 - \sum_{j \in N} x_j)$ se $\sum_{j \in N} x_j \leq 1$, 0 altrimenti.

Osservare come $C_i(x_i, x_{-i}) = x_i(1 - x_i - t)$, dove $t = \sum_{j \neq i} x_j$. Un punto ammissibile x^* è un equilibrio di Nash se e solo se x_i^* è un punto di massimo per $C_i(x_i, x_{-i}^*)$ per ogni i e quindi, studiando $C_i(x_i, x_{-i}^*)$, si vede facilmente che x^* è un equilibrio di Nash iff $x_i^* = \frac{1 - \sum_{j \neq i} x_j^*}{2}$ per ogni i. Risolvendo il sistema, segue che l'unico equilibrio di Nash è $(1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$. Osservare come l'equilibrio di Nash garantisca a ogni giocatore un utilità di circa $n/4$ minore di quella garantita dalla soluzione $(1/2n, \ldots, 1/2n)$, che però non è stabile!

Osservare come nel gioco Tragedy of the commons non c'è una strategia debolmente dominante per ciascun giocatore. Infatti, fissata la strategia x_{-i} degli altri giocatori, la strategia migliore per il giocatore i è : $x_i = \frac{1 - \sum_{j \neq i} x_j}{2}$.

- Matching Pennies:

	Testa	*Croce*
Testa	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Croce	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

- Il gioco precedente non ha equilibri di Nash. È inoltre un gioco che normalmente si gioca iterativamente: in questo caso la "strategia" più ragionevole per ogni giocatore è *randomizzare.* Torneremo poi su giochi di questo tipo.

1.6 Strategia conservativa

- Quale strategia alternativa potrebbe mettere in campo un giocatore che non ha (o anche che ha) una strategia dominante?

- Dato un insieme qualsiasi D (finito, infinito, chiuso etc.) e una funzione $f : D \mapsto R$, l'*estremo superiore* di f su D, $sup_{x \in D} f(x)$ è il più piccolo tra i numeri U: $f(x) \leq U, \forall x \in D$ (la f è illimitata superiormente su D, e convenzionalmente scriviamo $sup_{x \in D} f(x) = \infty$, se non esiste nessun U per cui la precedente vale). x^* è un *punto di massimo* per f su D se $f(x^*) = sup_{x \in D} f(x)$. Esempio e^x su $\mathcal{R}$ e su $[0, 1]$.

- Definizione di strategia minmax. Dato un gioco Γ (in forma di costo), un giocatore $i \in N$ e $x_i \in X_i$, definiamo $\tilde{C}_i(x_i) = \sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i, x_{-i})$, ovvero $\tilde{C}_i(x_i)$ è l'estremo superiore di quello che il giocatore i può trovarsi a dover pagare se gioca la strategia x_i. Una strategia $\bar{x}_i \in X_i$ è detta *strategia minmax o conservativa* per il giocatore i se risulta $\tilde{C}_i(\bar{x}_i) = \min_{x_i \in X_i} \tilde{C}_i(x_i)$. Scegliere $\bar{x}_i$ equivale a minimizzare quello che si dovrà pagare nel caso peggiore.

- Osservare che *per giochi finiti* la strategia conservativa esiste sempre e quindi naturalmente l'incrocio delle strategie conservative non corrisponde in generale a un equilibrio di Nash (infatti sappiamo che esistono giochi finiti che non hanno equilibri di Nash). Analizzare le strategie conservative dei giochi precedenti. In particolare, per giochi tipo PD, la strategia minmax porta in un equilibrio di Nash; per giochi tipo tragedy of commons e BoS ogni strategia è conservativa.

1.7 Relazione tra le varie definizioni

- Abbiamo introdotto tre importanti definizioni: strategia (debolmente) dominante; strategie conservativa; equilibrio di Nash. Analizziamo le relazioni tra queste definizioni

- Abbiamo già visto che se ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante, allora il punto incrocio delle strategie debolmente dominanti è un equilibrio di Nash. Inoltre non vale il viceversa: giochi senza strategie dominanti possono avere equilibri di Nash: BoS e simili.

- L'incrocio di strategie conservative (quando esistono) non determina un equilibrio di Nash: consideriamo MP per cui ogni strategia è conservativa ma nonci sono EN. E in ogni caso ci sono equilibri di Nash che non provengono dall'incrocio di strategie conservative, si veda il gioco Taxi-Limo.

- Una strategia conservativa non è necessariamente dominante dominante: in BoS ogni strategia è conservativa, ma non esistono strategie debolmente dominanti. Vale invece:

  Lemma. Dato un gioco Γ (qualsiasi), se per un giocatore i esiste una strategia debolmente dominante $x_i \in X_i$, allora x_i è anche una strategia conservativa per il giocatore i.

  Supponiamo infatti, per assurdo, che x_i' sia una strategia debolmente dominante per il giocatore i ma non conservativa. Allora esiste una strategia x_i'' tale che $\sup_{x_{-i}\in X_{-i}} C_i(x_i'', x_{-i}) < \sup_{x_{-i}\in X_{-i}} C_i(x_i', x_{-i})$. D'altro canto, poiché x_i' è una strategia debolmente dominante, allora per ogni $x_{-i} \in X_{-i}$, vale $C_i(x_i', x_{-i}) \leq C_i(x_i'', x_{-i})$, quindi da questo segue, facilmente, che $\sup_{x_{-i}\in X_{-i}} C_i(x_i'', x_{-i}) \geq \sup_{x_{-i}\in X_{-i}} C_i(x_i', x_{-i})$, una contraddizione.

1.8 Il concetto di payoff

- Abbiamo fin qui assunto che il payoff di ciascun giocatore sia parte del nostro input. In alcuni casi, tuttavia, c'è una certa arbitrarietà nella definizione di questi payoff (si pensi a BoS), e infatti la maggior parte dei nostri risultati prescinde dal valore esatto del payoff e dipende esclusivamente dall'*ordine* con il quale ciascun giocatore classifica i diversi stati del gioco.

- Infatti, in molti casi un giocatore non ha neanche una graduatorie *stretta* dei diversi stati del gioco (quello che si chiama un *ordine totale*) ma ha semplicemente alcune preferenze del tipo: uno stato è preferito a un altro, due stati sono indifferenti etc.

- Supponiamo quindi che, per ogni giocatore i, non sia data la funzione di payoff ma sia invece dato un *preordine totale* sugli stati del gioco. Un preordine totale è una relazione binaria, indicata nel seguito con R_i, definita, nel nostro caso, sull'insieme degli stati $\mathcal{X} = \{X_1 \times X_2 \times ... \times X_n\}$ tale che:

(i) Per ogni elemento $a \in \mathcal{X}$, vale aR_ia (*riflessività*).

(ii) Per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathcal{X}$ una delle seguenti tre vale: 1) aR_ib; 2) bR_ia; 3) aR_ib e bR_ia. Si noti che per due elementi (decisioni) *indifferenti* a e b, assumiano che contemporaneamente aR_ib e bR_ia.

(iii) Se aR_ib e bR_ic allora aR_ic.

- Il seguente teorema mostra il legame esistente tra il concetto di payoff equello di preordine totale. Teorema: Ogni funzionedi payoff induce un preordine totale e ogni preordine totale può essere rappresentato da una payoff function.