- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Capitolo 2 Dispense Facchinei; capitolo 15 del testo di Chvatal (in particolare il poker di Kuhn è illustrato a pag 235-237).

1 Estensione in strategia mista di un gioco

- Abbiamo caratterizzato quali giochi antagonistici (e strettamente competitivi) ammettono equilibri di Nash.
- Ricordiamo che un gioco antagonista (finito) è simmetrico se la matrice C dei payoff è anti-simmetrica. Naturalmente, in un gioco simmetrico, il payoff $\tilde{C}_1(\bar{x}_1)$ garantito al primo giocatore da una strategia conservativa ha lo stesso valore del payoff $\tilde{C}_2(\bar{x}_2)$ garantito al secondo giocatore da una strategia consevativa $\bar{x}_2$! Quindi un gioco simmetrico ha un equilibrio di Nash se e solo se $\tilde{C}_1(\bar{x}_1) = -\tilde{C}_2(\bar{x}_2) = 0$.

  Non è questo, per esmpio, il caso della morra dove $\tilde{C}_1(\bar{x}_1)$ e $\tilde{C}_2(\bar{x}_2)$ valgono -2, e il gioco non ha equilibri di Nash (Osserviamo che per la morra la matrice di payoff è scritta nella forma di utilità , quindi la strategia conservativa è una strategia di max min, i.e. $\tilde{C}_1(\bar{x}_1) = \max_{x_i \in X_i} \tilde{C}_i(x_i) = \max_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i, x_{-i})$).
- Tuttavia i giochi come la morra si giocano iterativamente ...
- Definizione *estensione in strategia mista di un gioco*. Dato un gioco *finito* in forma normale $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{C_i\}_{i \in N}\}$, con $X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{m_i}\}$, l'estensione in strategia mista di Γ è un nuovo gioco *infinito* $\overline{\Gamma} = \{N, \{\overline{X}_i\}_{i \in N}, \{\overline{C}_i\}_{i \in N}\}$, definito da:

  $\overline{X}_i = \{\xi_i \equiv (\xi_i^1, \ldots, \xi_i^{m_i}) \in \mathcal{R}^{m_i} : \xi_i \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} \xi_i^j = 1\}$;

  $\overline{C}_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i_1=1}^{m_i} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} C_i(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n}$.
- Gli elementi di ciascun insieme $\overline{X}_i$ sono chiamati *strategie miste*.

  Sia $j \in \{1, \ldots, m^i\}$. La strategia mista del giocatore i tale che $\xi_i^j = 1$ e $\xi_i^h = 0$ per $h \neq j$, corrisponde alla strategia x_i^j del gioco Γ. Queste strategie sono chiamate *strategie pure.*
- Per esempio, per il gioco della morra, se per il primo giocatore abbiamo $\xi_1 = (1/4, 0, 1/4, 1/2)$ e per il secondo giocatore $\xi_2 = (1/3, 0, 1/3, 1/3)$ abbiamo $\overline{C}_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (1/4, 0, 1/4, 1/2)^T C(1/3, 0, 1/3, 1/3) = 1/3$.
- È possibile estendere in strategia mista un *qualunque* gioco finito. Ci concentriamo adesso sull'estensione in strategia mista di un gioco antagonista finito.

2 Estensione in strategia mista di un gioco antagonistico e teorema di Von Neumann

Innanzitutto osserviamo che l'estensione in strategia mista di un gioco antagonista è anch'esso un gioco antagonista (infinito). Vediamo se questo gioco ha equilibri di Nash.

- Le condizioni sotto cui un gioco antagonista (infinito) ammette un equilibrio di Nash sono: (i) $\sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2 = \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$; (ii) esiste una strategia conservativa per il primo giocatore, i.e. $\exists \xi_1^* \in \overline{X}_1 : \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^{*T} C \xi_2$; (iii) esiste una strategie conservative per il secondo giocatore.

- Ricordiamo che per il teorema di Weierstrass una funzione continua su un insieme chiuso e limitato ha (almeno) un punto di minimo e (almeno) un punto di massimo. Poiché $\overline{X}_2$ è chiuso e limitato e, fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, $\xi_1^T C \xi_2$ è una funzione continua su $\overline{X}_2$, allora abbiamo che $\sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$. È facile verificare che $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$ è continua su $\overline{X}_1$, quindi applicando di nuovo il teorema di Weierstrass segue che $\exists \xi_1^* \in \overline{X}_1 : \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^{*T} C \xi_2$ e il primo giocatore ha una strategia conservativa. Analogamente, è facile verificare che anche per il secondo giocatore esiste una strategia conservativa.

- Nell'estensione in strategia mista di un gioco antagonistico esistono quindi sempre strategie conservative (ξ_1^*, ξ_2^*) per entrambi i giocatori. Rimane da dimostrare che vale la (i) che possiamo riscrivere:

  $(\tilde{C}_1(\xi_1^*) =)\ \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2\ (= -\tilde{C}_2(\xi_2^*))$.

- Cominciamo con il calcolare il termine $\min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$. È facile vedere che, fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, allora $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \sum_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j = \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i$, ovvero la migliore risposta del secondo giocatore alla strategia $\xi_1 \in \overline{X}_1$ del primo giocatore è una strategia pura. Dim:

  $\sum_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j = \sum_{j=1..m_2} \xi_2^j \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i \leq \sum_{j=1..m_2} \xi_2^j \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i =$
  $= (\sum_{j=1..m_2} \xi_2^j) \cdot (\max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i) = \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i$.

  Dim alternativa: fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, vogliamo trovare ξ_2 che sia una soluzione ottima per il seguente problema: $\max \xi_1^T C \xi_2$ con $\xi_2 : \xi_2 \geq 0, \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1$. Si osservi che la funzione obiettivo è lineare e l'insieme ammissibile $\xi_2 : \xi_2 \geq 0, \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1$ è un poliedro. È un poliedro molto semplice che va sotto il nome di *simplesso* e i cui vertici, come è facile verificare, sono tutti e soli i punti $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots (0, 0, \ldots, 0, 1)$, cioè le strategie pure del secondo giocatore.

- Abbiamo quindi: $\min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{j \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i \equiv$

  $$
  \begin{array}{ll}
  \equiv \min \max_{j \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ij}\xi_1^i & \\
  & \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\
  & \xi_1^i \geq 0, \quad i = 1..m_1 \\
  \equiv \min & z \\
  & z \geq \sum_{i=1..m_1} c_{ij}\xi_1^i, j = 1..m_2 \\
  & \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\
  & \xi_1^i \geq 0, \quad i = 1..m_1
  \end{array}
  $$

- Si noti che la risoluzione del precedente problema (un problema di Programmazione Lineare!) restituisce la strategia conservativa ξ_1^* del primo giocatore. Per la morra, per esempio, $\xi_1^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$.

- Calcoliamo adesso il termine $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2$. Procedendo come prima, $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij}\xi_2^j \equiv$

  $$
  \begin{array}{ll}
  \equiv \max \min_{i \in \{1,\ldots,m_1\}} \sum_{j=1..m_2} c_{ij}\xi_2^j & \\
  & \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\
  & \xi_2^j \geq 0, \quad j = 1..m_2 \\
  \equiv \max & w \\
  & w \leq \sum_{j=1..m_2} c_{ij}\xi_2^j, i = 1..m_1 \\
  & \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\
  & \xi_2^j \geq 0, \quad j = 1..m_2
  \end{array}
  $$

- Notiamo che il problema $\max z$ è il duale del problema $\min w$ e che entrambi hanno soluzioni ammissibili (infatti, abbiamo già osservato che strategie conservative esistono per entrambi i giocatori). Segue quindi che entrambi i problemi hanno un ottimo finito e all'ottimo abbiamo $z^* = w^*$. Sono quindi soddisfatte le condizioni per l'esistenza di un equilibrio di Nash, ovvero: *l'estensione in strategia mista di un gioco antagonista ha* sempre *un equilibrio di Nash.*

- Ricordiamo anche che $w^* = -\tilde{C}_2(\xi_2^*)$ e che la risoluzione del secondo PL restituisce la strategia conservativa ξ_2^* del secondo giocatore. Per la morra, per esempio, $\xi_2^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$.

- Il valore $z^* = w^*$ è detto valore del gioco. Un gioco a valore zero è detto *fair*. Naturalmente, ogni gioco è simmetrico è fair, ma esistono giochi fair non simmetrici. Il valore di un gioco ci dice quindi qual e' il payoff che ci possiamo "ragionevolmente aspettare" se giochiamo quel gioco.

Una conseguenza non banale del teorema appena dimostrato è che in un qualunque gioco antagonista giocato in modo randomizzato, per ciascun giocatore esiste una strategia (la strategia $\min\max$) che può essere dichiarata in anticipo senza ledere le proprie prospettive future!

- In effetti il senso più profondo del teorema appena dimostrato – la possibilità per ogni giocatore di comunicare la propria strategia senza ledere le proprie possibilità – prescinde dalla considerazione che l'incrocio di queste strategie restituisce un equilibrio di Nash. In fatti questo teorema venne dimostrato nel 1928, molti anni da Von Neumann prima che Nash introducesse il suo concetto di equilibrio, e va sotto il nome di Th di Von Neumann:

  Per ogni matrice A $(m \times n)$ esiste un vettore stocastico riga x^* e un vettore stocastico colonna y^* tale che $\min_x xAy^* = \max_y x^*Ay$, dove il minimo e il massimo sono presi su tutti i vettori stocastici di dimensione rispettivamente m e n.

  (Un *vettore stocastico* è un vettore non negativo tale che la somma delle sue componenti è pari a 1).

3 Il poker di Kuhn

- In molti giochi bluffare (o underbid) è una possibilità importante. Pensiamo ai giochi antagonistici. Può avere senso in un gioco antagonista bluffare? I risultati precedenti dimostrano che la strategia (mista) conservativa per giochi antagonistici è una strategia molto "solida", la domanda quindi potrebbe essere: una strategia conservativa per un gioco antagonista può prevedere il bluff?

- Il poker di Kuhn. Osservare come, indipendentemente dalle carte che ricevono i giocatori, esisitono 5 possibili svolgimenti del gioco: A passa, B passa: carta più alta vince 1; A passa, B gioca, A passa: B vince 1; A passa, B gioca, A gioca: carta più alta vince 2; A gioca, B passa: A vince 1; A gioca, B gioca: carta più alta vince 2.

- Osservare come, per ogni carta che riceve, il giocatore A ha tre possibili *scelte*: passare, e se B scommette, rinunciare; passare, e se B scommette, scommettere; scommettere. Per esempio A potrebbe decidere di utilizzare la prima scelta se ha un 1; la seconda se ha un 2; la terza se ha un 3: possiamo rappresentare questa *strategia* (pura) con il vettore (1,2,3). In alternativa A potrebbe decidere di utilizzare la terza scelta se ha un 1 (bluffando), la terza se ha un 2 e la seconda se ha un 3 (underbid): possiamo rappresentare questa *strategia* (pura) con il vettore (3,3,2). Naturalmente il numero di strategie possibili per A è pari a 27.

- Analogamente, per ogni carta che riceve, il giocatore B ha quattro possibili *scelte*: non scommettere in qualunque caso; passare se A passa, scomettere se A scommette;

scommettere se A passa, passare se A scomette; scommettere in qualunque caso. Possiamo rappresentare quindi le strategie pure di A con una tripla in cui ogni elemento è un intero tra 1 e 4: naturalmente il numero di strategie possibili per B è pari a 64.

- Determiniamo il payoff di A nel caso in cui A giochi (3,1,2) e B giochi (1,2,4). Naturalmente, per quello che riguarda la distribuzione delle carte, ci sono 6 scenari possibili che assumiamo equiprobabili, ovvero con probabilità $\frac{1}{6}$. Segue che il payoff di A è $-\frac{1}{3}$. Risolvendo il gioco, si osserva che la strategia (mista) conservativa per il giocatore A è : (1,1,2) con valore $\frac{1}{3}$; (1,2,3) con valore $\frac{1}{2}$; (3,1,2) con valore $\frac{1}{6}$. Ovvero: con carta 1, 5 volte su 6 prima scelta e 1 volta su 6 terza scelta ; con carta 2, 1 volta su 2 prima scelta e 1 volta su 2 seconda scelta; con carta 3, 1 volta su 2 seconda scelta e 1 volta su 2 terza scelta. Il valore del gioco è $-\frac{1}{18}$.

  Per quanto riguarda il secondo giocatore, la strategia conservativa si traduce nelle seguenti scelte: con carta 1, 2 volte su 3 prima scelta e 1 volta su 3 terza scelta ; con carta 2, 2 volte su 3 prima scelta e 1 volta su 3 seconda scelta; con carta 3, sempre quarta scelta. Il valore del gioco è $-\frac{1}{18}$.

- Notare come la strategia conservativa preveda sia il bluff che l'underbid!

4 Cosa si conserva nel passaggio da un gioco puro a un gioco misto?

Consideriamo un gioco antagonistico finito in strategia pura. In generale:

- Per ciascun giocatore non è detto che esistano strategie debolmente dominanti. Se esistono saranno anche strategie debolmente dominanti per il gioco misto.

- Non è detto che esistano equilibri di Nash e quindi non è detto il gioco abbia un valore. Se ci sono, sono equilibri di Nash anche per il gioco misto. Inoltre se ci sono più equilibri di Nash il valore del payoff in ognuno di questi punti è lo stesso (si ricordi la proprietà di rettangolarità !), ed è pari al valoredel gioco.

- Esistono sempre strategie conservative, ma non è detto che queste siano strategie conservative per il gioco misto. Questo accade se e solo se, detta x_1 la strategia conservativa del primo giocatore e x_2 la strategia conservativa del secondo giocatore, vale $\tilde{C}_1(x_1) = -\tilde{C}_2(x_2)$.

- Perché strategie debolmente dominanti ed equilibri di Nash si conservano mentre le strategie conservative non si conservano? Tutto segue (con qualche semplice ragionamento...) dai seguenti fatti:

- se nel gioco puro una strategia, per esempio x_1^i del primo giocatore, è una migliore risposta a una strategia x_2^j del secondo giocatore, anche nel gioco misto x_1^i (espressa come vettore) è una migliore risposta a x_2^j (espressa come vettore)
- se nel gioco puro una strategia, per esempio x_1^i del primo giocatore, è una migliore risposta a qualsiasi strategia del secondo giocatore, anche nel gioco misto x_1^i (espressa come vettore) è una migliore risposta a qualsiasi strategia del secondo giocatore.