- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Capitolo 3 Dispense Facchinei, seguite in modo quasi pedissequo.
- Giochi *cooperativi.* In un gioco cooperativo gruppi di giocatori possono *coalizzarsi* e garantire alla *coalizione* una certa *utilità* (n.b. per i giochi cooperativi in genere si parla di utilità e non di costo!).
- Due giocatori A e B producono guanti, e.g. lavorando a maglia. I guanti sono di misura unica e, per semplicità, ogni guanto può essere usato sia per la mano destra che per la mano sinistra. I guanti possono essere venduti solo a coppie e ogni coppia di guanti può essere venduta a 5 euro. Ogni giocatore ha prodotto 3 guanti. Dal punto di vista delle coalizioni la situazione può essere sintetizzata dalla seguente tabella:

coalizione	*utilità*
$\emptyset$	0
$\{A\}$	5
$\{B\}$	5
$\{A, B\}$	15

- Tre musicisti: cantante (1), pianista (2), batterista (3). I tre possono esibirsi in un locale e, a seconda della formazione con cui si presentano, si possono assicurare una certa utilità secondo la seguente tabella:

coalizione	*utilità*
$\emptyset$	0
$\{1\}$	20
$\{2\}$	30
$\{3\}$	0
$\{1, 2\}$	80
$\{1, 3\}$	50
$\{2, 3\}$	65
$\{1, 2, 3\}$	100

- Tranne poche eccezioni i giochi fin qui considerati erano non-cooperativi, o per definizione (e.g. il gioco della morra e gli altri giochi "ricreativi") o forzatamente (e.g. nel dilemma del prigioniero, abbiamo assunto che i sospetti non potessero "collaborare"). Abbiamo cioè escluso che uno o più gruppi di giocatori potessero accordarsi tra loro e formare delle coalizioni: questa restrizione viene appunto rimossa nei giochi cooperativi.

- Un gioco cooperativo, *con utilità trasferibile*, è definito da una coppia (N, v). N è l'insieme dei giocatori; $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è una funzione che associa ad ogni sottoinsieme S di N un utilità $v(S)$ ed è tale che $v(\emptyset) = 0$. Ciascun sottoinsieme di S è detto *coalizione* e l'insieme N di tutti i giocatori è la *grande coalizione*.

  L'utilità è trasferibile nel senso che per ogni coalizione, l'utilità è definita in modo *cumulativo*, assumendo implicitamente che questa utilità possa essere distribuita in un qualunque modo tra i membri della coalizione. Nei giochi cooperativi con utilità *non* trasferibile, invece, per ogni coalizione, per esempio $\{1, 2\}$, viene fornito l'insieme delle possibili utilità di ciascun giocatore della coalizione, per esempio (3,4), (2, 6), (4, 2), ma non ci occupiamo di questi giochi.

- Nel seguito, gioco cooperativo $\equiv$ gioco cooperativo con utilità trasferibile.

- Storicamente, l'analisi di un gioco cooperativo si concentra, piuttosto che sul "cosa faranno i giocatori", su: 1) "quali coalizioni si formano" (e come si formano); 2) quale possa essere una soluzione del gioco accettata da tutti i giocatori.

  Per il primo problema si assume che i giocatori sceglieranno le coalizioni in base alla loro stima sul modo in cui l'utilità di una certa coalizione sarà ripartita tra i giocatori. Noi tuttavia assumeremo implicitamente che i giocatori formino la grande coalizione e quindi ci concentreremo esclusivamente sul secondo problema, quello di definire una soluzione del gioco che possa essere accettata da tutti i giocatori, in modo che la grande coalizione sia *stabile*

  L'assunzione che i giocatori siano portati a scegliere la grande coalizione è fondata sulla proprietà di *super-additività* nella funzione di utilità, che in questo caso viene detta funzione caratteristica.

- Sia N un insieme (per esempio, di giocatori). Indichiamo con 2^N la famiglia di tutti i sottoinsiemi di N. Una funzione $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è una *funzione caratteristica* se soddisfa le seguenti proprietà :

  - (i) $v(\emptyset) = 0$;
  - (ii) $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$

- Una funzione $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è una funzione caratteristica se e solo se:

  - (j) $v(\emptyset) = 0$;
  - (jj) $\sum_{i=1..h} v(S_i) \leq v(Q)$ per ogni $Q \subseteq N$ e partizione di Q in classi $S_1, \ldots, S_h$.

  Sufficienza: banale. Necessità: consideriamo $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1}$ e $T = S_h$, allora da [ii] vale $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1}) + v(S_h) \leq v(Q)$. Analogamente, $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-2}) + v(S_{h-1}) \leq v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1})$. Quindi $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-2}) + v(S_{h-1}) + v(S_h) \leq v(Q)$. Etc.

- La nostra analisi si concentra su quale possa essere una soluzione del gioco accettata da tutti i giocatori, ovvero quale possa essere una possibile distribuzione tra i giocatori della massima utilità disponibile $v(N)$.
- Un'*imputazione* per un gioco cooperativo (N, v) è un vettore $\alpha \in \mathcal{R}_+^N$, dove α_i è il *payoff* assegnato dall'imputazione al giocatore i, che soddisfa le seguenti proprietà :
  - (i) $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$ – *razionalità individuale*;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$ – *razionalità collettiva*
- Osserviamo che per la proprietà di superadditività vale: $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$, quindi segue facilmente che l'insieme delle imputazioni di un gioco cooperativo è sempre non vuoto.
- Un'imputazione assegna a ciascun giocatore un payoff e rappresenta un possibile esito del gioco. Se fossimo in un gioco non cooperativo, ci chiederemmo se questa soluzione ha qualche proprietà di stabilità rispetto le possibili azioni dei giocatori. In un gioco cooperativo ci chiediamo se questa soluzione è stabile *rispetto le utilità delle singole coalizioni*. Per esempio per il gioco dei musicisti una possibile imputazione attribuisce $\frac{100}{3}$ a tutti i giocatori. Osserviamo tuttavia che questa coalizione non é stabile perché l'utilità della coalizione $\{1, 2\}$ è superiore alla somma dei payoff assegnati a ciascun giocatore della coalizione: la coalizione $\{1, 2\}$ romperà quindi la grande coalizione.

  Questo conduce alla definizione di nucleo di un gioco cooperativo.
- Il *nucleo* di un gioco cooperativo è l'insieme dei vettori $\alpha \in \mathcal{R}_+^N$ che soddisfano le seguenti proprietà :
  - (i) $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S)$, per ogni $S \subseteq N$;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$.
- Naturalmente, ogni soluzione nel nucleo è un'imputazione, ma come abbiamo visto non vale il viceversa. In particolare, se un'imputazione non è nel nucleo, esiste $T \subset N$: $\sum_{i \in T} \alpha_i < v(T)$. Cioè, l'utilità della coalizione T è superiore alla somma dei payoff assegnati a ciascun giocatore: la coalizione T romperà quindi la grande coalizione.

  Viceversa, per un'imputazione nel nucleo nessuna coalizione ha un incentivo a rompere la grande coalizione.
- Per definizione, il nucleo di un gioco cooperativo è l'insieme di soluzioni di un sistema di $2^{|N|} - 1$ disequazioni e una equazione: ovvero un poliedro.
- Per il gioco dei guanti, si verifica facilmente che il nucleo è un segmento con vertici $(10, 5)$ e $(5, 10)$, ovvero ogni punto del tipo $(5 + \beta, 10 - \beta)$, con $0 \leq \beta \leq 5$.

- Per il gioco dei musicisti, il nucleo è un triangolo con vertici $(35, 45, 20)$ e $(35, 50, 15)$ e $(30, 50, 20)$.

- Consideriamo il gioco con $N = \{1, 2, 3\}$ e $v : v(\emptyset) = 0$; $v(S) = 0$, se $|S| = 1$; $v(S) = \rho$, se $|S| = 2$; $v(N) = 1$, con $0 \leq \rho \leq 1$.

  v è una funzione caratteristica, quindi (N, v) è un gioco cooperativo. Si verifica facilmente che il nucleo è non vuoto se e solo se $0 \leq \rho \leq 2/3$. Infatti i vincoli che determinano il nucleo sono (scartiamo i vincoli banalmente soddisfatti): $x_1 + x_2 \geq \rho$; $x_2 + x_3 \geq \rho$; $x_1 + x_3 \geq \rho$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ora, se sommiamo i tre vincoli di disuguaglianza, otteniamo: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3\rho$; quindi poiché $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ segue che $2 \geq 3\rho$. Quindi il nucleo è vuoto se $\rho > 2/3$. D'altro canto, se $0 \leq \rho \leq 2/3$ allora $(1/3, 1/3, 1/3)$ è sempre un'imputazione nel nucleo, che quindi è non vuoto.

  Osserviamo infine che per $\rho = 2/3$ il nucleo è costituito dall'unica imputazione $(1/3, 1/3, 1/3)$.

- Quindi malgrado l'ipotesi di superadditività garantisca l'esistenza di imputazioni, essa in generale non garantisce che il nucleo sia non vuoto.

- Poiché il nucleo del gioco è un poliedro, si vede che sono possibili 3 casi: il nucleo è vuoto; il nucleo è costituito da un unico punto, il nucleo è costituito da un insieme infinito di punti. In ogni caso, per verificare se il nucleo di un gioco è vuoto è sufficiente svolgere la fase uno del metodo del simplesso.

- Se il nucleo è costituito da un unico punto, allora esiste un unico vettore di payoff che garantisce la "robustezza" della grande coalizione e, dal punto di visto della teoria dei giochi, non c'è molto da fare. Naturalmente siamo però interessati a *riconoscere* un tale caso, magari senza dovere passare attraverso la fase uno del metodo del simplesso. Un caso in cui questo accade certamente è quando l'ipotesi di super-additività è sostituita da quella di additività: in questo caso, parliamo di *gioco inessenziale*. Il prossimo lemma illustra come ci sono tre diversi modi di caratterizzare (o di definire) un gioco inessenziale.

- **Lemma.** Sia (N, v) un gioco cooperativo. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti e caratterizzano i giochi inessenziali:

  (i) $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$ per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$ (additività).

  (ii) $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.

  (iii) Il nucleo è non vuoto ed è cosituito dall'unica imputazione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$.

  Dim. $(i) \to (ii)$. Applicando ricorsivamente la (i), si ha che $\sum_{i=1..h} v(S_i) = v(Q)$, per ogni $Q \subseteq N$ e partizione di Q in classi $S_1, \ldots, S_h$. In particolare, $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.

  $(ii) \to (i)$. Innanzitutto mostriamo che $\forall S \subseteq N$ vale $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Infatti, dalla super-additività valgono: $v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N)$; $\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq$

$v(S)$; $\sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) \leq v(N \setminus S)$. Poiché $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) \leq v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N)$, segue che $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.

Banalmente segue che per $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$, vale $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$.

$(ii) \rightarrow (iii)$. Abbiamo dimostrato la (ii) implica che $\forall S \subseteq N$ vale $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Allora l'imputazione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$ è nel nucleo: infatti, per ogni $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} \alpha_i = \sum_{i \in S} v(\{i\}) = v(S)$.

Inoltre, se esistesse una diversa imputazione β nel nucleo, poiché $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = v(N)$, dovrebbe esistere $j \in N$ tale che $\alpha_j > \beta_j$: ma allora $\beta_j < \alpha_j = v(\{j\})$, e quindi β non sarebbe un'imputazione.

$(iii) \rightarrow (ii)$. Poiché α è un'imputazione $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = \sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$.

- Il lemma precedente mostra come il nucleo di un gioco inessenziale è costituito da un solo punto. Osserviamo tuttavia che ci sono dei giochi il cui nucleo è costituito da un solo punto, ma che non sono inessenziali. Per esempio, abbiamo visto che per il gioco del ρ con $\rho = \frac{2}{3}$ l'unica imputazione nel nucleo è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, e quindi il nucleo del gioco è fatto da un'unica imputazione, ma il gioco non è inessenziale (infatti non è additivo).

- Il nucleo di un gioco cooperativo può essere vuoto o cosituito da un numero infinito di punti (o, come per i giochi inessenziali, da un solo punto). Più avanti ci occuperemo di possibili soluzione di un gioco cooperativo che hanno la caratteristica di esistere *sempre* e di essere sempre definite *univocamente*. Parleremo prima di nucleolo e poi di valore di Shapley.

0.1 Facility Location Game

Consideriamo il problema del *facility location* in cui un insieme N di utenti deve accedere ad un certo servizio. Il servizio può essere erogato in diversi centri e C è l'insieme di tutti i centri. L'erogazione del servizio ha i seguenti costi: ciascun utente $i \in N$ può servirsi presso un centro j *aperto* con un costo pari a c_{ij}, mentre per ogni centro $j \in C$ il costo di apertura è pari a f_j.

Il problema del facility location può essere risolto attraverso il seguente problema di PLI:

$$\min \sum_{j \in C} f_j y_j + \sum_{i \in N} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1,\ i \in N$$

$$x_{ij} \leq y_j,\ i \in N, j \in C$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, i \in N, j \in C$$

Siamo qui interessati a come *ripartire* tra gli utenti di N il costo della soluzione ottima del problema precedente. Per questo formuliamo il seguente gioco cooperativo:

– i giocatori sono gli utenti;

– per ciascuna coalizione $S \subseteq N$ il valore $v(N)$ della coalizione è pari a quanto costerebbe attivare il servizio per i soli utenti di S, ovvero è pari al valore della soluzione ottima del seguente problema di PLI:

$$
\begin{aligned}
v(S) = \min \textstyle\sum_{j \in C} f_j y_j + \sum_{i \in S} \sum_{j \in C} c_{ij} x_{ij} & \\
\textstyle\sum_{j \in C} x_{ij} = 1,\ i \in S & \\
x_{ij} \leq y_j,\ i \in S, j \in C & \\
x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, i \in S, j \in C &
\end{aligned}
$$

Nel seguito sfruttiamo la seguente osservazione: fissato $S \subseteq N$ il problema si riduce a *quali centri aprire* per servire S: una volta scelto l'insieme dei centri da aprire, ciascun utente $i \in S$ si rivolgerà al centro, tra quelli aperti, per cui è minimo il costo di servizio c_{ij}.

Notiamo che la funzione v così definita è sub-additiva (siamo in forma di costo, per cui la super-additività è rimpiazzata dalla sub-additività!). Infatti, prese due coalizioni disgiunte S e T, siano rispettivamente $C(S)$ e $C(T)$ i centri aperti nelle soluzioni ottime del precedente programma risolto rispetto S e T. È immediato vedere che servendo ciascun utente i della coalizione $S \cup T$ presso il centro $j \in C(S) \cup C(T)$ che minimizza c_{ij}, sarebbe possibile attivare il servizio per la coalizione $S \cup T$ con un costo $\bar{c} \leq v(S) + v(T)$. Naturalmente il costo ottimo $v(S \cup T)$ di attivazione del servizio per la coalizione $v(S \cup T)$ – che possiamo ottenere risolvendo il precedente programma rispetto $S \cup T$ – è tale che $v(S \cup T) \leq \bar{c} \leq v(S) + v(T)$. Per cui $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$.

- Consideriamo per esempio quindi il caso in cui $N = \{A, B, C\}$ e $J = \{1, 2\}$ con $f_1 = f_2 = 2$, $c_{A,1} = 2$, $c_{A,2} = 5$, $c_{B,1} = 2$, $c_{B,2} = 1$, $c_{C,1} = 4$ e $c_{C,2} = 1$. Possiamo calcolare $v(\emptyset) = 0$; $v(\{A\}) = 4; v(\{B\}) = 3; v(\{C\}) = 3; v(\{A, B\}) = 6; v(\{A, C\}) = 7; v(\{B, C\}) = 4; v(N) = 8$. È immediato verificare che la allocazione $\alpha = (4, 2, 2)$ è nel nucleo del gioco che è quindi non vuoto.

- Consideriamo ora che una nuova facility sia disponibile, per cui $J = \{1, 2, 3\}$, con $f_3 = 3$, $c_{A,3} = 1$, $c_{B,3} = 5$, $c_{C,3} = 1$, mentre gli altri costi rimangono invariati. Possiamo calcolare ora $v(\emptyset) = 0$; $v(\{A\}) = 4; v(\{B\}) = 3; v(\{C\}) = 3; v(\{A, B\}) = 6; v(\{A, C\}) = 5; v(\{B, C\}) = 4; v(N) = 8$. È immediato verificare che il nucleo è ora vuoto poiché una evetuale allocazione nel nucleo dovrebbe soddisfare $\alpha_a + \alpha_b \leq 6$; $\alpha_a + \alpha_c \leq 5$; $\alpha_b + \alpha_c \leq 4$; quindi sommando le tre disequazioni $2(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c) \leq 15$, che è in contraddizione con $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c = v(N) = 8$.

0.2 Teorema di Bondareva-Shapley

- Riconsideriamo il gioco con il fattore ρ. È evidente che, per valori di $\rho > 2/3$ il problema nasce dall'alta utilità associata alle coalizioni con due giocatori. Più in generale, possiamo immaginare di avere problemi quando molte coalizioni "larghe" hanno una utilità prossima a $v(N)$ (i.e. "molto potere").

- Inidchiamo con $\mathcal{N}_p$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi *propri* di N, ovvero i sottoinsiemi diversi da N e $\emptyset$.

  Un vettore $\lambda : \mathcal{N}_p \mapsto \mathcal{R}_+$ è un vettore *bilanciato* di pesi, se, per ogni $i \in N$, vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = 1$.

- Alcuni esempi di vettori bilanciati. Per $N = \{1, 2, 3\}$: 1) $\lambda_S = 0$, se $|S| = 2$; $\lambda_S = 1$, se $|S| = 1$. 2) $\lambda_S = 0$, se $|S| = 1$; $\lambda_S = 1/2$, se $|S| = 2$. 3) $\lambda_{\{1\}} = \lambda_{\{2\}} = 1/4, \lambda_{\{3\}} = 1/2, \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{2,3\}} = 1/4, \lambda_{\{1,2\}} = 1/2$.

- Osserviamo che se λ è un vettore bilanciato, allora sommando i vincoli $\lambda_s \sum_{i \in S} \alpha_i \geq \lambda_S v(S)$, per ogni $S \subseteq \mathcal{N}_p$, segue che deve valere $\sum_{i \in N} \alpha_i \geq \lambda_S v(S)$. Naturalmente, se quest'ultima quantità è maggiore di $v(N)$ allora il gioco ha nucleo vuoto. Per esempio, per il gioco del ρ utilizzando il vettore bilanciato $(0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ ritroviamo che condizione necessaria perché il gioco sia bilanciato è che $\rho \leq 2/3$ (ma abbiamo anche dimostrato che la condizione è anche sufficiente).

  Questa osservazione è alla base di una caratterizzazione dei giochi con nucleo vuoto.

- Un gioco è *bilanciato* se $\forall$ vettore bilanciato di pesi λ vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

- Th (Bondareva-Shapley). Un gioco cooperativo (N, v) ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.

  Dim. Banalmente il nucleo è non vuoto se e solo se il seguente problema di PL ha una soluzione ottima con valore $\leq v(N)$:

  $\min \sum \alpha_i : \quad \sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S)$, per ogni $S \in \mathcal{N}_p$.

  (Si noti che i vincoli di non-negatività sulle α_i sono inutili, in quanto dominati dai vincoli $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$.) Il duale di questo problema è il seguente:

  $\max \sum \lambda_s v(S) : \quad \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = 1$, per ogni $i \in N; \lambda \geq 0$.

  (Si noti che ogni soluzione ammissibile del duale corrisponde a un vettore bilanciato di pesi.)

  Osserviamo ora che il problema primale è certamente ammissibile: per esempio, la soluzione $\alpha_i = v(N)$, per ogni $i \in N$, è ammissibile grazie all'ipotesi di superadditività. Inoltre il problema non è illimitato inferiormente, per la presenza dei vincoli $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$. Quindi per il th fondamentale della PL il problema primale ha una soluzione ottima, sia z^* il suo valore. Per la dualità forte lo stesso vale per il problema duale: in particolare, il valore ottimo w^* di una soluzione ottima del problema duale è uguale a z^*.

  Quindi il nucleo è non vuoto se e solo se w^*, valore della soluzione ottima del problema duale, è $\leq v(N)$. Ovvero, se e solo se per ogni vettore blanciato di pesi λ vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

- Ricordiamo che una funzione $f : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ è concava se, per ogni intero non negativo h, ogni $x(1), \ldots, x(h) \in \mathcal{R}^n$ e ogni vettore $\mu = (\mu(1), \ldots, \mu(h)) \in \mathcal{R}^h_+ : \sum_{i=1..h} \mu(i) = 1$, vale $f(\sum_{j=1..h} \mu(j)x(j)) \geq \sum_{j=1..h} \mu(j) f(x(j))$.

- Un'applicazione del Th di Bondareva-Shapley. Consideriamo un *mercato* a utilità trasferibile.

  - Ci sono n agenti ognuno in grado di produrre un certo bene. Per produrre questo bene, ogni agente dispone di (cioè è dato) un insieme di l risorse (denaro, macchinari, manodopera) che può utilizzare per produrre il bene e ha una propria funzione di produzione che restituisce la quantità di bene che l'agente è in grado di produrre a partire dal vettore di risorse w_i.

    Formalmente, ogni agente dispone di un vettore di risorse: $w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^l) \in \mathcal{R}^l_+$ e ha una *sua* funzione di produzione $f_i : \mathcal{R}^l_+ \mapsto R$ che associa al suo input w_i una quantità prodotta $f_i(w_i)$ del bene. Per semplicità assumiamo che sia la produzione che il vettore di risorse possano assumere valori continui. Assumiamo che ogni funzione di produzione sia concava: è un'ipotesi assolutamente realistica che rappresenta, per esempio, il fatto che all'aumentare delle risorse la capacità di produzione di un impianto tende a saturarsi.

    In questo mercato gli agenti possono essere interessati a cooperare: se i vettori di risorse sono complementari, può essere utile scambiarsi delle risorse. A parte questo, ogni agente è interessato a massimizzare l'utilità che trarrà dalla produzione del bene.

  - Possiamo modellare questo mercato come gioco cooperativo. L'insieme dei giocatori coincide con quello degli agenti. Definiamo l'utilità della coalizione $S \subseteq N$ come segue. Supponiamo che la coalizione S possa allocare (i.e. partizionare) in *qualunque modo* tra gli agenti in S le risorse complessivamente disponibili, ovvero il vettore $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ (si noti che $w(S) \in \mathcal{R}^l_+$).

  - Qual è , dal punto di vista della coalizione (siamo in hyp di utilità trasferibile) il modo migliore di allocare le risorse tra i diversi agenti?

    Per rispondere a questa domanda, formuliamo un problema di ottimizzazione, indicando con $z_i \in \mathcal{R}^l_+$ il vettore di risorse assegnato all'agente i: naturalmente deve valere: $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i$ (chiamiamo questa una *allocazione ammissibile per* S).

    A fronte di un allocazione ammissibile z_i, $i \in S$, il giocatore i contribuirà alla coalizione con una produzione $f_i(z_i)$. Il valore $v(S)$ della coalizione S è dunque pari alla quantità complessivamente prodotta dai gocatori della coalizione, nell'ipotesi che ciascun giocatore possa disporre di un vettore di risorse z_i, ovvero $\sum_{i \in S} f_i(z_i)$.

    Per calcolare il modo migliore di allocare le risorse tra i diversi agenti della coalizione S, e quindi il valore della coalizione S dobbiamo quindi risolvere il seguente problema:

$v(S) = \max \sum_{i \in S} f_i(z_i)$ subject to $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i; z_i \geq 0$.

Per il teorema di Weierstrass, questo problema di massimizzazione ha sempre una soluzione ottima, perché la funzione obiettivo è continua e l'insieme ammissibile è chiuso e limitato.

- La funzione di utilità cosi definita è una funzione superadditiva. Infatti, supponiamo che l'utilità $v(S)$ della coalizione S sia raggiunta in corrispondenza a una allocazione ammissibile $z_i^*(S), i \in S$.

  Siano $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$. Osserviamo che l'allocazione $z_i^*(S), i \in S$, $z_i^*(T), i \in T$ è una allocazione ammissibile per la coalizione $S \cup T$: segue che $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.

  Inoltre, si noti che per definizione $v(\emptyset) = 0$. Infine, dall'ipotesi che ciascuna f_i è a valori non-negativi segue che $v(S) \geq 0$ per ogni $S \subseteq N$. v è quindi una funzione caratteristica e possiamo dunque formulare il gioco cooperativo (N, v).
- Abbiamo già visto un'istanza *molto* semplice di questo mercato. Torniamo al problema dei guanti e rimuoviamo l'ipotesi che i guanti possano essere usati sia per la mano destra che per la mano sinistra. Supponiamo che A abbia 2 guanti sx e un guanto dx, mentre B abbia 2 guanti dx e un guanto sx. Ovvero $w_1 = (2, 1)$ e $w_2 = (1, 2)$. La funzione di produzione f_i poi è semplicemente il numero di *coppie* di guanti (uno sx, uno dx) che ogni giocatore è in grado di trarre da un input (w^1, w^2): è uguale per entrambi i giocatori ed è $f_1 = f_2 = f(w^1, w^2) = \min(w^1, w^2)$: si noti che in questo caso i giocatori hanno la *stessa* funzione di produzione. È inoltre facile verificare che questa funzione di produzione è concava. Possiamo quindi formulare un gioco cooperativo. In particolare, è facile verificare quindi che il valore $v(S)$ di ciascuna coalizione S è quindi pari a $\min(\sum_{i \in S} w_i^1, \sum_{i \in S} w_i^2)$.

  Siamo sicuri che il nucleo di questo gioco è non vuoto e i due giocatori troveranno un accordo?
- Th. Ogni mercato con utilità trasferibile ha un nucleo non vuoto.
- Dimostrazione. Premettiamo il seguente fatto: sia x_S una quantità che dipende dalla coalizione S, y_i^S una quantità che dipende dalla coalizione S e dal giocatore $i \in S$ allora: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} x_S \sum_{i \in S} y_i^S = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} x_S y_i^S$.
- Per dimostrare il teorema utilizziamo il th di Bondareva-Shapley e dimostriamo che il gioco è bilanciato. Ovvero, per ogni vettore bilanciato di pesi λ vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

  Nel seguito, per ogni coalizione S, indichiamo con $z_i^*(S)$ l'allocazione "ottima" per il giocatore $i \in S$, ovvero l'allocazione tale che $\sum_{i \in S} f_i(z_i^*(S)) = v(S)$.

  Claim. Sia λ un qualunque vettore bilanciato. Allora l'allocazione $z_i = \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S)$ è una allocazione ammissibile per la grande coalizione.

  Dim del claim: $\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} z_i^*(S) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in N} w_i \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = \sum_{i \in N} w_i$.

Allora dal claim segue che $v(N) \geq \sum_{i \in N} f_i(z_i) = \sum_{i \in N} f_i(\sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S)) \geq$
$\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S f_i(z_i^*(S)) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} f_i(z_i^*(S)) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S)$.

0.3 Nucleolo

- Dato un gioco cooperativo (N, v) e una imputazione $\alpha \in \mathcal{R}_+^n$ definiamo il vettore di *eccesso* rispetto α il vettore $e(\alpha) \in \mathcal{R}^{2^N}$:

  $e(\alpha)_s = v(S) - \sum_{i \in S} \alpha_i$, $S \subseteq N$.

  Notiamo che $e(\alpha)_\emptyset = e(\alpha)_N = 0$. Inoltre, poiché α è un'imputazione, per ogni $i \in N$, $e(\alpha)_{\{i\}} \leq 0$. Infine, α è nel nucleo se e solo se $e(\alpha)_S \leq 0, \forall S \subseteq N$.

  La funzione di eccesso misura "il grado di insoddisfazione" di ogni coalizione nei confronti dell'imputazione α: se $e(\alpha)_S > 0$ ($e(\alpha)_S \leq 0$) la coalizione è insoddisfatta (soddisfatta).

- Consideriamo l'imputazione $\alpha = (100/3, 100/3, 100/3)$ per il gioco dei musicisti. Abbiamo: $e(\alpha)_\emptyset = 0$, $e(\alpha)_{\{1\}} = -40/3$, $e(\alpha)_{\{2\}} = -10/3$, $e(\alpha)_{\{3\}} = -100/3$, $e(\alpha)_{\{1,2\}} = 40/3$, $e(\alpha)_{\{1,3\}} = -50/3$, $e(\alpha)_{\{2,3\}} = -5/3$, $e(\alpha)_N = 0$. Osserviamo che l'unica insoddisfatta è $\{1, 2\}$, mentre la coalizione più soddisfatta è $\{3\}$ etc.

- Per un gioco cooperativo (N, v) e una imputazione $\alpha \in \mathcal{R}_+^n$, definiamo il vettore $\theta(\alpha)$ ottenuto ordinando il vettore $e(\alpha)$ per valori descescenti. Nel caso precedente, $\theta(\alpha) = (40/3, 0, 0, -5/3, -10/3, -40/3, -50/3, -100/3)$. Si noti che il vettore $\theta(\alpha)$ è un vettore con 2^N componenti $(\theta(\alpha)_1, \theta(\alpha)_2, \dots \theta(\alpha)_N)$, tale che $\theta(\alpha)_i \geq \theta(\alpha)_{i+1}$.

- Siano α e β due diverse imputazioni per un gioco cooperativo (N, v). Diciamo che $\theta(\beta) < \theta(\alpha)$ se esiste $j \in \{1, \dots, 2^N\}$ tale che:

  - $\theta(\beta)_i = \theta(\alpha)_i, \forall i < j$;
  - $\theta(\beta)_j < \theta(\alpha)_j$

- Dato un gioco cooperativo (N, v), il *nucleolo* del gioco è cosituito da tutte le imputazioni α per cui non esista un'imputazione β tale che $\theta(\beta) < \theta(\alpha)$.

- Th. Il nucleolo di ogni gioco cooperativo è formato da una e una sola imputazione. Inoltre, se il nucleo è non vuoto, il nucleolo appartiene al nucleo.

- Riconsideriamo il gioco con il fattore ρ. Sia $\rho = 1$ (ricordiamo che in questo caso il nucleo è vuoto). Consideriamo la generica imputazione $\alpha = (x, y, 1 - (x + y))$, con $x, y, 1 - (x + y) \geq 0$ Abbiamo $e(\alpha)_\emptyset = 0$, $e(\alpha)_{\{1\}} = -x$, $e(\alpha)_{\{2\}} = -y$, $e(\alpha)_{\{3\}} = x + y - 1$, $e(\alpha)_{\{1,2\}} = 1 - (x + y)$, $e(\alpha)_{\{1,3\}} = y$, $e(\alpha)_{\{2,3\}} = x$, $e(\alpha)_N = 0$.

  L'eccesso per ogni coalizione singola è non positivo, mentre l'eccesso di ogni coalizione con due giocatori è non negativo. Inoltre, la somma degli eccessi delle coalizioni con due giocatori è 1, quindi l'imputazione per cui è minimo il massimo eccesso di una coalizione deve assegnare eccesso 1/3 a tutte le coalizioni con due giocatori: quindi $x = y = 1 - (x + y) = 1/3$.

- Esistono altri concetti di soluzione di un gioco cooperativo. Naturalmente, nella teoria dei giochi non ci dobbiamo aspettare un esito unico per un gioco.

0.4 Il valore di Shapley

- Un approccio diverso è dovuto a Shapley. L'approccio è di tipo "assiomatico": si definiscono una serie di proprietà minimali che devono essere soddisfatte da una soluzione del gioco, ovvero dal vettore di payoff di ciascun giocatore, e si cerca una funzione che assegni a ciascun giocatore un payoff che rispetti i precedenti assiomi.

- Consideriamo quindi un gioco cooperativo (N, v). La funzione che assegna a ciascun giocatore un payoff $S_i(v)$ deve soddisfare i seguenti assiomi ("S" è in onore di Shapley, la dipendenza da v sottolinea il fatto che il valore di questa funzione (per ogni giocatore) dipende solo da v):

  - Assioma di razionalità collettiva: $\sum_{i \in N} S_i(v) = v(N)$.
  - Sia $i \in N$. Se per ogni $T \subseteq N$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T)$ (nota che questo implica $v(\{v_i\}) = 0$), allora $S_i(v) = 0$ (assioma del giocatore "inutile")
  - Siano $i, j \in N, i \neq j$. Se per ogni $T \subseteq N : i, j \notin T$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$, allora $S_i(v) = S_j(v)$.
  - Sia u e v due funzioni di utilità . Allora $S(u+v) = S(u)+S(v)$. (A proposito di quest'ultimo assioma, notiamo che se u e v sono super-additive, anche $f(S) = u(S) + v(S)$ è super-additiva, infatti, per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$, vale:
    $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ e $u(S) + u(T) \leq u(S \cup T)$; segue:
    $(v(S)+u(S))+(u(T)+v(T)) \leq (v(S \cup T)+u(S \cup T))$, i.e $f(S)+f(T) \leq f(S \cup T)$.)

- Fissato un insieme N di giocatori, esiste una e una sola funzione S che soddisfa gli assiomi precedenti:
  $S_i(v) = \sum_{T \subseteq N : i \in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\}))$, $\forall i \in N$
  e $S(v)$ è un'imputazione.

- Riconsideriamo il gioco con il fattore ρ. Abbiamo:
  $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{3}$ se $|T| = 1$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{6}$ se $|T| = 2$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{3}$ se $|T| = 3$.
  Allora $S_1(v) = \frac{1}{3}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) = \frac{1}{3}$. Naturalmente $S_2(v) = S_3(v) = S_1(v) = \frac{1}{3}$.

- Esempio. In un parlamento sono rappresentati quattro partiti con numero percentuale di seggi: 10%, 20%, 30%, 40%. Le decisioni vengono prese a maggioranza semplice (50% voti più 1). Se assumiamo che i deputati di uno stesso partito votino tutti allo stesso modo, possiamo definire un gioco cooperativo: i giocatori sono i quattro partiti e l'utilità di una coalizione è 1 se la coalizione rappresenta più del 50% di seggi, 0 altrimenti. È facile verificare che l'utilità cosi definita è un funzione caratteristica. Calcoliamo il valore di Shapley di ciascun giocatore:
  $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 1$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 2$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 3$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 4$.

  Allora $S_1(v) = \frac{1}{4}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\})) = \frac{1}{12}$;

  $S_2(v) = \frac{1}{4}(v(\{2\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\})) = \frac{1}{4}$.

  $S_3(v) = \frac{1}{4}(v(\{3\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{3,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,1\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,1,4\})) = \frac{1}{4}$;

  $S_4(v) = 1 - (S_1(v) + S_2(v) + S_3(v) = \frac{5}{12}$.

  Notiamo che il secondo e il terzo giocatore hanno lo stesso payoff! Malgrado il terzo abbia più seggi, non ha più possibilità del secondo di formare maggioranze: dal punto di vista della contrattazione politica hanno lo stesso peso. Infatti è immediato verificare che il secondo e il terzo giocatore *devono* avere lo stesso valore di Shapley per via del terzo assioma.

- Cambiamo le percentuali in 10%, 21%, 30%, 39%. È facile vedere che il primo giocatore diviene inutile. Segue che $S_1(v) = 0$. Gli altri tre gocatori sono invece indistinguibili, dal punto di vista della contrattazione politica (di nuovo, si guardi il terzo assioma): ogni coppia di due giocatori ottiene la maggioranza. Infatti, svolgendo i calcoli: $S_2(v) = S_3(v) = S_4(v) = \frac{1}{3}$.

- Il valore di Shapley sembra essere molto adatto a descrivere la capacità contrattuale dei giocatori per giochi del tipo descritto. Per questo motivo è spesso chiamato *indice di potere* (di Shapley o Schubik). Esso si applica molto bene ai giochi *semplici*.

- Un gioco cooperativo è detto *semplice* se la funzione caratteristica è a valore 0, 1.

  Un gioco semplice si presta a caratterizzare quelle situazioni in cui si deve prendere una decisione. Una coalizione in grado di imporre una decisione (qualunque essa sia) è a valore 1. Giochi di questo tipo si possono presentare e.g. in consigli di amministrazione, parlamento etc.

- Il calcolo di $S_i(v)$ per un gioco semplice si semplifica notevolmente.

  Innanzitutto osserviamo che per un *qualunque* gioco (semplice o no) il termine $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}$ è pari al numero % di permutazioni di N del tipo $T \setminus \{i\} - i - N \setminus T$, ovvero permutazioni di N di questo tipo: prima troviamo gli elementi di $T \setminus \{i\}$, poi troviamo i e infine troviamogli elementi di $N \setminus T$.

  Quindi associamo a ogni *insieme* $T : i \in T$ proprio la famiglia di queste $(|T| - 1)!(n - |T|)!$ *permutazioni*, che indichiamo con $\pi(T)$.

  Osserviamo inoltre che presi due insiemi S e $T \subseteq N$, tali che $i \in S$, $i \in T$ e $S \neq T$, la famiglia delle permutazioni associate a S è disgiunta dalla famiglia delle permutazioni associate a T, i.e. $\pi(S) \cap \pi(T) = \emptyset$.

  Viceversa ogni permutazione p di N appartiene a esattamente una famiglia $\pi(T)$: l'insieme T è quello formato da i e da tutti i giocatori che precedono i nella permutazione p: nel seguito indichiamo l'insieme questo insieme (coalizione) come A_i^p.

  Possiamo quindi concludere che l'insieme di tutte le partizioni di N, che indichiamo con $\mathcal{P}$, può essere partizionato nelle classi $\pi(T), T \subseteq N : i \in T$, ovvero $\mathcal{P} = \bigcup_{T \subseteq N : i \in T} \pi(T)$.

  Consideriamo nuovamente il valore di Shapley:

$$S_i(v) = \sum_{T \subseteq N : i \in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

  Possiamo quindi "ripartire" il peso

$$\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

  associato all'*insieme* T tra tutte le $(|T| - 1)!(n - |T|)!$ *permutazioni* della famiglia $\pi(T)$, dando quindi a ciascuna permutazione $p \in \pi(T)$ un peso

$$\frac{1}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) = \frac{1}{n!}(v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\}))$$

  .

  D'altro canto abbiamo già osservato come l'insieme $\mathcal{P}$ di tutte le permutazioni di N possa proprio essere partizionato nelle classi $\pi(T), T \subseteq N : i \in T$. Quindi:

$$S_i(v) = \sum_{T \subseteq N : i \in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{n!}(v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\}))$$

- Possiamo interpretare l'espressione precedente in questo modo alternativo: 1) consideriamo tutte le permutazioni $\mathcal{P}$ di n giocatori; 2) per ciascuna permutazione $p \in \mathcal{P}$, assegniamo al giocatore i un payoff pari a $v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})$, ove A_i^p è la coalizione formata da i e da tutti i giocatori che precedono i nella permutazione p; 3) definiamo $S_i(v)$ come il valore atteso del payoff di i, assumendo che tutte le permutazioni sono equiprobabili con probabilità $p = \frac{1}{n!}$.

- Nel caso di giochi semplici, l'espressione precedente si semplifica ulteriormente:
  $S_i(v) = \sum_{T\subseteq N: T \text{ vincente}, T\setminus\{i\} \text{ perdente}} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}$, $\forall i \in N$
  $S_i(v) = \frac{1}{n!}$ (n.ro permutazoni: A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente), $\forall i \in N$ $(*)$
- Alcuni esempi di gioco semplice. Premessa: il numero di permutazioni di n elementi in cui un dato elemento x è in posizione j-esima, j fissato, è pari a $(n-1)!$ (dobbiamo considerare le permutazioni degli altri (n-1) elementi e inserire x al posto j).
  - Gioco di maggioranza. Il valore di una coalizione T è 1 se e solo se $|T| > n/2$ giocatori (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley di ogni giocatore. Utilizziamo la $(*)$. Naturalmente, le permutazioni p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui i è in posizione $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Tali permutazioni sono naturalmente in numero $(n-1)!$. Quindi $S_i(v) = \frac{1}{n}$, non sorprendentemente.
  - Gioco dittatoriale. Il valore di una coalizione T è 1 se e solo se T contiene un certo giocatore $j \in N$ (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley di ogni giocatore. Utilizziamo la $(*)$. Naturalmente, se $i \neq j$, non esiste nessuna permutazione p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente; viceversa, se $i = j$, ogni permutazione p è tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente. Quindi $S_i(v) = 0$, $i \neq j$ e $S_j(v) = 1$.
  - Gioco dell'unanimità . Solo la grande coalizione ha valore 1 (osservare superadditività). Il numero delle permutazioni p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui i è in ultima posizione. Quindi il valore di Shapley è lo stesso del gioco di maggioranza: $S_i(v) = \frac{1}{n}$, non sorprendentemente (notiamo come i due giochi siano sostanzialmente diversi, eppure il potere dei giocatori è lo stesso!)
  - Il valore di una coalizione T è 1 se $|T| \geq 2$ e il giocatore $n \in T$ oppure se $T = \{1, 2, \ldots, n-1\}$; altrimenti 0 (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley del giocatore n. Utilizziamo la $(*)$. Le permutazioni p tale che A_n^p è vincente e $A_n^p \setminus \{n\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui n è in posizione diversa dalla prima e dall'ultima: quindi sono in numero $n! - 2(n-1)! = (n-2)((n-1)!)$, quindi $S_n(v) = \frac{(n-2)((n-1)!)}{n!} = \frac{n-2}{n}$. Dalla razionalità collettiva segue che il valore di ogni altro giocatore $i \neq n$ deve essere pari a $\frac{1-\frac{n-2}{n}}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)}$. Osservare come il potere del giocatore n cresce all'aumentare di n.
  - Gioco a maggioranza pesata con un quorum. Ogni giocatore ha un peso $w_i \geq 0$ e una coalizione T ha valore 1 se e solo se $\sum_{i\in T} w_i > q$, dove q è un *quorum*. Qui il calcolo del valore di Shapley richiederebbe la conoscenza dei valorew_i e non andiamo nel dettaglio. Quello che vogliamo sottolineare è che il gioco è certamente superadditivo se $q > \frac{1}{2}\sum_{i\in T} w_i$: è una condizione anche necessaria?