Teoria dei Giochi e delle Decisioni – Prova del 24 Settembre 2009

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff:

		Giocatore 2	
		a	b
Giocatore 1	a	8	-12
	b	-13	5

Formulare il problema di individuare la strategia conservativa di ciascun giocatore nell'estensione in strategia mista del gioco. Individure gli equilibri di Nash del gioco. Determinare quindi il valore del gioco.

Soluzione: Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolovere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq 8\varepsilon_1^1 - 13\varepsilon_1^2$$

$$z \geq -12\varepsilon_1^1 + 5\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

che, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\min z$$

$$z \geq -21\varepsilon_1^1 + 13$$

$$z \geq 17\varepsilon_1^1 - 5$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{9}{19}, \frac{10}{19}\right)$ e $z = -\frac{58}{19}$, cioé la strategia conservativa garantisce al primo giocatore una vincita di $\frac{58}{19}$. Il valore del gioco è $-\frac{58}{19}$, quindi il gioco non è fair.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq 8\varepsilon_2^1 - 12\varepsilon_2^2$$

$$w \leq -13\varepsilon_2^1 + 5\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_2^1 e w.

$$\max w$$

$$w \leq 20\varepsilon_2^1 - 12$$

$$w \leq -18\varepsilon_2^1 + 5$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

Per via grafica possiamo osservare che il punto di ottimo è il punto di intersezione delle due rette $w = 20\varepsilon_2^1 - 12$ e $w = -18\varepsilon_2^1 + 5$, in corrispondenza del quale $\varepsilon_2^1 = \frac{17}{38}$, $\varepsilon_2^2 = \frac{21}{38}$ e $w = -\frac{58}{19}$, e troviamo conferma del fatto che la strategia mista garantisce al secondo giocatore di perdere al più $\frac{58}{19}$.

L'equilibrio dell'estensione del gioco in strategia mista è dato dalla coppia di strategie miste $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{9}{19}, \frac{10}{19}\right)$. $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{17}{38}, \frac{21}{38}\right)$

Esercizio 2 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (3,8)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (5,7)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = 5w_A^1 + 6w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 3w_B^1 + 7w_B^2$).

Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene. Fornire inoltre un'imputazione nel nucleo di tale gioco.

Soluzione: Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo (N, v) dobbiamo definire la funzione v. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 63$ e $v(\{B\}) = 3 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 64$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 5z_A^1 + 6z_A^2 + 3z_B^1 + 7z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 8$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 15$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 8 - z_A^1$ e $z_B^2 = 15 - z_A^2$. Possiamo cosï¿½ ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max 2z_A^1 - z_A^2 + 129$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 8$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 15$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(8,0)$ $(0,15)$ e $(8,15)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(8,0)$ ed il valore ottimo è pari a 145. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A,B\}) = 145$ e la spartizione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (8,0)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (0,15)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori α_1 ed α_2 tali che:

$$\alpha_1 \geq 63$$
$$\alpha_2 \geq 64$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 145$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (65,80)$.

Esercizio 3 (Il gioco del pari o dispari.) Due giocatori, P e D, annunciamo simultaneamente la loro giocata, che può essere un intero tra 1 e 5, (1 e 5 compresi). Il giocatore P vince un euro se la somma delle giocate è pari e perde un euro se la somma delle giocate è dispari. La cosa opposta avviene per il giocatore D.

Considerate l'estensione in strategia mista di questo gioco, espresso *in forma di costo* (quindi una vincita resituisce un payoff di -1 ...). Formulate con la programmazione lineare il problema di individuare una strategia minmax per il giocatore P. Dite quindi se la strategia in cui entrambi i giocatori utilizzano una distribuzione di probabilità uniforme (cioe' giocano 1, 2, 3, 4 o 5 con la stessa probabilità) conduce a un equilibrio di Nash, giustificando la risposta.

Soluzione. (Attenzione : nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.)

La matrice A dei payoff del primo giocatore (in forma di costo) èuna matrice 5×5 tale che $a_{ij} = -1$ se $i+j$ èpari, 0 altrimenti.

Per verificare se le distribuzioni uniformi determinano un equilibrio di Nash utilizziamo la funzione best response. Vediamo quindi se la distribuzione uniforme è la migliore risposta che il secondo giocatore (risp. il primo giocatore) può mettere in campo se il primo giocatore (risp. il secondo giocatore) utilizza la distribuzione uniforme.

Se il primo giocatore gioca la strategia uniforme $\bar{x} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, il calcolo della migliore risposta del secondo giocatore richiede la soluzione del seguente PL:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{j=1}^{5} \bar{x}_i a_{ij} y_j \qquad i = 1..5$$

$$\sum_{j=1}^{5} y_j = 1$$

$$y_1, \ldots, y_5 \geq 0$$

Vediamo facilmente che il valore di una soluzione ottima al problema èpari a $\frac{1}{5}$ (raggiunto in corrispondenza alle strategie pure $[0,1,0,0,0], [0,0,0,1,0]$). D'altro canto il valore della soluzione $\bar{y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ èpari a $\frac{1}{25}$, e quindi la strategia uniforme non è per il secondo giocatore una risposta migliore quando il primo giocatore utilizza la distribuzione uniforme. La distribuzioni uniformi non determinano quindi un equilibrio di Nash.

Anche se non era richiesto dal testo, calcoliamo gli equilibri di Nash per il gioco. La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

$$z \geq x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

La soluzione del precedente PL è un pò laboriosa. Consideriamo quindi la seguente *riformulazione* del gioco. Osserviamo che per ciascun giocatore la scelta da effettuare è semplicemente quella di decidere se giocare un numero pari o un numero dispari. In questo senso, il gioco è quindi descritto dalla seguente matrice di payoff (in forma di costo):

		Giocatore D	
		P	D
Giocatore P	P	-1	1
	D	1	-1

La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2$$

$$z \geq x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $z = 0$. Il gioco quindi è fair. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il primo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

La formulazione di PL per trovare la strategia conservativa per il giocatore D è la seguente.

$$\max w$$

$$w \leq -y_1 + y_2$$

$$w \leq y_1 - y_2$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $w = 0$. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il secondo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

Esercizio 4 In un parlamento siedono 11 deputati. Uno di questi deputati è considerato particolarmente corrotto. L'approvazione di ogni legge segue quindi la seguente regola: una legge è approvata se e solo se a suo favore vota una maggioranza di deputati, che *non includa* il deputato corrotto. Formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, oppure spiegare perché questo non è possibile. Nel primo caso, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato.

Soluzione. Il processo di approvazione di una legge non può essere formulato come gioco cooperativo. Infatti se scegliamo la naturale funzione caratteristica v che assegna valore 1 ad una coalizione che approva una legge e 0 altrimenti, possiamo osservare che essa non è superadditiva. Infatti basta prendere S come una qualsiasi coalizione che contiene 6 deputati tra quelli non corrotti e T come la coalizione formata solamente dal deputato corrotto, si ha:

$$v(S) + v(T) = 1 + 0 > v(S \cup T) = 0$$