Teoria dei Giochi e delle Decisioni – Prova del 15 Settembre 2009

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________

Esercizio 1 Ciascuna di tre persone annuncia un intero tra 1 e 1000. Vince il gioco, e quindi un euro, la persona (o le persone) che annuncia il numero che risulta più vicino alla media aritmetica dei tre numeri annunciati moltiplicata per $\frac{3}{2}$ (se sono più persone a vincere il gioco, queste si dividono in parti uguali l'euro). Per esempio, se i tre giocatori annunciano rispettivamente 10, 100 e 1000, vince il gioco il terzo giocatore, poiché 1000 è più vicino di 10 e 100 a $\frac{3}{2}\frac{1110}{3} = 555$. Se invece i tre giocatori annunciano rispettivamente 10, 500 e 500, vincono il gioco il secondo e il terzo giocatore, poiché 500 è più vicino di 10 a $\frac{3}{2}\frac{1010}{3} = 505$. Individuare gli equilibri di Nash del gioco, giustificando la risposta. (Per risolvere l'esercizio è utile notare il seguente fatto: presi due numeri x e y con $x < y$ e un numero $\varepsilon > 0$, y è sempre più vicino di x a $\frac{x+y}{2}$).

Soluzione. Dimostriamo innanzitutto che il gioco è sempre vinto dal giocatore (eventualmente, dai giocatori) che ha (risp. hanno) annunciato il numero più alto. Siano x, y, z i numeri annunciati dai tre giocatori e assumiamo senza perdita di generalità che $x \leq y \leq z$. Supponiamo che valga $x \leq y < z$. In questa situazione è facile vedere che l'euro è vinto dal giocatore che ha annunciato z. Infatti, in questo caso, $\frac{3}{2}\frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{y+z}{2} + \frac{x}{2}$ è più vicino a z che a y (e, a maggior ragione, $\frac{x+y+z}{2}$ è più vicino a z che a x). Analogamente, è facile vedere che se vale $x < y = z$, il gioco è vinto dai giocatori che hanno annunciato y e z (che si dividono l'euro). Infine, se vale $x = y = z$, il gioco è vinto da tutti e tre i giocatori.

Dimostriamo quindi che l'unico equilibrio di Nash del gioco è quello in cui tutti e tre i giocatori annunciano il massimo possibile, cioe 1000. Supponiamo innanzitutto che ci sia un giocatore che non ha annunciato 1000 e assumiamo senza perdita di generalità che questo giocatore non sia l'unico vincitore (se un giocatore che non ha annunciato 1000 è l'unico vincitore, allora esiste un altro giocatore che non ha annunciato 1000 e che non è (l'unico) vincitore). Osserviamo come il payoff di questo giocatore migliolerebbe se egli giocasse 1000. Quindi non può esistere alcun equilibrio di Nash in cui un giocatore non annuncia 1000. È infine facile verificare che se ogni giocatore annuncia 1000 ci troviamo in un equilibrio di Nash.

Esercizio 2 Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff:

		Giocatore 2	
		a	b
Giocatore 1	a	-7	6
	b	4	-8

Formulare il problema di individuare la strategia conservativa di ciascun giocatore nell'estensione in strategia mista del gioco. Individure gli equilibri di Nash del gioco. Determinare quindi il valore del gioco.

Soluzione: Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolovere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq -7\varepsilon_1^1 + 4\varepsilon_1^2$$

$$z \geq 6\varepsilon_1^1 - 8\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_1^1 e z.

$$\min z$$

$$z \geq -11\varepsilon_1^1 + 4$$

$$z \geq 14\varepsilon_1^1 - 8$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

Per via grafica possiamo osservare che il punto di ottimo è il punto di intersezione delle due rette $z = -11\varepsilon_1^1 + 4$ e $z = 14\varepsilon_1^1 - 8$, in corrispondenza del quale $\varepsilon_1^1 = \frac{12}{25}$, $\varepsilon_1^2 = \frac{13}{25}$ e $z = -\frac{32}{25}$, cioé la strategia conservativa garantisce al primo giocatore una vincita di $\frac{32}{25}$. Il valore del gioco è $-\frac{32}{25}$, quindi il gioco non è fair.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq -7\varepsilon_2^1 + 6\varepsilon_2^2$$

$$w \leq 4\varepsilon_2^1 - 8\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

che nuovamente, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\max w$$

$$w \leq -13\varepsilon_2^1 + 6$$

$$w \leq 12\varepsilon_2^1 - 8$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{14}{25}, \frac{11}{25}\right)$ e $w = -\frac{32}{25}$, e troviamo conferma del fatto che la strategia conservativa garantisce al secondo giocatore di perdere al più $\frac{32}{25}$.

L'equilibrio dell'estensione del gioco in strategia mista è dato dalla coppia di strategie miste $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{12}{25}, \frac{13}{25}\right)$. $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{14}{25}, \frac{11}{25}\right)$

Esercizio 3 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (9,7)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (12,8)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = 6w_A^1 + 3w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 4w_B^1 + 5w_B^2$).

Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene. Fornire inoltre un'imputazione nel nucleo di tale gioco.

Soluzione: Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo (N, v) dobbiamo definire la funzione v. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 6 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 75$ e $v(\{B\}) = 12 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 88$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 6z_A^1 + 3z_A^2 + 4z_B^1 + 5z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 21$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 15$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 21 - z_A^1$ e $z_B^2 = 15 - z_A^2$. Possiamo cosï¿½ ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max 2z_A^1 - 2z_A^2 + 159$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 21$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 15$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(21,0)$ $(0,15)$ e $(21,15)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(21,0)$ ed il valore ottimo è pari a 201. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A,B\}) = 201$ e la spartizione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (21,0)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (0,15)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori α_1 ed α_2 tali che:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \geq 75 \\ &\alpha_2 \geq 88 \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = 201 \end{aligned}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (100, 101)$.

Esercizio 4 In un parlamento siedono 10 deputati. Due di questi deputati godono dello status di deputati "anziani". L'approvazione di ogni legge richiede il voto della stretta maggioranza (cioè almeno 6) dei deputati, oppure il voto di 5 deputati tra cui *entrambi* i deputati anziani. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione. Il gioco è un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{A_p^i \text{ vince}, A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato anziano. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono: 1) tutte quelle in cui egli si trova in sesta posizione; 2) tutte quelle in cui egli si trova in quinta posizione e l'altro deputato anziano nelle prime 4 posizioni. Per quanto riguarda 1), osserviamo che le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono 9! Per quanto riguarda 2), osserviamo che le permutazioni in cui entrambi i giocatori si trovano in due (diverse) posizioni fissate sono 8!, quindi il contrinuto di 2) è pari a $4 \cdot (8!)$. Possiamo quindi concludere che il valore di Shapley di ciascun deputato anziano è:

$$S_8(v) = \frac{9! + 4 \cdot 8!}{10!} = \frac{13}{90}$$

Per quanto riguarda gli altri deputati, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. Sapendo che la somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1 possiamo concludere che che il valore di Shapley di ciascun deputato anziano è:

$$S_i(v) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{26}{90}\right) = \frac{4}{45}.$$