Attenzione: nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.

1. La matrice A che descrive il gioco è una matrice 100×100. L'elemento a_{ij} è pari al numero di euro che perdi nel caso tu scelga l'intero i e il tuo avversario l'intero j. Quindi:

$$A: \quad a_{ij} = \begin{cases} +1 & i \geq j+2 \\ -1 & i = j+1 \\ 0 & i = j \\ +1 & i = j-1 \\ -1 & i \leq j-2 \end{cases}$$

Il problema di PL associato alla scelta della migliore strategia per te è quindi il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{100} a_{ij} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

cioè

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{j-2} -x_i + x_{j-1} - x_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{100} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

Poiché il gioco è simmetrico, il suo valore è 0.

Dobbiamo determinare se i vettori stocastici proposti sono strategie conservative per il primo giocatore. Poiché il gioco è simmetrico, una strategia conservativa deve determinare un valore $z^* = 0$. Per ogni strategia proposta dobbiamo quindi utilizzare la formulazione di PL scritta in precedenza per determinare se il valore corrispondente della funzione obiettivo è pari a zero.

- $x_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{100} + \sum_{i=3}^{100} \frac{1}{100} \rightarrow z \geq \frac{97}{100}$$

Da cui $z \geq \frac{97}{100}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1,\ldots,50$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{50} + \sum_{i=2}^{50} \frac{1}{50} \rightarrow z \geq \frac{48}{50}$$

Da cui $z \geq \frac{48}{50}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 4,\ldots,100$ è un vettore di strategie conservative, infatti considerando tutte le possibili risposte con strategie pure del secondo giocatore (cioè analizzando i vincoli per $j = 1..100$, abbiamo:

$$\begin{array}{lll}
j=1 & z \geq -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\
j=2 & z \geq +\frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\
j=3 & z \geq -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\
j=4 & z \geq -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -\frac{1}{3} \\
j \geq 5 & z \geq -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -1
\end{array}$$

Da cui otteniamo che $z = 0$, quindi il vettore stocastico proposto è una strategia conservativa per il primo giocatore.

- $x_1^{98} = x_1^{99} = x_1^{100} = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 1,\ldots,97$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq \sum_{i=98}^{100} \frac{1}{3} \Rightarrow z \geq 1$$

Da cui $z \geq 1$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

2. Nel nuovo scenario B può utilizzare una delle seguenti 12 strategie:

1. Nascondi 1; congettura 1.
2. Nascondi 1; congettura 2.
3. Nascondi 2; congettura 1.
4. Nascondi 2; congettura 2.

1bis. Nascondi 1; congettura 1 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
5. Nascondi 1; congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
6. Nascondi 1; congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2

2bis. Nascondi 1; congettura 2 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
3bis. Nascondi 2; congettura 1 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
7. Nascondi 2; congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
8. Nascondi 2; congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2

4bis. Nascondi 2; congettura 2 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2

È immediato osservare che le strategie i e *ibis* coincidono. Per cui, in pratica, B può utilizzare una delle seguenti 8 strategie:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.

4. Nascondi 2, congettura 2.
5. Nascondi 1, congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
6. Nascondi 1, congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
7. Nascondi 2, congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
8. Nascondi 2, congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2

ovvero:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.
4. Nascondi 2, congettura 2.
5. Nascondi 1, fai la stessa congettura di A.
6. Nascondi 1, fai una congettura differente da A.
7. Nascondi 2, fai la stessa congettura di A.
8. Nascondi 2, fai una congettura differente da A.

Per quanto riguarda A, le sue strategie non cambiano:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.
4. Nascondi 2, congettura 2.

La matrice che descrive il gioco è la seguente matrice 4×8:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il problema di PL associato alla scelta della migliore strategia per A è quindi il seguente:

$$\max z$$

$$z - \sum_{i=1}^{4} f_{ij} x_i \leq 0 \qquad j = 1..8$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0$$

3. La matrice dei payoff è in forma di utilità . È facile vedere che il primo giocatore per individuare la sua strategia conservativa deve risolvere il segente PL:

$$\min z$$

$$z - 2x_2 + 3x_3 \geq 0$$

$$z + 2x_1 - 3x_4 \geq 0$$

$$z-3x_1+4x_4 \geq 0$$

$$z+3x_2-4x_3 \geq 0$$

$$z+3x_3-3x_4 \geq 0$$

$$z+2x_1-2x_2 \geq 0$$

$$z-3x_1+3x_2 \geq 0$$

$$z-4x_3+4x_4 \geq 0$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,4$$

Il problema che deve risolvere il secondo giocatore per individuare la sua strategia conservativa è il seguente

$$\max w$$

$$w+2y_2-3y_3+2y_6-3y_7 \leq 0$$

$$w-2y_1+3y_4-2y_6+3y_7 \leq 0$$

$$w+3y_1-4y_4+3y_5-4y_8 \leq 0$$

$$w-3y_2+4y_3-3y_5+4y_8 \leq 0$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8 = 1$$

$$y_i \geq 0 \ \forall i = 1,\dots,8$$

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1,\dots,4$; $y^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1,\dots,8$. Sostituendo nel primale otteniamo come vincolo più stringente $z \geq \frac{1}{4}$ da cui $z(\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Sostituendo nel duale otteniamo come vincolo più stringente $w \leq -\frac{1}{4}$ da cui $w(\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$. Si ha quindi $z(\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{4}) \neq w(\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{8})$, la coppia di vettori stocastici non è una coppia di strategie conservative.

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1,\dots,4$; $y^{2i} = \frac{1}{4}, \forall i = 1,\dots,4$. Per quanto riguarda il primale si ottiene analogamente al caso precedente $z(\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Nel duale il vincolo più stringente è $w \leq -1$, da cui $w(0,\frac{1}{4},\dots,0,\frac{1}{4}) = -1$. Anche in questo caso quindi la coppia di vettori stocastici proposti non è una coppia di strategie conservative.

- $x^1=\frac{28}{99}; x^2=\frac{30}{99}; x^3=\frac{21}{99}; x^4=\frac{20}{99}; y^1=0; y^2=\frac{56}{99}; y^3=\frac{40}{99}; y^4=0; y^5=0; y^6=\frac{2}{99}; y^7=0; y^8=\frac{1}{99}$. In questo caso si ha che il vincolo più stringente del primale è $z \geq \frac{4}{99}$, mentre quello del duale è $w \leq \frac{4}{99}$; se ne deduce che $z(\frac{28}{99}, \frac{30}{99}, \frac{21}{99}, \frac{20}{99}) = w(0, \frac{56}{99}, \frac{40}{99}, 0, 0, \frac{2}{99}, 0, \frac{1}{99}) = \frac{4}{99}$. La coppia di vettori stocastici proposti è quindi una coppia di strategie conservative ed in particolare il valore del gioco è $\frac{4}{99}$.

4. Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolovere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq a\varepsilon_1^1 - a\varepsilon_1^2$$

$$z \geq -b\varepsilon_1^1 + b\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

che, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\min z$$

$$z \geq 2a\varepsilon_1^1 - a$$

$$z \geq -2b\varepsilon_1^1 + b$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e, ovviamente, $z=0$, cioé la strategia conservativa garantisce al primo giocatore di non perdere e non vincere nulla. Il valore del gioco è 0, quindi il gioco è fair.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq a\varepsilon_2^1 - b\varepsilon_2^2$$

$$w \leq -a\varepsilon_2^1 + b\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_2^1 e w.

$$\max w$$

$$w \leq (a+b)\varepsilon_2^1 - b$$

$$w \leq -((a+b)\varepsilon_2^1 - b)$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

In particolare possiamo dedurre dal primo e dal secondo vincolo che deve valere $w = 0$ e $(a+b)\varepsilon_2^1 - b = 0$, da cui $\varepsilon_2^1 = \frac{b}{a+b}$ e di conseguenza $\varepsilon_2^2 = \frac{a}{a+b}$ e $z = 0$, e troviamo conferma del fatto che la strategia conservativa garantisce al secondo giocatore di non vincere e non perdere nulla.