Teoria dei Giochi e delle Decisioni – Prova del 22 Luglio 2009

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________

Esercizio 1 Data la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione

Giocatore 2

Giocatore 1		A	B	C
	D	$2,3$	$1,3$	$4,1$
	E	$3,5$	$0,0$	$2,0$
	F	$1,3$	$0,0$	$0,4$

(a) Fornire gli equilibri di Nash del gioco. Gli equilibri di Nash sono (E,A) e (D,B).
(b) Fornire le strategie debolmente dominanti e le strategie strettamente dominanti di ciascun giocatore. Non esistono strategie debolmente o strettamente dominanti per nessuno dei due giocatori.
(c) Fornire i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto. (E,A), (D,C).
(d) Per ogni equilibri di Nash trovato al punto (a), dire se esso è ottimo secondo Pareto. L'equilibrio (E,A) è ottimo secondo Pareto, mentre (D,B) non è ottimo secondo Pareto.
(e) Fornire le strategie conservative di ciascun giocatore. La strategia conservativa per il primo giocatore è D, mentre per il secondo giocatore è A.

(Non è richiesto di giustificare alcuna risposta)

Esercizio 2 Ricordiamo il meccanismo d'asta in busta chiusa di primo prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Vince l'asta il giocatore i che ha fatto l'offerta x_i più alta (a parità di offerta, vince il giocatore con indice i più alto), e paga un prezzo p pari a questa offerta (cioè $p = \max_i x_i$). Il payoff del giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta.

Si consideri quindi un asta a 5 giocatori, che rispettivamente attribuiscono al bene oggetto dell'asta valore 25, 20, 15, 10, 5. Per ciascuno dei seguenti vettori d'offerta, dire se esso è un equilibrio di Nash o meno (non è richiesto di giustificare la risposta, penalità per risposte errate).

$(18,17,17,13,15)$ SI ✓NO
$(18,17,18,13,15)$ SI ✓NO
$(15,20,18,18,18)$ SI ✓NO
$(22,20,18,18,18)$ SI ✓NO
$(22,20,22,18,18)$ SI ✓NO
$(25,20,15,10,5)$ SI ✓NO

Esercizio 3 Ricordiamo il meccanismo d'asta in busta chiusa di secondo prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Vince l'asta il giocatore i che ha fatto l'offerta x_i più alta (a parità di offerta, vince il giocatore con indice i più alto), e paga un prezzo p pari alla *seconda* offerta più alta. Il payoff del giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta.

Si consideri quindi un asta a 5 giocatori, che rispettivamente attribuiscono al bene oggetto dell'asta valore 25, 20, 15, 10, 5. Per ciascuno dei seguenti vettori d'offerta, dire se esso è un equilibrio di Nash o meno (non è richiesto di giustificare la risposta, penalità per risposte errate).

$(25,0,0,0,0)$ ✓SI □NO
$(20,25,0,0,0)$ ✓SI □NO
$(15,0,25,0,0)$ ✓SI □NO
$(5,0,0,0,25)$ ✓SI □NO
$(20,25,3,3,3)$ ✓SI □NO
$(25,20,15,10,5)$ ✓SI □NO

Esercizio 4 Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff:

Giocatore 2

Giocatore 1		a	b
	a	-2	3
	b	7	-4

Formulare il problema di individuare la strategia conservativa di ciascun giocatore nell'estensione in strategia mista del gioco. Individuare gli equilibri di Nash del gioco. Determinare quindi il valore del gioco.

Soluzione: Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolvere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq -2\varepsilon_1^1 + 7\varepsilon_1^2$$

$$z \geq 3\varepsilon_1^1 - 4\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

che, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\min z$$

$$z \geq -9\varepsilon_1^1 + 7$$

$$z \geq 7\varepsilon_1^1 - 4$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\varepsilon_1^1 = \frac{11}{16}$, $\varepsilon_1^2 = \frac{5}{16}$ e $z = \frac{13}{16}$, cioé la strategia conservativa garantisce al primo giocatore di perdere al più $\frac{13}{16}$. Il valore del gioco è $\frac{13}{16}$, quindi il gioco non è fair.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq -2\varepsilon_2^1 + 3\varepsilon_2^2$$

$$w \leq 7\varepsilon_2^1 - 4\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_2^1 e w.

$$\max w$$

$$w \leq -5\varepsilon_2^1 + 3$$

$$w \leq 11\varepsilon_2^1 - 4$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

Per via grafica possiamo osservare che il punto di ottimo è il punto di intersezione delle due rette $w = -5\varepsilon_2^1 + 3$ e $w = 11\varepsilon_2^1 - 4$, in corrispondenza del quale $\varepsilon_2^1 = \frac{7}{16}$, $\varepsilon_2^2 = \frac{9}{16}$ e $w = \frac{13}{16}$, e troviamo conferma del fatto che la strategia conservativa garantisce al secondo giocatore di vincere $\frac{13}{16}$.

L'equilibrio dell'estensione del gioco in strategia mista è dato dalla coppia di strategie miste $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right)$. $\left(\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2\right) = \left(\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\right)$

Esercizio 5 In un parlamento siedono 8 deputati. Uno di questi 8 deputati è il presidente del parlamento. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della stretta maggioranza (cioè almeno 5) dei deputati oppure il voto di 4 deputati tra cui il presidente. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione: Il gioco è chiaramente un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{A_p^i \text{ vince}, A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione il presidente del parlamento. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono tutti quelli in cui egli si trova in quarta o quinta posizione. Le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono 7!, possiamo quindi concludere che:

$$S_8(v) = \frac{7!2}{8!} = \frac{1}{4}$$

Per quanto riguarda gli altri deputati, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. Sapendo che la somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1 possiamo concludere che

$$S_i(v) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{28} \quad \forall i = 1, \ldots, 7$$