Teoria dei Giochi e delle Decisoni – Prova del 28 Aprile 2009

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 Considerate un'elezione nella quale sono presenti due candidati, A e B. Dei $2m$ cittadini che hanno diritto al voto, m sostengono il candidato A, ed m sostengono il candidato B. Ciascun cittadino può scegliere se astenersi o votare per il candidato che sostiene. Andare a votare ha un costo pari a c con $0 < c < 1$. Un cittadino che si astiene ottiene un payoff pari a 2 se il candidato che sostiene vince, un payoff pari a 1 se i candidati pareggiano ed un payoff pari a 0 se il candidato che sostiene perde. Un cittadino che vota invece ottiene un payoff pari a $2-c$ se il candidato che sostiene vince, un payoff pari a $1-c$ se i candidati pareggiano ed un payoff pari a $-c$ se il candidato che sostiene perde.

(a) Il vettore di strategie in cui ogni giocatore vota è un equilibrio di Nash? (Non è richiesto di giustificare la risposta.) **Sì**. Infatti in tale situazione i due candidati pareggiano e ogni votante ottiene un payoff pari a $1-c$; se un qualsiasi giocatore decidesse di astenersi il candidato che sostiene perderebbe ed il giocatore otterrebbe un payoff pari a $0 < 1-c$.

(b) Esiste un equilibrio di Nash in cui i due candidati pareggiano e non tutti i cittadini votano? (Non è richiesto di giustificare la risposta.) **No**. Infatti un qualunque giocatore che si è astenuto se votasse farebbe vincere il candidato che sostiene ottenendo così un payoff pari a $2-c > 1$.

(c) Esiste un equilibrio di Nash in cui un candidato vince per un solo voto di differenza? (Non è richiesto di giustificare la risposta.) **No**. In questo caso almeno uno dei cittadini che sostengono il candidato perdente si è astenuto. Se tale cittadino votasse i candidati pareggerebbero e quindi otterrebbe un payoff pari a $1-c > 0$.

(d) Esiste un equilibrio di Nash in cui un candidato vince per due o più voti di differenza? (Non è richiesto di giustificare la risposta.) **No**. Infatti un qualunque cittadino che ha votato per il candidato vincente potrebbe astenersi ed ottenere così un payoff pari a $2 > 2-c$.

(e) Elencare *tutti* gli equilibri di Nash del gioco. (Non è richiesto di giustificare la risposta.) L'unico equilibrio di Nash del gioco è quello del punto (a). Infatti i punti (c) e (d) prendono in considerazione tutte le situazioni in cui uno dei due candidati vince, mentre i punti (a) e (b) prendono in considerazione tutte le situazioni in cui i candidati pareggiano.

Esercizio 2 Considerate la rete stradale G rappresentata dal grafo orientato con nodi $\{S,A,B,T\}$ e archi $\{(S,A),(S,B),(A,T),(B,T)\}$, nella quale 4000 vetture devono viaggiare da S a T. Il tempo di viaggio da S a A e da B a T è pari, in minuti, al numero di vetture diviso 100, mentre il tempo di viaggio da A a T e da S a B è costante e pari a 45 minuti. Individuare un punto di equilibrio di Nash per questo gioco (non è richiesto di giustificare la risposta).

Considerate ora la stessa rete, ma includendo anche l'arco (A,B) e supponete che il tempo di viaggio su questo tratto sia costante e pari a 0 minuti. Individuare un punto di equilibrio di Nash per questo nuovo gioco (non è richiesto di giustificare la risposta). Dire quindi se il punto individuato è ottimo debole seconde Pareto (giustificare la risposta).

Per rispondere alla prima parte della domanda, osserviamo che abbiamo un equilibrio di Nash quando 2000 vetture viaggiano sul percorso (S,A,T) e 2000 vetture viaggiano sul percorso (S,B,T) ed ogni vettura impiega quindi 65 minuti per andare da S a T. In tale situazione infatti, se una vettura che viaggia sul percorso (S,A,T) (risp. (S,B,T)) decidesse di cambiare percorso, allora impiegherebbe un tempo pari a $65.01 > 65$ per andare da S a T.

Per rispondere alla seconda parte della domanda, osserviamo che abbiamo un equilibrio di Nash quando tutte le 4000 vetture viaggiano sul percorso (S,A,B,T) con un tempo di percorrenza pari a 80 minuti. Infatti se una vettura decidesse di viaggiare sul percorso (S,A,T) o (S,B,T) impiegherebbe 85 minuti. Tale equilibrio di Nash **non** è ottimo debole secondo Pareto, infatti esiste una vettore di strategie in cui tutti le vetture impiegano meno di 80 minuti per andare da S a T. Questo vettore di strategie è quello corrispondente alla situazione in cui 2000 vetture viaggiano sul percorso (S,A,T) e 2000 vetture viaggiano sul percorso (S,B,T).

Anche se non era richiesto dal testo, analizziamo l'esistenza di altri equilibri di Nash per il gioco. Nel primo caso indichiamo con n_1 (risp. n_2) il numero di vetture che sceglie il percorso S,A,T (risp. S,B,T). Il tempo di viaggio t_1 (risp. t_2) sul primo (risp. secondo) percorso è pari a $\frac{n_1}{100}+45$ (risp. $\frac{n_2}{100}+45$). È immediato verificare che, se $n_1 \neq n_2$, e.g. $n_1 > n_2$, ogni giocatore che sceglie il primo percorso ha convenienza a commutare sul secondo: quindi l'unico equilibrio di Nash è quello individuato in precedenza in cui 2000 vetture scelgono il percorso superiore e 2000 vetture scelgono il percorso inferiore.

Passiamo a considerare il secondo caso. Siano n_1 e n_2 rispettivamente il numero di vetture che transitano sul tratto (S,A) e sul tratto (B,T). Allora, il tempo di percorrenza sul percorso (S,A,T) èpari a $45+\frac{n_1}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso (S,A,B,T) èpari a $\frac{n_1}{100}+\frac{n_2}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso (S,B,T) èpari a $45+\frac{n_2}{100}$. Si osservi che poichén_1 e n_2 sono entrambi ≤ 4000, abbiamo che il tempo di percorrenza del percorso (S,A,B,T) èsempre minore dei tempi di percorrenza dei percorsi (S,A,T) e (S,B,T). Segue che l'unico equilibrio di Nash èquello in cui tutte le vetture scelgono il precorso (S,A,B,T), impiegando quindi 80 minuti.

Esercizio 3 Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff (in forma di costo):

		Giocatore 2	
		a	b
Giocatore 1	a	5	-6
	b	-4	3

Formulare il problema di individuare la strategia conservativa di ciascun giocatore nell'estensione in strategia mista del gioco. Individure gli equilibri di Nash del gioco. Dire quindi se il gioco è fair.

Dobbiamo determinare le strategie conservative per entrambi i giocatori. Per quanto riguarda il primo giocatore dobbiamo risolvere il seguente problema di PL:

$$\min z$$

$$z \geq 5\varepsilon_1^1 - 4\varepsilon_1^2$$

$$z \geq -6\varepsilon_1^1 + 3\varepsilon_1^2$$

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^2 = 1$$

$$\varepsilon_1^1 \geq 0, \varepsilon_1^2 \geq 0$$

che nuovamente, utilizzando il vincolo di uguaglianza, si può ridurre al problema:

$$\min z$$

$$z \geq 9\varepsilon_1^1 - 4$$

$$z \geq -9\varepsilon_1^1 + 3$$

$$0 \leq \varepsilon_1^1 \leq 1$$

La risoluzione di questo programma, per esempio per via grafica, restituisce $\left(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2\right) = \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right)$ e $z = -\frac{1}{2}$, cioé la strategia conservativa garantisce al primo giocatore una vincita di $\frac{1}{2}$. Il valore del gioco è $-\frac{1}{2}$, quindi il gioco non è fair.

Determiniamo ora le strategie conservative del secondo giocatore, risolvendo il seguente problema di PL:

$$\max w$$

$$w \leq 5\varepsilon_2^1 - 6\varepsilon_2^2$$

$$w \leq -4\varepsilon_2^1 + 3\varepsilon_2^2$$

$$\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^2 = 1$$

$$\varepsilon_2^1 \geq 0, \varepsilon_2^2 \geq 0$$

Utilizzando il vincolo di uguaglianza possiamo ricondurci ad un problema con due sole variabili, ε_1^1 e z.

$$\max w$$

$$w \leq 11\varepsilon_2^1 - 6$$

$$w \leq -7\varepsilon_2^1 + 3$$

$$0 \leq \varepsilon_2^1 \leq 1$$

Per via grafica possiamo osservare che il punto di ottimo è il punto di intersezione delle due rette $w = 11\varepsilon_1^1 - 6$ e $w \leq -7\varepsilon_1^1 + 3$, in corrispondenza del quale $\varepsilon_1^1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2}$ e $w = -\frac{1}{2}$, e troviamo conferma del fatto che la strategia conservativa garantisce al secondo giocatore di perdere al più $\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (2,5)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (6,3)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = 3w_A^1 + 4w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 5w_B^1 + 2w_B^2$).

Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene. Fornire inoltre un'imputazione nel nucleo di tale gioco.

Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo (N, v) dobbiamo definire la funzione v. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 26$ e $v(\{B\}) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 36$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 3z_A^1 + 4z_A^2 + 5z_B^1 + 2z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 8$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 8$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 8 - z_A^1$ e $z_B^2 = 8 - z_A^2$. Possiamo così ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max -2z_A^1 + 2z_A^2 + 56$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 8$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 8$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(8,0)$ $(0,8)$ e $(8,8)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(0,8)$ ed il valore ottimo è pari a 72. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A,B\}) = 72$ e la spartizione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (0,8)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (8,0)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori α_1 ed α_2 tali che:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \geq 26 \\
&\alpha_2 \geq 36 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 = 72
\end{aligned}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (32, 40)$.

Esercizio 5 In un parlamento siedono 7 deputati. Di questi 6 provengono da una stessa regione A mentre il settimo proviene da una regione B. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della maggioranza dei deputati della regione A (cioè almeno 4 deputati della regione A) e il voto a favore del deputato della regione B. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Il gioco è chiaramente un gioco semplice, in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare la legge 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{A_p^i \text{ vince}, A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione l'unico deputato della regione B. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono tutti quelli in cui egli si trova in quinta sesta o settima posizione. Le permutazioni in cui un giocatore si trova in una posizione fissata sono 6!, possiamo quindi concludere che:

$$S_7(v) = \frac{6!3}{7!} = \frac{3}{7}$$

Per quanto riguarda i deputati della regione A, essi hanno tutti un ruolo intercambiabile e quindi avranno tutti un valore di Shapley identico. Sapendo che la somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori deve essere 1 possiamo concludere che

$$S_i(v) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{2}{21} \quad \forall i = 1, \ldots, 6$$