Teoria dei Giochi – Prova del 12 Luglio 2010

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ____

Esercizio 1 Ciascuna di tre persone sceglie un intero tra 1 e 1000. Se i tre giocatori scelgono numeri diversi, i giocatori che hanno scelto rispettivamente il massimo e il minimo perdono, e danno entrambi un euro al terzo giocatore (che ha scelto il numero "centrale"). Se esattamente due giocatori scelgono lo stesso numero, il terzo giocatore, che ha scelto il numero diverso, perde e dà un euro a ciascuno degli altri due giocatori (che hanno scelto lo stesso numero). Se tutti e tre i giocatori scelgono lo stesso numero, non ci sono vincitori. Individuare gli equilibri di Nash del gioco, giustificando la risposta.

Esercizio 2 In un parlamento siedono 10 deputati. Uno di questi deputati ha un particolare potere di "veto": nessuna legge può essere approvata senza il suo voto favorevole. Viceversa, una legge è approvata se per essa vota la stretta maggioranza dei deputati (cioè almeno 6), e questa maggioranza appunto include il deputato con il potere di veto. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Esercizio 3 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un numero tra $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ (n.b. può capitare che entrambi scegliate lo stesso numero). Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario:

- Se $\frac{y}{6} \leq x \leq y$ e $y \neq 3x$, vinci un euro;
- Se $\frac{y}{6} \leq x \leq y$ e $y = 3x$, perdi un euro;
- Se $x < \frac{y}{6}$ o $x > y$, perdi un euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risovere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per il primo giocatore:

- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{4}$, $\xi_1^i = 0, \forall i = 5,\ldots,8$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$, $\xi_1^i = 0, \forall i = 3,\ldots,8$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2^7 = \xi_2^8 = \frac{1}{4}$, $\xi_2^j = 0, \forall j = 2,\ldots,6$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0$, $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j = 3,\ldots,8$;

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\ldots,\xi_1^8)$ il vettore stocastico associato alle 8 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\ldots,\xi_2^8)$ il vettore stocastico associato alle 8 possibili strategie pure del secondo giocatore).

3.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

3.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

3.3 Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuare il valore del gioco, spiega perché non è possibile).

3.4 Indica se qualcuna di queste strategie è un equilibrio di Nash. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

Soluzione: La matrice C dei payoff in forma di costo per il primo giocatore è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{8} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 8$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 8$$

$$\sum_{i=1}^{8} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{4}$, $\xi_1^i = 0, \forall i = 5, \ldots, 8$, è $z = \frac{1}{2}$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{2}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$, $\xi_1^i = 0, \forall i = 3, \ldots, 8$, è $z = 0$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{8} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 8$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 8$$

$$\sum_{j=1}^{8} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2^7 = \xi_2^8 = \frac{1}{4}$, $\xi_2^j = 0, \forall j = 2, \ldots, 6$ è $w = 0$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \xi_2^1 = 0$, $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j = 3,\dots,8$, è $w = -1$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0) = w(\frac{1}{2},0,0,0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ e quindi la strategia $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0)$ è conservativa per il primo giocatore e la strategia $(\frac{1}{2},0,0,0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ è conservativa per il secondo giocatore (e, ovviamente, le altre due strategie non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è 0 (malgrado la matrice dei payoff non sia antisimmetrica). Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 \leq 2\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -4 \leq x_2 \leq 3\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2+2) + 4x_1x_2$ e $C_2(x_1,x_2) = x_2^2 + x_2(2-x_1^2) + 2x_1x_2$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

Soluzione

4.1 Non possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché l'insieme X_1 non è compatto.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2+2) + 4x_1x_2$$
$$x_1 \leq 2$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min x_2^2 + x_2(2-x_1^2) + 2x_1x_2$$
$$-4 \leq x_2 \leq 3$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} 2 & \text{se } -4 \leq x_2 \leq 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + 2 & \text{se } 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} 3 & \text{se } x_1 \leq -2 \\ \frac{x_1^2-2x_1-2}{2} & \text{se } -2 \leq x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che le intersezioni delle best response function, quindi gli equilibri di Nash sono il punto $(x_1,x_2)^N = (2,-1)$ e i due punti di intersezione tra le parabole $x_2^2 - 4x_2 + 2$ e $\frac{x_1^2-2x_1-2}{2}$.