**Teoria dei Giochi e delle Decisioni – Prova del 16 Febbraio 2010**

**Cognome, Nome, Numero di Matricola, email:** ____________________

**Esercizio 1** Considerate una popolazione di $n$ cittadini interessati a un servizio pubblico, dove $n$ è un numero pari e maggiore di 10). Il servizio verrà erogato se e solo più di $\frac{n}{2}$ cittadini pagano un costo di attivazione del servizio; si osservi che: 1) il servizio *non* viene erogato se i cittadini che pagano il costo di attivazione sono esattamente $\frac{n}{2}$ (o meno); 2) qualora il servizio venga erogato, esso viene erogato a *tutti* i cittadini, indipendentemente dal fatto che il cittadino abbia pagato il costo di attivazione o meno; 3) qualora il servizio non venga erogato, il costo di attivazione *non* viene rimborsato ai cittadini che lo hanno pagato.

Ciascun cittadino attribuisce una utilità pari a 1 all'erogazione del servizio (e, naturalmente, una utilità pari a 0 alla mancata erogazione). Inoltre, per ciascun cittadino, il costo di attivazione del servizio è inversamente proporzionale al numero di cittadini disposti a pagare: in particolare, esso è pari a $\frac{5}{k}$, dove $k$ è proprio il numero di cittadini che pagano (naturalmente, il costo di attivazione è zero per un cittadino che non paga).

**1.1** Indicare gli equilibri di Nash del gioco, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

**1.2** Indicare le strategie debolmente e strettamente dominanti per ciascun giocatore, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

**1.3** Indicare i punti di ottimo debole secondo Pareto, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

**1.4** Indicare le strategie conservative per ciascun giocatore, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

*Soluzione*: **1.1** Gli equilibri di Nash del gioco sono i seguenti: il punto in cui ogni cittadino decide di non pagare l'attivazione del servizio, e tutti i punti in cui la cardinalità dell'insieme dei cittadini che paga l'attivazione del servizio è pari a $\frac{n}{2}+1$.

**1.2** Non esistono strategie debolmente o strettamente dominanti.

**1.3** Sono ottimi deboli secondo Pareto tutti i punti in cui la cardinalità dell'insieme dei cittadini che paga l'attivazione del servizio è maggiore o uguale a $\frac{n}{2}+1$.

**1.4** La strategia conservativa per ciascun giocatore è non pagare per l'attivazione del servizio.

**Esercizio 2** Considera il seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un intero tra 1 e 8. Sia $x$ il numero che scegli tu e $y$ il numero scelto dal tuo avversario.

- Se $x \geq 2y$, vinci un euro;
- Se $y \geq 2x$, perdi un euro;
- Se $\frac{y}{2} < x < y$, vinci un euro;
- Se $\frac{x}{2} < y < x$, perdi un euro;
- Se $x = y$, c'è un pareggio.

Formula il problema di programmazione lineare, scrivendo la matrice di payoff in forma di *costo*, che consente di calcolare il valore del gioco (non è richiesto di risovere tale programma). Dire quindi quali tra le seguenti strategie è conservativa per il primo giocatore, giustificando la risposta:

- $\xi_1^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1, \dots, 8$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 4, \dots, 8$

- $\xi_1^4 = \xi_1^8 = \frac{1}{2}, \xi_1^i = 0, \forall i \in \{1,2,3,5,6,7\}$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^i, \ldots, \xi_1^8)$ il vettore stocastico associato alle 8 possibili strategie pure del primo giocatore).

**2.1** Dire quindi se il gioco ammette un equilibrio di Nash *puro*, giustificando sinteticamente la risposta.

*Soluzione*: La matrice dei payoff in forma di costo per il primo giocatore è la seguente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con $c_{ij}$ l'elemento alla riga $i$ e la colonna $j$ di tale matrice, il problema di programmazione lineare che è necessario risolvere per determinare il valore del gioco, può essere scritto come:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{8} c_{ij} \xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 8$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 8$$

$$\sum_{i=1}^{8} \xi_1^i = 1$$

Osserviamo preliminarmente che la matrice dei payoff è anti-simmetrica, quindi il valore del gioco deve essere zero, cioé $z^* = 0$.

- $\xi_1^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1, \ldots, 8$ non è un equilibrio di Nash, perché se andiamo a sostituire tale vettore nella formulazione otteniamo $z = \frac{3}{8} \neq 0$.
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 8$ non è un equilibrio di Nash, perché se andiamo a sostituire tale vettore nella formulazione otteniamo $z = 1 \neq 0$.
- $\xi_1^4 = \xi_1^8 = \frac{1}{2}, \xi_1^i = 0, \forall i \in \{1,2,3,5,6,8\}$ non è un equilibrio di Nash, perché se andiamo a sostituire tale vettore nella formulazione otteniamo $z = \frac{1}{2} \neq 0$.

**2.1** Il gioco non ammette un equilibrio di Nash puro perché andando a sostituire nella formulazione precedente un qualunque vettore $\xi$ corrispondente ad una strategia pura ottengo sempre $z = 1 \neq 0$.

**Esercizio 3** Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti $A$ e $B$ in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (8,3)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (4,6)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = 2w_A^1 + 4w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 6w_B^1 + 2w_B^2$).

Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene. Fornire inoltre un'imputazione nel nucleo di tale gioco. Giustificare le risposte.

*Soluzione*: Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo $(N, v)$ dobbiamo definire la funzione $v$. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 28$ e $v(\{B\}) = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 36$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 2z_A^1 + 4z_A^2 + 6z_B^1 + 2z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 12$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 9$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 12 - z_A^1$ e $z_B^2 = 9 - z_A^2$. Possiamo così ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max -4z_A^1 + 2z_A^2 + 90$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 12$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 9$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(12,0)$ $(0,9)$ e $(12,9)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(0,9)$ ed il valore ottimo è pari a 108. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A, B\}) = 108$ e la spartizione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (0,9)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (12,0)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ tali che:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \geq 28 \\ &\alpha_2 \geq 36 \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = 108 \end{aligned}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (50, 58)$.

**Esercizio 4** Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con $x_1$ per il primo giocatore e $x_2$ per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -1 \leq x_2 \leq 6\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_1$ e $C_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_2$.

**4.1** Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash (giustificare brevemente la risposta)?

**4.2** Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

**Soluzione**

**4.1** Non possiamo concludere a priori che il gioco ammette un equilibrio di Nash, poiché l'insieme $X_1$ non è compatto.

**4.2** Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema non vincolato:

$$\min \frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_1$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_2$$

$$-1 \leq x_2 \leq 6$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = 4x_2 - 7. \quad b_2(x_1) = \begin{cases} 6 & \text{se } x_1 \leq -\frac{4}{3} \\ -3x_1 + 2 & \text{se } -\frac{4}{3} \leq x_1 \leq 1 \\ -1 & \text{se } x_1 \geq 1 \end{cases}$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che l'unico punto di intersezione delle best reponse function, quindi l'unico equilibrio di Nash è $(x_1, x_2)^N = \left(\frac{1}{13}, \frac{23}{13}\right)$.