Teoria dei Giochi – Prova del 26 Febbraio 2010

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ______________________________

Esercizio 1 Considera il gioco antagonistico descritto dalla seguente matrice di payoff:

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -2 & 7 \\ 7 & -2 & -1 & 5 \\ -4 & -2 & -3 & 9 \\ -8 & -6 & -3 & -4 \end{matrix}$$

N.B. Considera il gioco *puro*, non la sua estensione in strategia mista.

1.1 Indica gli equilibri di Nash del gioco, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.2 Indica le strategie debolmente dominanti per ciascun giocatore, se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

1.3 Indica i punti di ottimo debole secondo Pareto (n.b. *tutti*, non solo quelli che sono anche equilibri di Nash), se esistono (non è richiesto di giustificare la risposta).

Soluzione: **1.1** L'unico equilibrio di Nash del gioco è quello in cui il primo giocatore (il giocatore sulle righe) utilizza la quarta strategia e il secondo giocatore (il giocatore sulle colonne) utilizza la terza strategia.

1.2 Per il primo giocatore, una strategia debolmente dominante è la quarta. Non esistono strategie debolmente dominanti per il secondo giocatore.

1.3 Sono ottimi deboli secondo Pareto tutti i punti: questo banalmente è vero per ogni gioco di tipo antagonista.

Esercizio 2 Considera l'estensione in strategia mista del seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un numero tra $\{2,4,8,16,32,64,128\}$ (n.b. può capitare che entrambi scegliate lo stesso numero). Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario:

- Se $x \geq y$ e $y \neq \frac{x}{2}$, vinci un euro;
- Se $x \geq y$ e $y = \frac{x}{2}$, perdi un euro;
- Se $x < y$, perdi un euro.

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risovere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{7}, \forall i = 1,\dots,7$
- $\xi_1^6 = \xi_1^7 = \frac{1}{2}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1,\dots,5$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{7}, \forall j = 1,\dots,7$
- $\xi_2^6 = \xi_2^7 = \frac{1}{2}; \xi_2^j = 0, \forall j = 1,\dots,5$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del secondo giocatore).

2.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

2.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiegare perché non è possibile).

2.3 Qual è il valore del gioco? (Se non è possibile individuare il valore del gioco, spiegare perché non è possibile).

2.4 Indica se qualcuna di queste strategie èun equilibrio di Nash. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiegare perché non è possibile).

Soluzione: La matrice C dei payoff in forma di costo per il primo giocatore è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{7} c_{ij} \xi_1^i \quad j = 1, \dots, 7$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\sum_{i=1}^{7} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{7}, \forall i = 1, \dots, 7$, è $z = \frac{5}{7}$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{5}{7}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^6 = \xi_1^7 = \frac{1}{2}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1, \dots, 5$, è $z = 0$. Quindi, il primo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{7} c_{ij} \xi_2^j \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{j=1}^{7} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{7}, \forall j = 1, \ldots, 7$, è $w = -\frac{5}{7}$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{5}{7}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^6 = \xi_2^7 = \frac{1}{2}; \xi_2^j = 0, \forall j = 1, \ldots, 5$, è $w = 0$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(0,0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = w(0,0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e quindi la strategia $(0,0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è conservativa per il primo giocatore e la strategia $(0,0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è conservativa per il secondo giocatore (e, ovviamente, le altre due strategie non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è 0 (malgrado la matrice dei payoff non sia antisimmetrica). Infine, naturalmente, le due strategie conservative determinano un equilibrio di Nash.

Esercizio 3 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = \left(w_A^1, w_A^2\right) = (10, 12)$ (risp. $w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right) = (15, 8)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = 6w_A^1 + 5w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 5w_B^1 + 6w_B^2$).

Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene. Fornire inoltre un'imputazione nel nucleo di tale gioco. Determinare il valore di Shapley di entrambi i giocatori. Giustificare le risposte.

Soluzione: Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo (N, v) dobbiamo definire la funzione v. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 6 \cdot 10 + 5 \cdot 12 = 120$ e $v(\{B\}) = 5 \cdot 15 + 6 \cdot 8 = 123$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 6z_A^1 + 5z_A^2 + 5z_B^1 + 6z_B^2$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 25$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 20$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 25 - z_A^1$ e $z_B^2 = 20 - z_A^2$. Possiamo così ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max z_A^1 - z_A^2 + 245$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 25$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 20$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(25,0)$ $(0,20)$ e $(25,20)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(25,0)$ ed il valore ottimo è pari a 270. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A,B\}) = 270$ e la spartizione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (25,0)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (0,20)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori α_1 ed α_2 tali che:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \geq 120 \\
&\alpha_2 \geq 123 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 = 270
\end{aligned}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (135, 135)$.

Il valore di Shapley del primo giocatore è:

$$S_A(v) = \frac{v(\{A\})}{2} + \frac{v(\{A \cup B\})}{2} - \frac{v(\{B\})}{2} = 60 - 61,5 + 135 = 133,5$$

mentre quello del secondo giocatore è:

$$S_B(v) = \frac{v(\{B\})}{2} + \frac{v(\{A \cup B\})}{2} - \frac{v(\{A\})}{2} = 61,5 - 60 + 135 = 136,5$$

Esercizio 4 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{3 \leq x_1 \leq 5\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -3 \leq x_2 \leq 2\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2+3) + 8$ e $C_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1x_2 - 3x_2$.

4.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash (giustificare brevemente la risposta)?

4.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

Soluzione

4.1 Possiamo affermare l'esistenza a priori di un equilibrio di Nash perché le funzioni di costo di entrambi i giocatori sono continuamente differenziabili, $C_1(x_1,x_2)$ è convessa in x_1 e $C_2(x_1,x_2)$ è convessa in x_2, ed entrambi gli insiemi X_1 ed X_2 sono convessi e compatti.

4.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\begin{gathered}
\min \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2+3) + 8 \\
3 \leq x_1 \leq 5
\end{gathered}$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\begin{gathered}
\min \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1x_2 - 3x_2 \\
-3 \leq x_2 \leq 2
\end{gathered}$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sottoproblema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} x_2^2 + 3 & \text{se } -\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2} \\ 5 & \text{se } -3 \leq x_2 \leq -\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{2} \leq x_2 \leq 2 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \begin{cases} -3 & \text{se } 3 \leq x_1 \leq 5 \end{cases}$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che l'unico punto di intersezione delle best reponse function, quindi l'unico equilibrio di Nash è $(x_1, x_2)^N = (5, -3)$.