Teoria dei Giochi – Prova del 21 Luglio 2015

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________________

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione, dove x è un qualunque numero intero (positivo o negativo):

		Giocatore 2		
		A	B	C
Giocatore 1	D	$3,6$	$1,4$	$4,1$
	E	$3+x, 4-x$	$2, 2+x$	$3,1$
	F	$4,4$	$2, 3+x$	$2,1$

1.1 Dire per quali valori di x esistono equilibri di Nash del gioco (se ne esistono) e quali sono.

1.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di x esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono.

1.3 Porre adesso $x = 0$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso.

Non è richiesto di giustificare alcuna risposta.

Soluzione 1.1 Il punto (E,A) è un equilibrio di Nash per $x = 1$. Il punto (E,B) è un equilibrio di Nash per $x \geq 1$. Il punto (F,A) è un equilibrio di Nash per $x \leq 1$. Il punto (F,B) è un equilibrio di Nash per $x \geq 1$. **1.2** Il primo giocatore non ha strategie debolmente dominanti, per il secondo giocatore A è una strategia debolmente dominante per $x \leq 1$. **1.3** I punti sono: (D,A), (D,C), (E,A), (F,A).

Esercizio 2 Consideriamo la seguente variazione del meccanismo d'asta in busta chiusa di secondo prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Al solito, vince l'asta il giocatore che ha fatto l'offerta più alta – e a parità di offerta, vince il giocatore con indice più basso –, che però in questo casa paga un prezzo p pari a $\frac{1}{4}x^* + 1$, dove x^* il valore della seconda offerta più alta. Infine, il payoff del generico giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta.

Quali delle seguenti affermazioni è vera? N.B. Se un'affermazione è vera, non è necessario fornire una giustificazione, se un'affermazione è falsa è necessario fornire un esempio in cui appunto è falsa.

Per il giocatore i la strategia $x = v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = 4v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = 4v_i + 4$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = 4v_i - 4$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i non esistono strategie debolmente dominanti.

Soluzione 2.1 Si consideri per esempio la prima giocatrice. Se ella gioca un *qualunque* valore $x_1 > 4v_1 - 4$ e tutti gli altri giocatori giocano valori $x_j \in (4v_1 - 4, x_1)$, allora la sua utilità è negativa: se invece ella avesse giocato $4v_1 - 4$ allora la sua utilità sarebbe stata zero.

Analogamente, se la prima giocatrice gioca un *qualunque* valore $x_1 < 4v_1 - 4$ e tutti gli altri giocatori giocano valori $x_j \in (x_1, 4v_1 - 4)$, allora la sua utilità è 0: se invece ella avesse giocato $4v_1 - 4$ allora la sua utilità sarebbe stata positiva.

Segue che qualunque strategia $x_1 \neq 4v_1 - 4$ non è debolmente dominante. È facile vedere poi come $34v_1 - 4$ sia invece debolmente dominante, e come questo si estende a tutti i giocatori: per ogni giocatore j, giocare $4v_j - 4$ è l'unica strategia debolmente dominante.

Esercizio 3 Si consideri il seguente gioco antagonistico. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{2, 8, 26, 80\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{1, 5, 7, 15\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore: se $x + y$ è una potenza di 2 il primo giocatore vince un euro; se $x + y$ è una potenza di 3 il secondo giocatore vince un euro; in tutti gli altri casi c'è parità e il payoff di ciascun giocatore è 0.

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risp.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

3.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1, \dots, 4$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1, \dots, 4$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 1, \xi_2^4 = 0$:

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

3.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

3.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

3.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Soluzione 3.1 Per il primo giocatore, le strategie debolmente dominanti sono giocare $\{8, 26, 80\}$, per il secondo giocatore la strategie debolmente dominante è giocare 1. Tutti punti $(x, 1)$ con $x \in \{1, 8, 26, 80\}$ sono equilibri di Nash. **3.3-3.6** Delle strategie fornite l'unica debolmente dominante è:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1, \dots, 4$

Per cui agli equilibri di Nash individuati al punto 3.2 (opportunamente espressi in forma mista), si aggiunge il punto $((1/4, 1/4, 1/4, 1/4), (1, 0, 0, 0)\}$. Il valore del gioco è 1.

Esercizio 4 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti ordini totali rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna:

- Uomo 1: $\{D, A, C, B\}$; Uomo 2: $\{A, D, B, C\}$; Uomo 3: $\{D, B, A, C\}$; Uomo 4: $\{B, C, A, D\}$.
- Donna A: $\{3, 4, 1, 2\}$; Donna B: $\{2, 1, 3, 4\}$; Donna C: $\{2, 1, 4, 3\}$; Donna D: $\{3, 1, 2, 4\}$.

4.1 Il matching $M = \{(2,B),(1,D),(3,A),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

4.2 Il matching $M = \{(1,C),(2,B),(3,D),(4,A)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

Soluzione 4.1 M non è stabile: per esempio rispetto alla coalizione $S = \{3,D\}$.

Soluzione 4.1 M è stabile.

Esercizio 5 Si consideri la variante del poker di Kuhn in cui il mazzo di carte è composto da 4 carte: un 1, un 2, un 3 e un 4. Vogliamo esprimere il gioco come un gioco non cooperativo in forma normale: quali e quante sono le strategie a disposizione dei due giocatori? *Per rispondere al quesito, è sufficiente illustrare sinteticamente quali sono le differenze con il caso discusso a lezione, in cui il mazzo è composto da 3 carte.*