- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**

0.1 Problemi di massimo flusso (44-49 [1])

- Sia dato un grafo orientato $D(V, E)$ e supponiamo che sia anche data una funzione di *capacità* $u : E \mapsto \mathbb{R}$ sugli archi di D. Siano infine dati un nodo (di partenza) s e un nodo (di arrivo) t. Informalmente, il problema che vogliamo risolvere è quello di inviare su D la maggiore quantità possibile di un certo bene, rispettando i vincoli di capacità sugli archi.

  Per esempio, D potrebbe rappresentare una rete stradale e la capacità di un certo arco rappresenta il numero massimo di camion che possono percorrere ogni ora quella strada. Noi vogliamo trasferire la maggior quantità possibile di una certa merce da un luogo di produzione s a un luogo di distribuzione t (entrambi nodi del nostro grafo) e per fare questo la caricheremo appunto su dei camion. Siamo quindi interessati a calcolare il numero massimo di camion che riusciamo a inviare da s a t ogni ora, rispettando i vincoli di capacità sugli archi.

  Possiamo quindi formulare il seguente problema: dato un grafo orientato $D(V, E)$, una funzione di capacità $u : E \mapsto \mathbb{Z}$ e due nodi s e t, trovare una collezione $\mathcal{P}$ di cammini da s a t di cardinalità massima e tale che, per ogni arco $e \in E$, il numero di cammini in $\mathcal{P}$, non necessariamente distinti, che utilizzano l'arco e sia minore o uguale a $u(e)$. Questo problema è detto *problema del massimo flusso da s a t*.

- Come possiamo rappresentare una soluzione per il problema precedente? Dalla nostra definizione segue che una soluzione (non necessariamente di cardinalità massima) consiste di un insieme di cammini da s a t $P_1, P_2, \dots P_k$, non necessariamente distinti, tali che il numero di cammini P_i che utilizzano un certo arco $e \in E$ è al più pari a $u(e)$.

  Osserviamo che da una soluzione così espressa possiamo ricavare, per ciascun arco $(u, v) \in E$, la quantità $f(u, v)$ di cammini (camion) che utilizzano (transitano su) quell'arco. Si osservi che il vettore f soddisfa necessariamente i seguenti vincoli ($N^+(v)$ e $N^-(v)$ rappresentano, rispettivamente, i successori e i predecessori di v):

  - $\sum_{u \in N^+(v)} f(v, u) = \sum_{u \in N^-(v)} f(u, v) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ – bilancio
  - $f(u, v) \leq u(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$ – capacità

  Nel seguito, chiamiamo *flusso* un qualunque vettore $u : E \mapsto \mathbb{R}_+$ e diciamo che il flusso è un *flusso $s - t$ ammissibile* se esso soddisfa i vincoli di capacità e bilancio. Il *valore* del flusso è pari a: $val(f) = \sum_{u \in N^+(s)} f(s, u) - \sum_{u \in N^-(s)} f(u, s)$; si noti che dai vincoli di bilancio segue che $val(f) = \sum_{u \in N^-(t)} f(u, t) - \sum_{u \in N^+(t)} f(t, u)$.

- Come dimostriamo nel seguito, dato un vettore di flusso $s-t$ ammissibile di valore k, è sempre possibile costruire da questo vettore k una collezione $\mathcal{P}$ di cammini $s-t$ tali che, per ogni arco $e \in E$, il numero di cammini in $\mathcal{P}$ che utilizzano l'arco e sia minore o uguale a $u(e)$.

  Per vedere questo premettiamo innanzitutto la seguente:

  Proposizione 1. *Sia $D(V,E)$ un grafo, $s,t \in V$, $u : E \mapsto \mathbb{R}$. Sia f un flusso $s-t$ ammissibile. È sempre possibile costruire a partire da f un flusso $s-t$ ammissibile f' tale che $val(f) = val(f')$ e inoltre il grafo $D'(V,E')$, con $E' = \{e \in E : f'(e) > 0\}$, sia aciclico.*

  Dim. Supponiamo che per f esista un ciclo orientato C tale che $f(e) > 0$ per ogni $e \in E(C)$. Sia $\alpha = \min_{e \in E(C)} f(e)$ e sia $\bar{f}$ il vettore di flusso tale che:

  - $\bar{f}(e) = f(e)$, per $e \notin E(C)$
  - $\bar{f}(e) = f(e) - \alpha$, per $e \in E(C)$

  È facile vedere che $\bar{f}$ è anch'esso un flusso $s-t$ ammissibile, vale $val(f) = val(\bar{f})$ e infine $|\{e \in E : \bar{f}(e) > 0\}| < |\{e \in E : f(e) > 0\}|$. Iterando questo argomento possiamo costruire il flusso $s-t$ ammissibile f' che soddisfa le condizioni della proposizione.

  Nel seguito chiamiamo un flusso come il flusso f' nella Proposizione 1 *aciclico*. Sia quindi f un flusso $s-t$ ammissibile e aciclico. Vogliamo dimostrare che è sempre possibile costruire da questo flusso una collezione $\mathcal{P}$ di $val(f)$ cammini $s-t$ tali che, per ogni arco $e \in E$, il numero di cammini in $\mathcal{P}$ che utilizzano l'arco e sia $\leq u(e)$. Se $val(f) = 0$, non c'è niente da dimostrare.

  Quindi supponiamo che $val(f) > 0$. Poiché $val(f) = \sum_{u \in N^-(t)} f(u,t) - \sum_{u \in N^+(t)} f(t,u)$ segue che esiste un nodo v_{p-1} tale che $(v_{p-1}, t) \in E$ e $f(v_{p-1}, t) > 0$. Se $v_{p-1} = s$ allora abbiamo trovato un cammino $s-t$ (composto da un solo arco) su cui possiamo inviare $f(s,t) > 0$ unità del nostro flusso. Altrimenti, se $v_{p-1} \neq s$, poiché il vincolo di bilancio è soddisfatto su v_{p-1} segue che esiste un nodo v_{p-2} e un arco $(v_{p-2}, v_{p-1}) \in E$ tale che $f(v_{p-2}, v_{p-1}) > 0$: si noti che $v_{p-2} \neq t$, perché stiamo assumendo f aciclico. Di nuovo, se $v_{p-2} = s$ allora abbiamo trovato un cammino $s-t$ (composto da due archi) su cui possiamo inviare $\min(f(s, v_{p-1}), f(v_{p-1}, t))$ unità del flusso. Se invece $v_{p-2} \neq s$, esiste v_{p-3} e un arco $(v_{p-3}, v_{p-2}) \in E$ tale che $f(v_{p-3}, v_{p-2}) > 0$: si noti che $v_{p-3} \notin \{v_{p-1}, t\}$, perché stiamo assumendo f aciclico ... possiamo iterare il ragionamento e concludere che, poiché il numero di nodi è finito, in ogni caso, esiste $p \geq 1$ e un cammino P: $s \equiv v_0, v_1, \ldots, v_2, v_p \equiv t$ tale che, per $i = 0..p-1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ e $f(v_i, v_{i+1}) > 0$.

  Sia $\alpha(P) = \min_{e \in E(P)} f(e)$ e sia $\bar{f}$ il vettore di flusso tale che:

  - $\bar{f}(e) = f(e)$, per $e \notin E(P)$

– $\bar{f}(e) = f(e) - \alpha$, per $e \in E(P)$

È facile vedere che $\bar{f}$ è anch'esso un flusso $s-t$ ammissibile e vale $val(\bar{f}) = val(f) - \alpha$. Possiamo quindi mettere $\alpha(P)$ copie di P nella collezione $\mathcal{P}$ e iterare il ragionamento precedente.

Segue quindi che, dato un vettore di flusso $s-t$ ammissibile f, possiamo sempre scomporre questo vettore di flusso in $val(f)$ cammini $s-t$ tali che, per ogni arco $e \in E$, il numero di cammini in $\mathcal{P}$ che utilizzano l'arco e sia minore o uguale a $u(e)$.

Quindi nel seguito per risolvere il problema del massimo flusso ci concentreremo appunto solo sui vettori di flusso, dimenticandoci dei cammini. In altre parole risolveremo il seguente problema: dato un grafo orientato $D(V, E)$, una funzione di capacità $u : E \mapsto \mathbb{R}$ e due nodi s e t, trovare un flusso $s-t$ ammissibile e di valore massimo.

- La rappresentazione con i flussi è spesso più interessante (o più precisamente meno ridondante) che quella basata su camini. Infatti, consideriamo la rete con nodi $\{s, a_1, a_2, a, b_1, b_2, t\}$ e archi $\{(s, a_1), (s, a_2), (a_1, a), (a_2, a), (a, b_1), (a, b_2), (b_1, t), (b_2, t)\}$, tutti con capacità 1. Se guardiamo ai flussi, esiste un *unico* flusso $s-t$ ammissibile di valore massimo, pari a 2 (flusso 1 su tutti gli archi); se invece guardiamo ai cammini esistono 2 diverse coppie di cammini che implemetano questo flusso massimo.

- Una conseguenza della Proposizione 1 è il fatto seguente. Esiste sempre un flusso $s-t$ massimo in cui il flusso sugli archi entranti in s e sugli archi uscenti da t è 0.

0.2 Il teorema del massimo flusso/minimo taglio (44-49 [1])

- Un *taglio* $s-t$ è una partizione dei vertici di V in due classi V_1, V_2, tali che $s \in V_1, t \in V_2$. In seguito indichiamo con (V_1, V_2) gli archi che vanno da un nodo di V_1 a un nodo di V_2 ovvero $(V_1, V_2) = \{(u, v) \in E : u \in V_1, v \in V_2\}$.

  Chiamiamo anche *capacità del taglio* il valore $\sum_{(u,v)\in(V_1,V_2)} u(u, v)$.

- Consideriamo un qualsiasi flusso $s-t$ ammissibile e un qualsiasi taglio $s-t$ (V_1, V_2). Sommiamo i vincoli di bilancio sui nodi $v \in V_1 \backslash s$ e il vincolo $val(f) = \sum_{u\in N^+(s)} f(s, u) - \sum_{u\in N^-(s)} f(u, s)$. Otteniamo:

  $\sum_{(u,v)\in(V_1,V_2)} f(u, v) - \sum_{(v,u)\in(V_2,V_1)} f(v, u) = val(f)$.

  La grandezza a primo membro la chiamiamo *flusso netto attraverso il taglio* (V_1, V_2). Quindi, il valore di un qualsiasi flusso è uguale al suo flusso netto attraverso un *qualsiasi* taglio. (Si noti che inizialmente abbiamo definito il valore del flusso considerando il taglio con $V_1 = \{s\}$ e $V_2 = V \setminus \{s\}$).

  Inoltre vale banalmente $val(f) = \sum_{(u,v)\in(V_1,V_2)} f(u, v) - \sum_{(v,u)\in(V_2,V_1)} f(v, u) \le \sum_{(u,v)\in(V_1,V_2)} u(u, v)$.

Il valore del flusso è quindi minore o uguale della capacità di un taglio. Poiché questo vale per un *qualsiasi* flusso e un *qualsiasi* taglio, segue che il valore del *massimo* flusso $s-t$ su D è minore o uguale della capacità del *minimo* taglio $s-t$ su D.

- Osserviamo che il numero di diversi tagli $s-t$ di una rete con n nodi è pari a 2^{n-2}. (Ogni taglio $s-t$ può essere definito indicando quali vertici $\neq s, t$ appartengono a V_1. In particolare, i tagli $s-t$ sono in corrispondenza 1-a-1 con i sottoinsiemi di $V \setminus \{s,t\} \ldots$)

- Sia $D(V,E)$ un grafo orientato capacitato e siano $s,t \in V$. Sia inoltre f un flusso $s-t$ ammissibile. Un cammino P, non necessariamente orientato, tra s e t è detto $s-t$ aumentante rispetto f se valgono le seguenti condizioni:

  - ogni arco $(u,v) \in E(P)$ che è concorde con la percorrenza da s a t è non *saturo*, i.e. $f(u,v) < u(u,v)$ (indichiamo gli archi di P concordi con la percorrenza da s a t con $E(P,f)^+$);
  - ogni arco $(u,v) \in E(P)$ che è discorde con la percorrenza da s a t è non *vuoto*, i.e. $f(u,v) > 0$ ((indichiamo gli archi di P discordi con la percorrenza da s a t con $E(P,f)^-$).

  Sia inoltre:

  $$\varepsilon(P) = \min\left(\min_{(u,v)\in E(P,f)^+}(u(u,v) - f(u,v)); \min_{(u,v)\in E(P,f)^-} f(u,v)\right)$$

  si noti che, per definizione, se P è $s-t$ aumentante rispetto f allora $\varepsilon(P) > 0$.

- Osserviamo che, se esiste un cammino $s-t$ aumentante rispetto f, allora f non è massimo. Infatti, è sufficiente osservare che il seguente vettore di flusso f' è s-t ammissibile e ha valore strettamente maggiore di f:

  - ogni arco $(u,v) \notin E(P,f)$, $f'(u,v) = f(u,v)$;
  - ogni arco $(u,v) \in E(P,f)$ che è concorde con la percorrenza da s a t, $f'(u,v) = f(u,v) + \varepsilon(P)$;
  - ogni arco $(u,v) \in E(P,f)$ che è discorde con la percorrenza da s a t, $f'(u,v) = f(u,v) - \varepsilon(P)$.

  L'operazione precedente la definiamo *aumento di f su P*.

- Possiamo quindi designare il seguente algoritmo, che va sotto il nome di *algoritmo dei cammini aumentanti*:

  0 **Begin**

  1 Inizializzazione: $f(u,v) = 0 \; \forall (u,v) \in E$;

2 **While** $\exists$ un cammino $s-t$ aumentante P rispetto f **do**

- aumenta f su P e sia f' il nuovo flusso
- poni $f = f'$.

3 **End**

- Il precedente algoritmo termina con un flusso $s-t$ ammissibile f tale che rispetto f non esistono cammini aumentanti. Come dimostriamo ora, un tale flusso è necessariamente massimo.

  Sia quindi f un flusso $s-t$ ammissibile tale che non esistano cammini $s-t$ aumentanti rispetto f. Indichiamo con Q l'insieme dei nodi v che riusciamo a raggiungere con cammini $s-v$ aumentanti (ovvero cammini da s a v tali che ...). Naturalmente $s \in Q$ e, per ipotesi, $t \notin Q$. $(Q, V \setminus Q)$ è quindi un taglio $s-t$: consideriamo gli archi di questo taglio. Iniziamo dagli archi diretti, e consideriamo un qualunque arco $(u, v) \in E$ con $u \in Q$ e $v \in V \setminus Q$. Poiché u riusciamo a raggiungerlo con cammini $s-u$ aumentanti, mentre v *non* riusciamo a raggiungerlo con cammini $s-v$ aumentanti, segue che (u, v) è saturo. Ragionando in modo analogo, segue che un qualunque arco $(v, u) \in E$ con $u \in Q$ e $v \in V \setminus Q$ è vuoto. Segue quindi che il flusso f ha valore pari alla capacità del taglio $(Q, V \setminus Q)$, quindi è massimo: infatti, in precedenza, abbiamo osservato che preso un *qualsiasi* flusso $s-t$ e un *qualsiasi taglio* $s-t$, il valore del flusso è minore o uguale della capacità del taglio. Segue quindi che f è un flusso $s-t$ di valore massimo e $(Q, V \setminus Q)$ è un taglio $s-t$ di capacità minima.

- Abbiamo quindi dimostrato, algoritmicamente, che in un qualunque grafo orientato capacitato il valore del massimo flusso da un nodo s a un nodo t è *uguale* alla capacità del taglio $s-t$ di capacità minima, detto anche *minimo* taglio $s-t$.

- Alcune considerazioni sull'algoritmo dei cammini aumentanti:

  – Rimane il problema di individuare algoritmicamente un cammino aumentante rispetto un flusso corrente f. Per fare questo è sufficiente procedere come segue. Associamo a D una rete orientata, detta *rete ausiliaria* D', tale che: $V(D) = V(D')$, mentre $E(D') = \{(u, v) \in E(D) : f(u, v) < u(u, v)\} \cup \{(u, v) \in E(D) : f(v, u) > 0\}$. In altre parole, nella rete ausiliaria esiste un arco (u, v) se e solo se l'arco (u, v) è un arco di $E(D)$ non saturo per f oppure l'arco (v, u) è un arco di $E(D)$ non vuoto. È facile verificare che un cammino $s-t$ aumentante rispetto f su D corrisponde a un cammino $s-t$ *orientato* su D' e viceversa. Naturalmente, per individuare un cammino $s-t$ orientato su D' (e quindi un cammino $s-t$ aumentante rispetto f su D) possiamo utilizzare un qualsiasi algoritmo di visita su grafo orientato.

  – In effetti, nelle considerazioni precedenti abbiamo sorvolato su un punto importante: cosa garantisce che l'algoritmo dei cammini aumentanti termini? La risposta è semplice: ad ogni iterazione l'algoritmo aumenta il valore del flusso di un valore $\varepsilon(P)$. È facile osservare, induttivamente, che $\varepsilon(P)$ è sempre un numero intero (partiamo da un flusso nullo e quindi intero, inoltre le capacità sono, per ipotesi, numeri interi quindi ...). Sia C la capacità del minimo taglio, poiché anche C è un numero intero, segue che in al più C iterazioni l'algoritmo termina.

  Consideriamo per esempio la rete con nodi $\{s, a, b, t\}$ e con archi $\{(s, a), (s, b), (a, t), (b, t), (a, b)\}$, con capacità rispettivamente $M, M, M, M, 1$ (immaginiamo M essere un intero di valore molto grande). Il valore del massimo flusso è $2M$ e se aumentiamo il flusso alternativamente sui cammini $(s, a), (a, b)(b, t)$ e $(s, b), (a, b)(b, t)$ allora occorrono $2M$ esattamente iterazioni per individuare un massimo flusso!

- Naturalmente, anche se abbiamo dimostrato che l'algoritmo termina, l'esempio precedente ci lascia perplessi: in particolare, il numero di iterazioni svolte dall'algoritmo non è limitato polinomialmente nelle dimensioni del grafo (M può essere un numero qualsiasi) e quindi non possiamo dire che la complessità dell'algoritmo è polinomiale. Tuttavia è possibile dimostrare che, se a ogni passo scegliamo un cammino aumentante (per esempio, utilizzando la rete ausiliario) con un numero minimo di archi, allora l'algoritmo dei cammini aumentanti converge in al più n iterazioni.
- L'argomento che abbiamo illustrato per dimostrare la terminazione dell'algoritmo dei cammini aumentanti svela anche qualcosa di più profondo: l'algoritmo è destinato a produrre un vettore di flusso che è (un numero) *intero su ogni arco*. In particolare, questo dimostra anche che esiste sempre un flusso di valore massimo intero su ogni arco: questo non era scontato a priori!
- Consideriamo nuovamente il grafo orientato con nodi $\{s, a_1, a_2, a, b_1, b_2, t\}$ e con archi $\{(s, a_1), (s, a_2), (a_1, a), (a_2, a), (a, b_1), (a, b_2), (b_1, t), (b_2, t)\}$, tutti con capacità 1. Abbiamo già osservato che per questa rete esiste un solo flusso $s - t$ ammissibile di valore massimo (flusso 1 su tutti gli archi); osserviamo ora che esistono *diversi* tagli $s - t$ di capacità minima: tutti questi tagli hanno capacita 2. Quindi, in generale, possono esistere più tagli con capacità minima.

• Consideriamo una generalizzazione del problema del massimo flusso $s - t$. Abbiamo ancora un grafo orientato capacitato, ma questa volta abbiamo un *insieme* $\{s_1, \ldots, s_p\}$ di sorgenti e un *insieme* $\{t_1, \ldots, t_q\}$ di destinazioni. Il problema che ci interessa è il seguente: vogliamo trasferire la massima quantità di un certo bene dall'insieme delle sorgenti a quello delle destinazioni, naturalmente rispettando i vincoli di capacità sugli archi. È possibile risolvere questo problema riconducendolo al caso fin qui affrontato, ovvero quello della singola sorgente e singola destinazione?

  La risposta è affermativa. È sufficiente procedere come segue. A partire dalla rete $D(V, E)$ su cui è definito il problema, costruiamo una nuova rete D' aggiungendo a D 2 nodi e $p+q$ archi: i due nodi li chiamiamo s e t, e gli archi sono $(s, s_1), \ldots, (s, s_p)$ e $(t_1, t), \ldots, (t_q, t)$. A tutti i nuovi archi diamo capacità infinita. È facile verificare che risolvere il nostro problema multi-sorgente multi destinazioni su D equivale a risolvere il problema di massimo flusso $s-t$ su D.

0.3 Matching nei grafi bipartiti (53-55 [1])

- Dato un grafo non orientato $G(V, E)$, un *matching* $M \subseteq E$ è un insieme di spigoli che non hanno estremi in comune. In altre parole, un insieme M di spigoli di G è un matching se nessun vertice di G è "toccato" da più di uno spigolo di M-

- Siamo qui interessati al problema del matching in grafi bipartiti. Naturalmente, la cardinalità del massimo matching in un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$ è minore o uguale del $\min\{|X|, |Y|\}$. In particolare, diciamo che $G(X \cup Y, E)$ ammette un matching X-completo (risp. Y-completo) se esso ammette un matching di cardinalità $|X|$ (risp. Y).

- Sia $G(X \cup Y, E)$ un grafo bipartito. Illustreremo delle condizioni necessarie e sufficienti perché in G ammetta un matching X-completo (risp. Y-completo). Prima di questo, però, vediamo come possiamo individuare un matching di cardinalità massima (il problema del *massimo matching*) su G risolvendo un opportuno problema di massimo flusso su una rete ausiliaria.

  A partire dal grafo $G(X \cup Y, E)$, costriamo una grafo orientato D come segue: aggiundendo a G 2 nodi e $|X| + |Y|$ archi: i due nodi li chiamiamo s e t, e gli archi sono $(s, s_1), \ldots, (s, s_{|X|})$ e $(t_1, t), \ldots, (t_{|Y|}, t)$, dove abbiamo supposto che $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_{|X|}\}$ e $X = \{t_1, t_2, \ldots, t_{|Y|}\}$. A tutti i nuovi archi diamo capacità infinita. Per quanto riguarda gli archi di G, li orientiamo tutti da X a Y e diamo a tutti questi archi capacità infinita. È facile verificare che vale la seguente affermazione: ad ogni matching di cardinalità q su G corrisponde un flusso intero $s-t$ ammissibile di valore q su D e, viceversa, a ogni flusso intero $s-t$ ammissibile di valore q su D corrisponde un matching di cardinalità q su G.

- Possiamo quindi ricondurre il problema del massimo matching al problema del massimo flusso su rete bipartita. Come mostriamo nel seguito, questa riformulazione del problema del massimo matching su grafo bipartito ci permette anche di dimostrare il seguente teorema, che va sotto il nome di teorema di Hall. Nel seguito, per un insieme di vertici $Q \subseteq V$ di un grafo $G(V, E)$, indichiamo con $N(Q)$ l'insieme dei vertici non in Q ma che sono adiacenti ad almeno un vertice di Q, ovvero: $N(Q) = \{v \in V \setminus Q : uv \in E \text{ per qualche } u \in Q\}$.

  Teorema di Hall Un grafo bipartito $G(V, E)$ ammette un matching X-completo (risp. Y-completo) se e solo la seguente condizione, detta *condizione di Hall* è soddisfatta per qualunque sottoinsieme $\emptyset \subseteq Q \subseteq X$ (risp. $\emptyset \subseteq Q \subseteq Y$): $|Q| \leq |N(Q)|$.

  Dim. La necessità di tale condizione è banale. Per la sufficienza consideriamo il problema di massimo flusso $s-t$ definito in precedenza: il valore del massimo matching su G corrisponde al valore del massimo flusso $s-t$ ammissibile su D. Dal teorema del massimo flusso/minimo taglio segue, a sua volta, che questo valore è uguale alla capacità del minimo taglio $s-t$. Sia quindi $(Q, V \setminus Q)$ un taglio $s-t$ di capacità minima su G. Naturalmente, abbiamo che $s \in Q$, $t \in V \setminus Q$; inoltre sia $Q_X = Q \cap X$ e $Q_Y = Q \cap Y$: segue che $Q = s \cup Q_X \cup Q_Y$ e $V \setminus Q = t \cup (X \setminus Q_X) \cup (Y \setminus Q_Y)$.

Per costruzione, gli archi del taglio $(Q, V \setminus Q)$ li possiamo dividere in 3 classi: gli archi che vanno da s a $X \setminus Q_X$ (che hanno capacità 1), archi che vanno da Q_X a $Y \setminus Q_Y$ (che hanno capacità infinita), gli archi che vanno da Q_Y a t (che hanno capacità 1). Tuttavia, osserviamo che poiché $(Q, V \setminus Q)$ è il minimo taglio $s-t$ di D, esso ha capacità minore o uguale alla capacità del taglio $(s, V \setminus \{s\})$, che ha valore $|X|$. Segue quindi che la capacità del taglio $(Q, V \setminus Q)$ ha valore *finito*, e quindi nessuno degli archi di capacità infinita, ovvero nessuno degli archi del grafo bipartito, è un arco diretto per questo taglio, ovvero non esistono archi che vanno da Q_X a $Y \setminus Q_Y$. Segue che la capacità $u(Q, V \setminus Q) = |X \setminus Q_X| + |Q_Y|$.

Supponiamo infine che il valore del massimo matching su G, e quindi il valore di questa capacità , sia minore di $|X|$, ovvero $u(Q, V \setminus Q) = |X \setminus Q_X| + |Q_Y| < |X|$. Poiché $|X| - |X \setminus Q_X| = |Q_X|$, segue che $|Q_Y| < |Q_X|$. Osserviamo infine che poiché non esistono archi che vanno da Q_X a $Y \setminus Q_Y$, segue che $N(Q_x) \subseteq Q_Y$, e quindi $|Q_X| > |Q_Y| \geq |N(Q_X)|$, ovvero Q_X viola la condizione di Hall. In altre parole, abbiamo dimostrato che ogni volta che in G non esiste un matching X completo, esiste un sottoinsieme di X che viola la condizione di Hall, e questo sottoinsieme può essere individuato risolvendo un problema di massimo flusso.

References

[1] B.Bollobas *Graph Theory*. Springer Verlag.