

Teorema di Buckingham (dimostrazione)

Sia f una funzione incognita che determina una grandezza q_1 in funzione di altre $N - 1$ variabili

$$q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_N), \quad (1)$$

e sia la relazione dimensionalmente omogenea, ossia le dimensioni di q_1 devono essere le stesse di f .

Il teorema di Buckingham afferma che in queste ipotesi, la relazione (1) è equivalente (cioè contiene le stesse informazioni) ad un'altra funzione che lega $N - K$ gruppi adimensionali Π_j ottenuti combinando tra loro le N grandezze q_i originali:

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{N-K}), \quad (2)$$

dove F è una funzione (non nota) evidentemente diversa da f . K è il numero minimo di dimensioni fondamentali con cui è possibile esprimere tutte le N variabili q_i .

Riprendiamo l'espressione (1) e riscriviamola nella forma

$$q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_{K+1}, q_{K+2}, \dots, q_N), \quad (3)$$

in cui si ipotizza che le K variabili da q_2 a q_{K+1} contengano almeno una volta ognuna delle K dimensioni fondamentali e che le dimensioni di ognuna di esse non possano essere ottenute combinando linearmente le dimensioni delle $K - 1$ variabili rimanenti (si tornerà in seguito sul significato di queste ipotesi). Osserviamo che l'espressione (3) è comunque generale in quanto se anche le prime K grandezze non soddisfacessero le ipotesi sopra poste, potremmo sempre riordinare le variabili in modo da garantirle.

Si possono ora prendere le K variabili da q_2 a q_{K+1} e combinarle in modo tale da formare un monomio

$$q_2^{\alpha_{2,1}} q_3^{\alpha_{3,1}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,1}}, \quad (4)$$

con gli esponenti $\alpha_{j,1}$ con $j = 2, \dots, K+1$ determinati in modo tale che l'espressione (4) abbia le stesse dimensioni di q_1 . Se ora dividiamo la relazione (3) per la (4), il primo membro formerà il primo gruppo adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{q_1}{q_2^{\alpha_{2,1}} q_3^{\alpha_{3,1}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,1}}}, \quad (5)$$

mentre il secondo membro sarà semplicemente la funzione f' ottenuta dividendo f per la (4)

$$\Pi_1 = f'(q_2, q_3, \dots, q_{K+1}, q_{K+2}, \dots, q_N). \quad (6)$$

A questo punto, seguendo un procedimento analogo al precedente, si può formare un monomio con le stesse dimensioni di q_{K+2} che avrà la forma

$$q_2^{\alpha_{2,K+2}} q_3^{\alpha_{3,K+2}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,K+2}}, \quad (7)$$

con cui sarà possibile costruire il gruppo adimensionale

$$\Pi_{K+2} = \frac{q_{K+2}}{q_2^{\alpha_{2,K+2}} q_3^{\alpha_{3,K+2}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,K+2}}} . \quad (8)$$

L'espressione (8) permette di scrivere la variabile q_{K+2} come

$$q_{K+2} = \Pi_{K+2} [q_2^{\alpha_{2,K+2}} q_3^{\alpha_{3,K+2}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,K+2}}], \quad (9)$$

e quindi la relazione (6) nella forma

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= f'(q_2, q_3, \dots, q_{K+1}, \Pi_{K+2} [q_2^{\alpha_{2,K+2}} q_3^{\alpha_{3,K+2}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,K+2}}], \dots, q_N) \\ &= f''(q_2, q_3, \dots, q_{K+1}, \Pi_{K+2}, \dots, q_N), \end{aligned} \quad (10)$$

(visto che la dipendenza da $q_2, \dots, q_{K+1}$ è già espressa nelle prime K variabili).

Ripetendo la procedura sopra descritta per le variabili rimanenti fino a q_N si giunge alla relazione

$$\Pi_1 = f^K(q_2, q_3, \dots, q_{K+1}, \Pi_{K+2}, \dots, \Pi_N), \quad (11)$$

che contiene K variabili dimensionali $q_2, \dots, q_{K+1}$ e $N - K$ gruppi adimensionali Π_j .

Indichiamo ora con d_j , per $j = 1, \dots, K$, le dimensioni fondamentali con cui abbiamo deciso di esprimere le N variabili di partenza e immaginiamo di voler cambiare le unità di misura di una di esse (senza perdita di generalità, supponiamo che la prima d_1 sia una lunghezza e che decidiamo di passare dai metri ai pollici): poiché le prime K variabili contengono almeno una volta ognuna delle dimensioni fondamentali, abbiamo la certezza che almeno una di esse $q_2, \dots, q_{K+1}$ deve cambiare valore mentre, d'altro canto, né Π_1 né tutti gli altri Π_j devono cambiare valore in quanto adimensionali. Se operiamo lo stesso cambiamento per tutti i d_j fino a $j = K$ sicuramente modificheremo almeno una volta il valore numerico di ognuna delle variabili $q_2, \dots, q_{K+1}$ senza che cambi mai il valore di Π_1 e di tutti i rimanenti Π_j .

Abbiamo quindi una funzione il cui valore (Π_1) rimane costante qualunque valore assumano le variabili $q_2, \dots, q_{K+1}$ se i rimanenti gruppi adimensionali $\Pi_{K+2}, \dots, \Pi_N$ rimangono anch'essi costanti; questo dimostra che la funzione f^K espressa in (11) non può dipendere dalle variabili $q_2, \dots, q_{K+1}$ per cui possiamo scrivere

$$\Pi_1 = F(\Pi_{K+2}, \dots, \Pi_N), \quad (12)$$

che dipende solo da $N - K$ gruppi adimensionali e che deve essere equivalente alla funzione di partenza (1) in quanto da essa ottenuta per uguaglianze successive.

Rimane solo da capire se effettivamente sia sempre possibile costruire dei monomi come quelli nell'espressione (4) in modo da avere le stesse dimensioni di una variabile scelta. In questo caso bisogna imporre che

$$[q_l] = [q_2^{\alpha_{2,l}} q_3^{\alpha_{3,l}} \dots q_{K+1}^{\alpha_{K+1,l}}], \quad l = 1, N - K \quad (13)$$

dove la notazione [...] indica la dimensione della grandezza contenuta tra le parentesi. Indicando esplicitamente le dimensioni di tutte le variabili q_i , ed imponendo che le dimensioni di primo e secondo membro siano identiche, l'espressione (13) si trasforma in $N - K$ sistemi lineari di K equazioni nelle K incognite $\alpha_{i,l}$ (si veda il metodo della variabili ripetute per la determinazione dei gruppi adimensionali). Affinchè tali sistemi abbiano soluzione unica, il teorema di Cramer richiede che il determinante della matrice formata dai coefficienti delle incognite sia diverso da zero. L'ipotesi iniziale che ognuna delle dimensioni fondamentali sia contenuta da almeno una delle variabili $q_2, \dots, q_{K+1}$ e che esse siano dimensionalmente indipendenti, ci assicura che la matrice sopra menzionata non abbia nessuna colonna di zeri e nessuna riga combinazione lineare delle altre il che ci garantisce che il suo determinante sia diverso da zero.

Esempio

Come semplice applicazione degli argomenti sopra esposti, si consideri un corpo solido di dimensione L e superficie S investito da una corrente a velocità U di un fluido con proprietà ρ , μ e a che sono, rispettivamente, densità, viscosità dinamica e velocità del suono. Detta D la forza di resistenza tra fluido e corpo si può scrivere:

$$D = \hat{f}(L, S, U, \rho, \mu, a), \quad (14)$$

essendo $\hat{f}$ una funzione incognita da determinare tramite prove sperimentali.

La relazione (14) coinvolge $N = 7$ grandezze esprimendo la resistenza D in funzione di $N - 1 = 6$ variabili indipendenti: se si volesse caratterizzare $\hat{f}$ per punti, facendo assumere ad ogni variabile indipendente $p = 10$ valori si dovrebbero eseguire $p^{N-1} = 10^6$ prove sperimentali, un numero chiaramente al di là delle possibilità pratiche. L'applicazione del teorema di Buckingham, permette tuttavia di razionalizzare la quantità di prove da eseguire raggruppando le grandezze in gruppi adimensionali.

Si determinano preliminarmente le dimensioni delle varie quantità:

$$\begin{aligned} [D] &= \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}, & [D] &= \mathcal{L}, & [S] &= \mathcal{L}^2, & [U] &= \mathcal{L}\mathcal{T}^{-1} \\ [\rho] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}, & [\mu] &= \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-1}, & [a] &= \mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

da cui si vede che le $K = 3$ dimensioni fondamentali $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$, rispettivamente, massa, lunghezza e tempo, sono sufficienti a descrivere dimensionalmente le $N = 7$ grandezze dell'espressione originale quindi, in base al teorema di Buckingham, possiamo riscriverla utilizzando solo $N - K = 4$ gruppi adimensionali ottenuti combinando tra loro le 7 grandezze di partenza.

Partendo dalla relazione (14), cominciamo con il verificare se le prime $K = 3$ variabili indipendenti (L , S ed U) possono essere utilizzate per formare i gruppi adimensionali; in base alle relazioni (15) ciò non risulta possibile in quanto in nessuna delle variabili è contenuta la dimensione fondamentale $\mathcal{M}$ e inoltre L ed S non risultano dimensionalmente indipendenti (le dimensioni della seconda si ottengono elevando la prima al quadrato). Si procede quindi ad una riorganizzazione delle variabili nella (14) in modo che le prime K soddisfino le ipotesi

del teorema e una delle possibilità risulta:

$$D = f(L, U, \rho, S, \mu, a), \quad (16)$$

essendo $\hat{f}$ della (14) ed f della (16) diverse solo in quanto l'ordine delle variabili è stato cambiato.

È facile verificare che la quantità $\rho U^2 L^2$ è dimensionalmente identica a D quindi si può formare il primo gruppo adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{D}{\rho U^2 L^2}. \quad (17)$$

Analogamente si può ottenere $[S] = [\rho^0 U^0 L^2]$, $[\mu] = [\rho^1 U^1 L^1]$ e $[a] = [\rho^0 U^1 L^0]$ da cui, in analogia con l'espressione (11), si ottiene

$$\frac{D}{\rho U^2 L^2} = f^{IV} \left(L, U, \rho, \frac{S}{L^2}, \frac{\mu}{\rho U L}, \frac{a}{U} \right). \quad (18)$$

Se ora si alterano successivamente le unità di misura con cui si esprimono $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ si osserverà che verranno modificati i valori numerici di almeno una tra le variabili L , ρ ed U mentre i gruppi adimensionali saranno inalterati (per esempio, cambiando le unità di $\mathcal{T}$ si modifica solo U , cambiando $\mathcal{M}$ si modifica ρ mentre cambiando $\mathcal{L}$ si modificano contemporaneamente L , ρ ed U).

Il fatto che nell'equazione (18) le modifiche di $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ non abbiano modificato i gruppi adimensionali, porta a concludere che l'espressione è equivalente a

$$\frac{D}{\rho U^2 L^2} = \tilde{F} \left(\frac{S}{L^2}, \frac{\mu}{\rho U L}, \frac{a}{U} \right), \quad (19)$$

che dipende solo da quantità adimensionali.

Come ultima osservazione notiamo che la forma di $\tilde{F}$ dell'equazione (19) non è fornita dal teorema di Buckingham e deve comunque essere determinata per via sperimentale (o in altro modo equivalente come simulazioni numeriche, analogie o analisi teorica): prima di eseguire materialmente le prove è opportuno quindi verificare se qualcuno dei parametri ottenuti non si possa modificare per renderlo uguale a quelli già in uso nella comunità scientifica di riferimento.

A tal fine, è possibile moltiplicare qualunque gruppo per un fattore numerico, elevarlo a qualunque potenza (intera, razionale o irrazionale, escluso lo zero), sostituire uno o più gruppi con altri ottenuti moltiplicando quello originale con altri eventualmente elevati a qualunque potenza (sempre escludendo lo zero). Non è chiaramente possibile modificare il numero di gruppi adimensionali o introdurre nuove grandezze che non fossero già presenti nell'espressione di partenza (14).

Con riferimento all'espressione (19) si può moltiplicare il denominatore del primo membro per il fattore $1/2$ per ottenere il coefficiente di resistenza $C_D = 2D/(\rho U^2 L^2)$, invertire il terzo fattore per ottenere il numero di Reynolds $Re = \rho U L / \mu$ e invertire il quarto termine per ottenere il numero di Mach $M = U/a$; in questo modo l'espressione (19) assume la forma

$$C_D = F(AR, Re, M), \quad (20)$$

dove si è indicato con $AR = S/L^2$ il rapporto d'aspetto del corpo e con F la funzione da determinare.