Capitolo 1

Generalità sui fluidi

1.1 definizione di fluido

La fluidodinamica è quella branca della meccanica del continuo che studia la dinamica dei *fluidi*. Sebbene a livello euristico ognuno di noi intuisce che acqua ed aria sono dei fluidi, mentre un blocco di marmo o un cubo di acciaio non lo sono, la definizione di fluido non è un concetto ben definito in quanto si basa più sulla risposta del materiale alle sollecitazioni esterne piuttosto che sulla struttura della materia.

Per vie molto generali si possono schematizzare i solidi come dei materiali in cui gli atomi o le molecole occupano delle posizioni ben definite (figura 1.1a) e vengono mantenuti in tali posizioni da forze che divengono fortemente repulsive appena la distanza tende a diminuire ed attrattive quando aumenta (figura 1.2). In tale situazione gli atomi vibrano con oscillazioni di piccola ampiezza senza tuttavia modificare la struttura del legame.

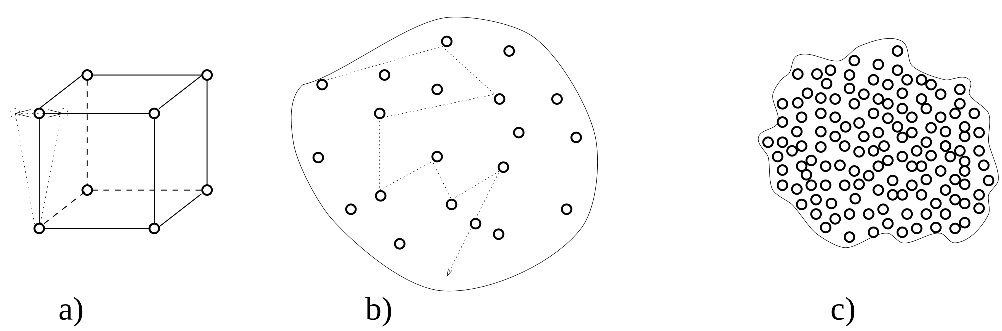


Figura 1.1: Disegno schematico della struttura di solidi **a)**, gas **b)**, e liquidi **c)**.

Al contrario nei gas (figura 1.1b) gli atomi o molecole non hanno una posizione definita e si muovono di un moto casuale (agitazione termica) variando in continuazione direzione a causa degli urti tra le varie molecole. La distanza media percorsa tra un urto ed il successivo è detta libero cammino medio (λ) e nei gas questa distanza è molto più grande della distanza d di equilibrio tra forze attrattive e repulsive. Ciò giustifica la grande facilità che hanno i gas di cambiare volume quando viene variato lo spazio a loro disposizione.

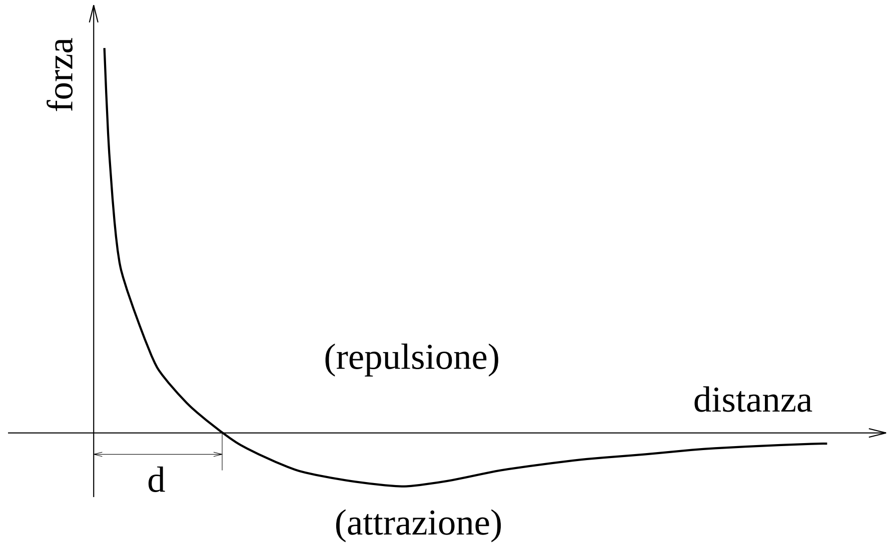


Figura 1.2: Diagramma indicativo delle forze tra molecole al variare della loro distanza.

I liquidi hanno una struttura intermedia tra i solidi ed i gas in quanto sono formati da molecole la cui distanza reciproca è mediamente dell'ordine di d ma non sono vincolate a mantenere una posizione fissa (figura 1.1c). Da questa struttura ne consegue che un liquido varia la propria forma con estrema facilità mentre per avere variazioni di volume servono sollecitazioni esterne estremamente elevate.

Per fare degli esempi tangibili, si può pensare ad una particella di un solido come a delle sferette collegare tra loro tramite molle molto rigide; applicando delle forze esterne si possono far variare le distanze relative tra le sferette ma al cessare delle sollecitazioni la disposizione iniziale viene ristabilita. Un semplice modello di gas si potrebbe realizzare con una ventola che tiene in costante agitazione delle palline di polistirolo all'interno di un sacchetto di plastica. Se si varia il volume del sacchetto, le palline tendono comunque a vagare all'interno dell'intero volume messo a disposizione mentre applicando delle forze esterne è possibile variare tanto il volume quanto la forma dell'involucro. Un liquido, infine, si può pensare come ad un sacchetto di plastica pieno di biglie; applicando delle sollecitazioni tangenziali si può deformare il sacchetto a piacimento, se invece si prova a comprimere l'involucro si ottengono variazioni di volume praticamente nulle [1].

Finora abbiamo descritto alcune proprietà dei materiali guardando alla loro struttura *microscopica*, cercando cioè di dedurre le loro proprietà in base alla disposizione dei loro atomi o molecole. Abbiamo così visto come gas e liquidi siano accomunati dalla caratte-

[1] Questa descrizione vuole avere uno scopo puramente introduttivo ed è ben lungi dal dare una visione completa della struttura della materia. Infatti, esistono sostanze dette solidi amorfi (come il vetro) che pur avendo una struttura simile ad un liquido hanno tutte le caratteristiche esterne dei solidi. Analogamente esistono delle sostanze che si comportano come dei solidi fino ad un certo valore della sollecitazione esterna e come dei fluidi per sollecitazioni oltre il valore di soglia (fluidi di Bingham). Infine le caratteristiche di un materiale dipendono dalle condizioni esterne di pressione e temperatura e spesso in prossimità delle transizioni da un stato all'altro si hanno dei materiali ambigui con caratteristiche contemporanee di solidi e liquidi o liquidi e gas.

ristica di cambiare facilmente forma quando sono soggetti ad un'azione esterna di taglio. In base a questa proprietà definiremo *fluido* come un materiale in grado di deformarsi indefinitamente quando sottoposto ad una sollecitazione tangenziale esterna ed al cessare di tale azione non recupera la sua forma iniziale. In altre parole, in condizioni di quiete, un fluido resiste solo agli sforzi normali. Bisogna notare come queste definizioni siano di tipo fenomenologico, in quanto prescindono dalla struttura intima del materiale ma considerano solo la sua risposta ad azioni esterne.

1.2 concetto di continuo

Come abbiamo visto in precedenza la definizione di fluido implica la reazione *macroscopica* di un materiale a delle azioni esterne e richiede quindi la valutazione di quantità su scala estremamente più grande rispetto a quella molecolare; ciò conduce in modo naturale alla definizione del concetto di continuo. Si consideri una qualunque grandezza q (pressione, temperatura velocità, energia, etc.) e si valuti la sua dipendenza dall'estensione del volume sul quale viene misurata. In generale si otterrà un andamento come quello in figura 1.3 dove si possono osservare tre regioni distinte. Nella regione **I** si hanno variazioni discontinue della grandezza misurata dovute alla insufficienza statistica dei campioni contenuti nel volume di misura; se infatti si misurasse la temperatura o la pressione in un volume di misura così piccolo da contenere 12, 57 o 200 molecole, la media di q risulterebbe fortemente dipendente dal numero di campioni e quindi dall'estensione del volume stesso. Nella regione **II** si ha invece un valore stabile di q in quanto il volume di misura contiene un numero elevato di atomi o molecole ($> \mathcal{O}(10^6)$) e quindi la media di q risulta indipendente dall'estensione del volume stesso. Nell'ultima parte del grafico, infine (regione **III**) si hanno nuovamente delle variazioni di q questa volta però legate al fatto che le quantità sono delle funzioni dello spazio ed il loro valore varia quindi da punto a punto.

Abbiamo così stabilito che per poter parlare di continuo, bisogna avere all'interno del proprio volume di misura un numero sufficientemente elevato di atomi o molecole in modo da avere delle medie indipendenti dal numero di elementi contenuti nel volume stesso. Rimane quindi da stabilire quanto piccolo si può assumere un elemento in modo da mantenere valide le ipotesi di continuo per capire se i fenomeni che avvengono comunemente possono essere studiati utilizzando questa assunzione oppure se si deve considerare la dinamica delle singole molecole. Per fare una stima di massima, si può valutare il volume occupato da una mole di gas in condizioni normali (temperatura $T = 15^oC$ e pressione $p = 1$atm) che è di circa 22.4 litri; d'altra parte una mole di gas contiene un numero di molecole pari al numero di Avogadro $n \simeq 6.02 \cdot 10^{23}$ da cui si deduce facilmente che in un volume di un dm^3 ci sono $2.5 \cdot 10^{22}$ molecole, in un mm^3 ce ne sono $2.5 \cdot 10^{16}$ mentre in un μm^3 (ossia in un cubo di un millesimo di millimetro di lato) ce ne sono circa $2.5 \cdot 10^7$.

Questo semplice esempio numerico ci fa capire come nella pressoché totalità dei flussi incontrati nella vita quotidiana, l'ipotesi di continuo sia ampiamente soddisfatta potendo così parlare di proprietà del fluido senza considerare le caratteristiche delle singole molecole appartenenti alla particella fluida. L'esempio precedente, tuttavia, ci fa anche capire

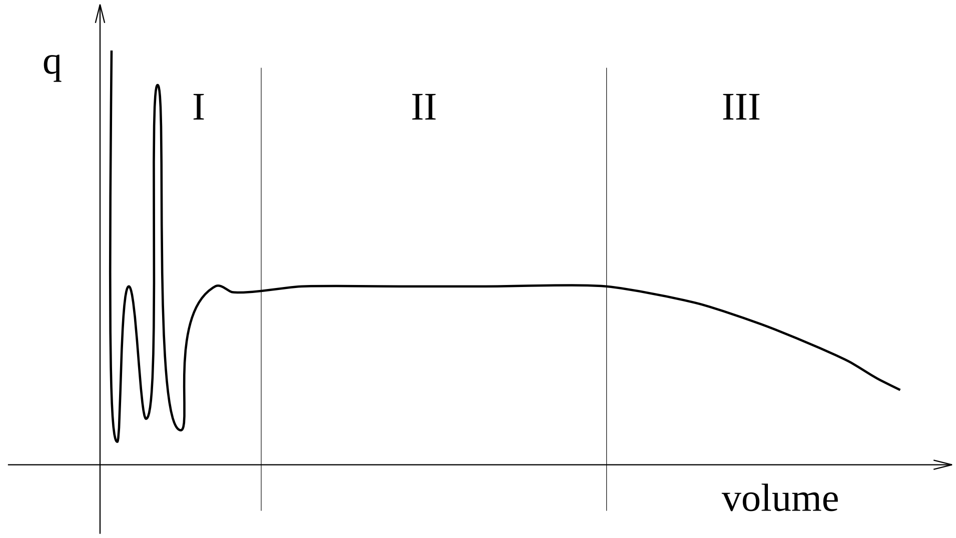


Figura 1.3: Variazione del valore misurato di una grandezza q in relazione alle dimensioni del volume di misura.

come la validità o meno dell'ipotesi di continuo dipenda fortemente dalle condizioni esterne di pressione. Se per esempio ci si trovasse in un ambiente con una pressione di 10^{-5}atm alla temperatura di $T = 0^oC$ un volume di un mm^3 conterrebbe 'solo' $4.08 \cdot 10^6$ molecole ponendo in dubbio l'ipotesi di continuo per dimensioni più piccole. In tale situazione si trova sicuramente la navetta spaziale 'space shuttle' quando orbita alla quota di 100km intorno alla terra. L'indice di rarefazione di un gas viene misurato dal numero di Knudsen Kn definito come il rapporto tra il libero cammino medio λ delle molecole e la dimensione L dell'oggetto intorno a cui si considera il flusso. Per poter utilizzare l'ipotesi di continuo deve risultare $Kn \longrightarrow 0$ dovendo cioè risultare le dimensioni macroscopiche del flusso incomparabilmente più grandi della scala di lunghezza delle collisioni intermolecolari. Al contrario per $Kn \geq 1$ le due lunghezze sono comparabili ed in queste condizioni si parla di 'gas rarefatti' per i quali bisogna ricorrere a schematizzazioni differenti. Tralasciando tuttavia questi casi molto particolari possiamo affermare che la fluidodinamica tratti essenzialmente dei modelli continui e nello specifico noi ci limiteremo alla trattazione di questi ultimi.

1.3 densità ed espansione termica

La densità di un fluido misura la quantità di massa contenuta nell'unità di volume e viene generalmente indicata con il simbolo ρ. La sua unità di misura nel Sistema Internazionale (SI) è Kg/m^3 ed il valore dipende sia dalle condizioni esterne di temperatura che da quelle pressione. Mentre nei gas si possono ottenere variazioni considerevoli di densità cambiando pressione o temperatura, nei liquidi queste sono normalmente di entità modesta anche se in entrambi i casi i loro effetti sono di straordinaria importanza. Un fluido riscaldato, infatti, si espande e diminuisce di densità, se quindi il riscaldamento avviene su una porzione limitata di fluido, questo avrà una densità minore dell'ambiente circostante e tenderà a salire. Questo fenomeno è la causa dei moti atmosferici ed oceanici e viene utilizzato in innumerevoli applicazioni pratiche.

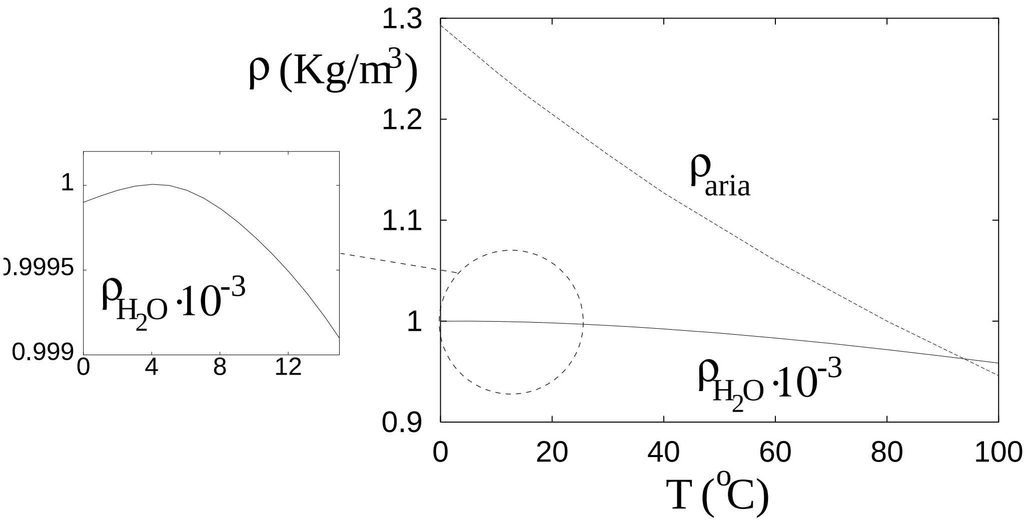


Figura 1.4: Variazione della densità con la temperatura per aria ed acqua; nella figura a sinistra è riportato uno zoom dell'anomalia di variazione per l'acqua.

In figura 1.4 è riportata la variazione di densità per aria ed acqua, alla pressione di una atmosfera, in funzione della temperaura dove si nota che in entrambi i casi la densità diminuisce al crescere T. Appare chiaro che le variazioni sono di natura non lineare anche se, per piccole variazioni di temperatura si può approssimare la curva con una relazione del tipo

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(T - T_0), \quad \text{oppure} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \alpha\Delta T, \tag{1.1}$$

in cui ρ_0 è il valore della densità alla temperatura T_0 e $\rho_0\alpha$ è la pendenza locale della curva. α è generalmente negativo (densità decrescente per temperatura crescente) ma di particolare rilevanza risulta l'anomalia dell'acqua che la porta ad avere la sua massima densità alla temperatura di $T = 4^o$C. Questo comportamento è infatti responsabile della sopravvivenza delle forme di vita in acqua, in quanto non permette ad acqua di temperatura inferiore a $T = 4^o$C di occupare gli strati più profondi. Se supponessimo al contrario che l'acqua si comportasse come l'aria (e come la pressoché totalità dei fluidi) allora la densità diminuirebbe in modo monotono con la temperatura e l'acqua più fredda si disporrebbe al di sotto di quella più calda. Al contrario sul fondo degli oceani e dei laghi alpini l'acqua si trova costantemente alla temperatura di $T = 4^o$C ed in base al diagramma di figura 1.4 non c'è modo per acqua più fredda di prendere il suo posto, garantendo così la sopravvivenza di flora e fauna.

1.4 comprimibilità di un fluido

Un'importante proprietà di un fluido è la sua comprimibilità, ossia quanto facilmente varia percentualmente il proprio volume conseguentemente a variazioni di pressione. Supponendo di avere inizialmente un fluido che occupa un volume V si avrà che dopo aver applicato una differenza di pressione dp il volume iniziale sarà variato di una quantità dV da cui si può definire il modulo di comprimibilità come

$$E = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V/V}, \tag{1.2}$$

le cui unità di misura sono le stesse della pressione (Pa) ed il segno negativo tiene in conto il fatto che per variazioni di pressione positive si hanno diminuzioni di volume, ossia dV negativi. In alcuni casi viene usato l'inverso di E che è chiamato coefficiente di comprimibilità $\beta = 1/E$. Ricordando che la massa m è data dal prodotto di densità per volume e differenziando logaritmicamente la relazione $m = \rho V$ si ottiene $\mathrm{d}V/V = -\mathrm{d}\rho/\rho$ da cui di ottiene

$$E = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho/\rho}. \tag{1.3}$$

Nel caso dei liquidi E assume dei valori estremamente elevati, ($E = 2.15 \cdot 10^9$Pa per l'acqua, $E = 2.85 \cdot 10^{10}$Pa per il mercurio, $E = 1.3 \cdot 10^9$Pa per la benzina) indicando che per variazioni di pressione limitate si hanno variazioni di volume praticamente trascurabili, da cui la considerazione dei liquidi come incomprimibili.

Per quanto riguarda i gas, evidentemente il valore di E rimane indeterminato fino a quando non si specifica la natura della trasformazione che lega p a ρ (o a V). Se per esempio si considera la politropica $p/\rho^k =$ const. si ha:

$$\rho^k \mathrm{d}p - kp\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{k-1}} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho/\rho} = kp, \quad \text{da cui} \quad E = kp. \tag{1.4}$$

Dalla relazione di sopra si vede che se per esempio la trasformazione è isoterma $p/\rho =$ const. ($k = 1$) allora si avrà $E = p$ mentre per una isentropica $p/\rho^\gamma =$ const. ($k = \gamma = C_p/C_v$ rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costante) risulta $E = \gamma p$ [2] .

[2] Volendo mettere insieme i risultati di questa sezione e della precendente per le variazioni di densità si può scrivere

$$\mathrm{d}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{T=\text{const.}} \mathrm{d}p = \rho\alpha_p \mathrm{d}T + \frac{\rho}{E_T}\mathrm{d}p, \tag{1.5}$$

dove si è indicato con α_p il coefficiente di espansione termica a pressione costante e con E_T il modulo di comprimibilità del fluido a temperatura costante. Nel caso in cui il fluido in esame sia un gas che rispetta la legge di stato dei gas perfetti si avrà, $\alpha_p = -1/T$ ed $E_T = p$ da cui si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}p}{p}, \tag{1.6}$$

come si sarebbe potuto ottenere direttamente per differenziazione logaritmica della legge di stato dei gas perfetti.

ESEMPIO

Sia dato un fluido di volume iniziale V_0. Sapendo che dopo aver aumentato la sua pressione di Δp il suo volume diminuisce della percentuale $\%V$ calcolare il suo modulo di comprimibilità. $\Delta p = 8\text{GPa}$, $\%V = 24.47$.

Soluzione

Dalla definizione di modulo di comprimibilità

$$E = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V/V},$$

si ottiene per integrazione

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{E} \quad \Longrightarrow \quad \log\frac{V_f}{V_0} = -\frac{\Delta p}{E},$$

essendo V_f il volume finale. Ma risulta $V_f/V_0 = 1 - \%V/100$ e quindi $E = 2.85 \cdot 10^{10}$ Pa (il fluido è cioè mercurio).

1.5 viscosità e sforzi

Si consideri una particella fluida inizialmente a forma di parallelepipedo e si applichi su una sua superficie S una forza F diretta come in figura 1.5a. La particella fluida verrà quindi sottoposta ad uno sforzo di taglio $\tau = F/S$ che la deformerà come mostrato in figura 1.5b. Poiché stiamo considerando un fluido, questo si deformerà con continuità sotto l'azione dello sforzo costante τ, quindi invece di determinare la deformazione dovremo determinare la velocità di deformazione. Assumendo che la superficie superiore si muova con una velocità costante U, in un tempo Δt percorrerà una distanza $U\Delta t$ producendo una deformazione angolare $\mathrm{tg}(\Delta\gamma) = U\Delta t/b \simeq \Delta\gamma$. Per la velocità di deformazione angolare si può scrivere $\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\gamma/\Delta t = U/b = dU/dy$ [3].

Se effettuassimo un numero elevato di questi esperimenti con diversi valori di τ scopriremmo che la velocità di deformazione angolare $\dot{\gamma}$ risulta sempre proporzionale allo sforzo applicato attraveso una costante μ che dipende solamente dal tipo di fluido considerato e dalla sua temperatura. Si potrà così scrivere $\tau = \mu\dot{\gamma}$ ossia

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}, \tag{1.7}$$

che permette di calcolare lo sforzo generato internamente ad un fluido nota la sua velocità di deformazione. Le relazione che lega linearmente la velocità di deformazione con gli sforzi è caratteristica di una classe di fluidi detti 'fluidi newtoniani'. Sebbene la relazione (1.7)

[3] Ciò risulta vero solo se si suppone che una tale configurazione produca una distribuzione lineare di spostamenti all'interno della particella fluida. La fondatezza di tale assunzione e le ipotesi di validità verrano dimostrate rigorosamente in seguito.

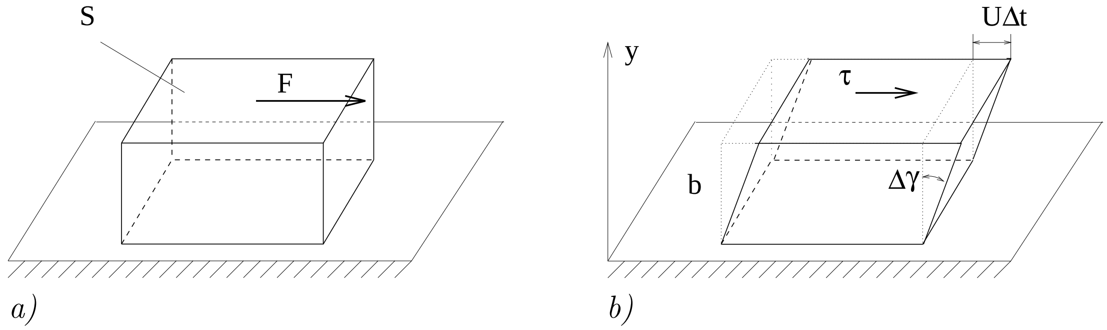


Figura 1.5: Schema delle deformazione di una particella fluida.

sia la più semplice che si possa immaginare, tutti i fluidi di uso più comune obbediscono abbastanza fedelmente alla relazione appena descritta. Acqua ed aria sono i fluidi più importanti ma anche i vari gas in condizioni non critiche, gli idrocarburi ed il mercurio obbediscono in modo altrettanto fedele alla relazione lineare di sopra.

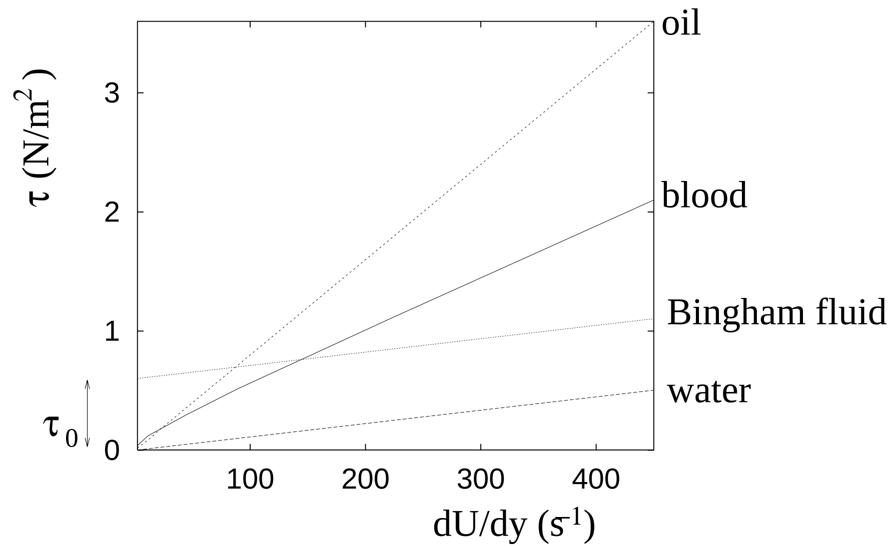


Figura 1.6: Diagramma di sforzo *vs* shear per vari fluidi newtoniani e non.

Ci sono, tuttavia, diverse eccezioni al comportamento lineare che rivestono una notevole importanza nella vita quotidiana. Il sangue, ad esempio, reagisce con sforzi che aumentano meno che linearmente con $\dot{\gamma}$ (figura 1.6) permettendo così al cuore di pompare, a parità di portata con minore sforzo. Questi fluidi appartengono alla categoria "shear–thinning" e sono caratterizzati da un comportamento pressoché newtoniano per bassi valori della velocità di deformazione (come il sangue che fluisce nell'aorta) mentre negli altri casi (sangue nei capillari) hanno un comportamento non newtoniano. Una differente classe di fluidi è costituita da quelli che non danno luogo ad alcuna deformazione per valori dello sforzo di taglio al di sotto di un certo valore limite (τ_0) mentre presentano una relazione lineare del tipo $\tau - \tau_0 = \mu\dot{\gamma}$ per $\tau \geq \tau_0$. Questi fluidi sono detti di Bingham (figura 1.6) e se si pensa alle dune di sabbia si ha una chiara dimostrazione di questo fenomeno; sui lati della duna, infatti, agisce la componente tangenziale della forza di gravità che tuttavia produce uno sforzo minore del τ_0 caratteristico di quella particolare sabbia. Se però cambia la pendenza (per esempio a causa del vento) allora gli strati di sabbia cominciano a 'scivolare' gli uni sugli altri fino a ristabilire valori di τ al di sotto di quello di soglia. La trattazione dei diversi tipi di fluido è studiato dalla disciplina chiamata reologia ed esula comunque dallo scopo delle presenti note che hanno un carattere prevalentemente introduttivo.

Per comprendere in che modo la viscosità agisce in un fluido, riconsideriamo l'esempio di figura 1.5 in cui un elemento di fluido inizialmente a forma di parallelepipedo viene deformato in seguito al moto traslatorio di una superficie superiore con velocità U (figura 1.7). Immediatamente dopo l'inizio della traslazione ($t = 0^+$) solamente le molecole di fluido a contatto con la superficie in moto verranno trascinate con essa mentre gli strati inferiori di fluido permarranno nel loro stato di quiete. A causa del moto di agitazione termica, tuttavia, le molecole in moto trasferiranno parte della loro quantità di moto a quelle statisticamente ferme che a loro volta inizieranno a muoversi (figura 1.8a). Questo processo raggiungerà un equilibrio quando si bilancerà l'azione degli strati superiori di fluido che tenderanno a far muovere tutto l'elementino con velocità U e quelli della superficie inferiore che tendono ad arrestare gli strati fino ad una velocità $U = 0$ (figura 1.8b).

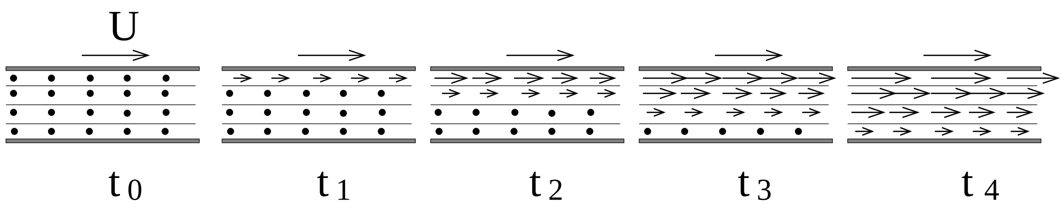


Figura 1.7: Trasferimento di quantità di moto ad istanti successivi tra strati di fluido inizialmente in quiete.

Seguendo l'esempio precedente appare evidente come il moto caotico delle molecole causi la *diffusione* di quantità di moto all'interno di un fluido; questa attitudine alla diffusione viene misurata dalla viscosità μ le cui dimensioni possono essere facilmente ricavate dalla relazione (1.7) e sono $\mathrm{N \cdot s/m^2}$ [4].

Il meccanismo microscopico che genera la viscosità giustifica anche il fatto che questa quantità sia fortemente dipendente dalla temperatura; al crescere di questa infatti, aumenta il moto caotico di agitazione delle molecole e quindi diventerà più efficiente la

[4] È interessante notare come nel linguaggio quotidiano il concetto di viscosità venga spesso confuso con quello di densità. Si sente infatti spesso dire 'un liquido molto denso' per indicare una sostanza viscosa. Tuttavia densità e viscosità non sono affatto legate visto che la prima indica la quantità di massa contenuta nell'unità di volume mentre la seconda indica la facilità che ha un fluido a diffondere la quantità di moto; per esempio l'olio è più viscoso dell'acqua ma meno denso come possiamo osservare dal galleggiamento di quest'ultimo sull'acqua.

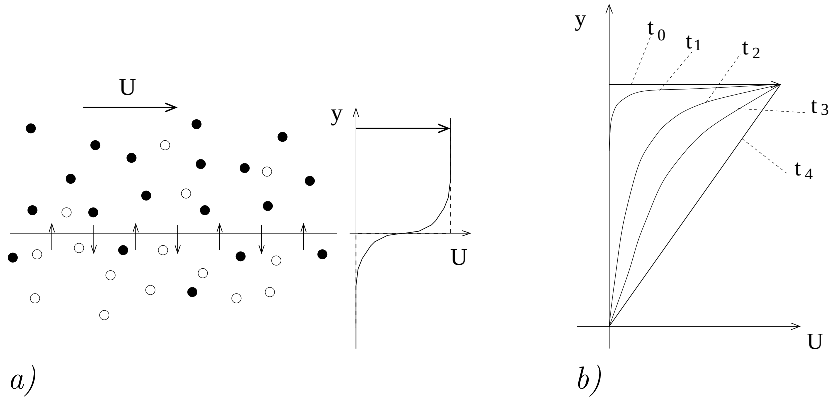


Figura 1.8: *a)* schema di diffusione di quantità di moto tra due strati di fluido inizialmente in moto (particelle nere) e fermo (particelle bianche). *b)* evoluzione temporale del profilo di velocità nell'esempio di figura 1.7.

diffusione secondo quanto precedentemente descritto. Ciò si osserva a livello macroscopico nei gas con una viscosità che cresce con la temperatura. Nei liquidi questo effetto deve competere con uno opposto, cioè l'indebolirsi del legame che tiene le molecole vicine. All'aumentare dela temperatura si verifica cioè una maggiore mobilità delle molecole che tende a far diminuire la viscosità. Quest'ultimo effetto prevale sul primo con la conseguenza che nei liquidi la viscosità diminuisce con la temperatura. Un esempio quotidiano di tale fenomeno si osserva quando in cucina si mette dell'olio in una padella. Inizialmente l'olio si muove con difficoltà aderendo al fondo della padella e fluendo molto lentamente nonostante si disponga la superficie verticalmente; non appena si accende la fiamma, al contrario, si osserva che l'olio fluisce con maggiore facitità e, quando è ben caldo, si comporta 'come se fosse acqua'.

Un grafico della variazione di μ per aria ed acqua è riportato in figura 1.9 dove si può notare il comportamento opposto al crescere della temperatura caratteristico per gas e liquidi. La pressione ha generalmente un effetto assai ridotto sulla viscosità e viene di solito trascurato.

Si vedrà nel seguito che ricorrerà spesso la quantità

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \tag{1.8}$$

le cui dimensioni sono m^2/s, che prende il nome di *viscosità cinematica* per distinguerla dalla viscosità *dinamica* μ. Dall'equazione (1.8) si può notare che comparendo la densità nella definizione di ν quest'ultima ha una dipendenza dalla pressione. Infatti, se un fluido viene compresso la sua densità aumenterà e conseguentemente diminuirà la viscosità cinematica. Questo effetto è molto importante per i gas mentre si può generalmente trascurare nel caso dei liquidi.

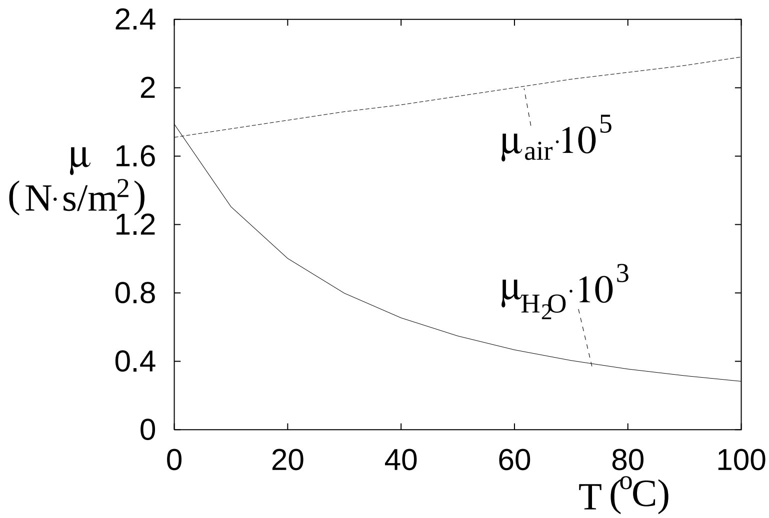
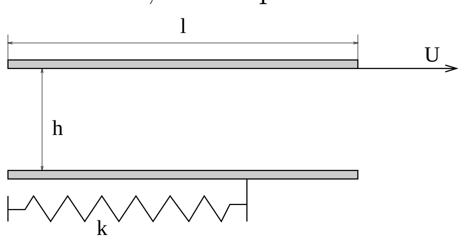


Figura 1.9: Variazione della viscosità con la temperatura per aria ed acqua.

ESEMPIO

Sia dato il flusso d'acqua tra due laste piane e parallele come in figura in cui la parete superiore si muove con velocità U. Sapendo che il profilo di velocità tra le due lastre è lineare e che la parete inferiore, vincolata ad una molla con costante elastica K, viene spostata di una quantità x, determinare il valore di U.



$h = 4$ mm $\quad l = 1$ m
$x = 0.25$ cm $\quad K = 10^3$ N/m
$b = 1.3$ m
b è la dimensione nella direzione ortogonale al foglio

Soluzione

Dalle indicazioni del testo (si vedrà in seguito che questa è una soluzione esatta delle equazioni del moto) si ha che il profilo di velocità tra le due lastre è dato da: $u(y) = Uy/h$ (se y è la coordinata ortogonale alle due lastre con origine sulla lastra ferma). La risultante delle forze viscose sulla parete inferiore si ottiene integrando lo sforzo di parete $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0} = \mu U/h$ sulla superficie della parete $F = \int_S \tau_w \mathrm{d}S = \mu Ubl/h$ e questa forza deve eguagliare la reazione della molla $F = kx$. Da questa relazione si ricava il valore di $U = kxh/(\mu bl) =$ 6.86 m/s.

1.6 tensione di vapore

Se riconsideriamo per un istante la schematizzazione di liquido data in figura 1.1c possiamo osservare che le varie molecole pur nel loro moto caotico di agitazione termica sono tenute insieme da delle forze di coesione. A livello statistico, tuttavia, ci saranno delle molecole con energia cinetica maggiore che potranno quindi 'abbandonare' la particella fluida. Questo fenomeno si traduce nell'osservazione comune che se un recipiente viene parzialmente riempito di liquido e nello spazio rimanente viene fatto il vuoto si osserva la progressiva formazione di vapore, ossia di molecole di liquido allo stato gassoso, fino al raggiungimento di una condizione di equilibrio (figura 1.10). A livello microscopico, questo equilibrio esprime il bilanciamento statistico tra le molecole che lasciano la fase liquida per entrare in quella gassosa e quelle che seguono il percorso inverso. Il valore di equilibrio della pressione del vapore viene detto tensione di vapore ed il suo valore sarà fortemente dipendente dalla temperatura. Come ci si aspetta, infatti, a temperature maggiori le molecole saranno animate da un moto di agitazione termica più intenso e quindi un maggior numero avrà energia cinetica sufficiente a lasciare la fase liquida. La tensione di vapore sarà quindi una funzione crescente della temperatura e quando questa pressione uguaglia la pressione esterna si verifica l'ebollizione del liquido [5].

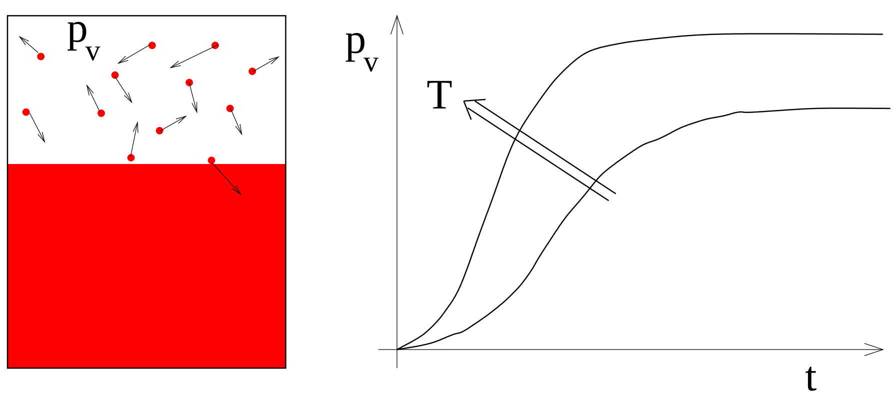


Figura 1.10: Schema di formazione della fase gassosa al di sopra di un liquido.

Questo fenomeno trova un posto di particolare rilevanza nella tecnologia in quanto, come si vedrà in seguito, all'interno di un fluido in moto si producono delle zone di bassa pressione dove la velocità è elevata. Se localmente la pressione scende al di sotto della tensione di vapore, il liquido *bolle* formando delle sacche di gas che quando si richiudono implodono violentemente generando intenso rumore e causando ingenti danni alle strutture. Questo fenomeno è noto come cavitazione ed è particolarmente noto ai costruttori di turbine che sono costretti alla periodica sostituzione delle palette a causa della loro usura (vedi figure 1.11 e 1.12).

[5]Questo è il motivo per cui in alta montagna non si riesce a cucinare la pasta al dente. Si verifica infatti che siccome la pressione ambiente diminuisce con la quota, la tensione di vapore dell'acqua bilancia la pressione ambiente a temperature inferiori a $T = 100^oC$ (per esempio alla quota di 3000m l'acqua bolle a 90^oC) e la pasta cuocendo in acqua a temperatura bassa perde la sua consistenza.

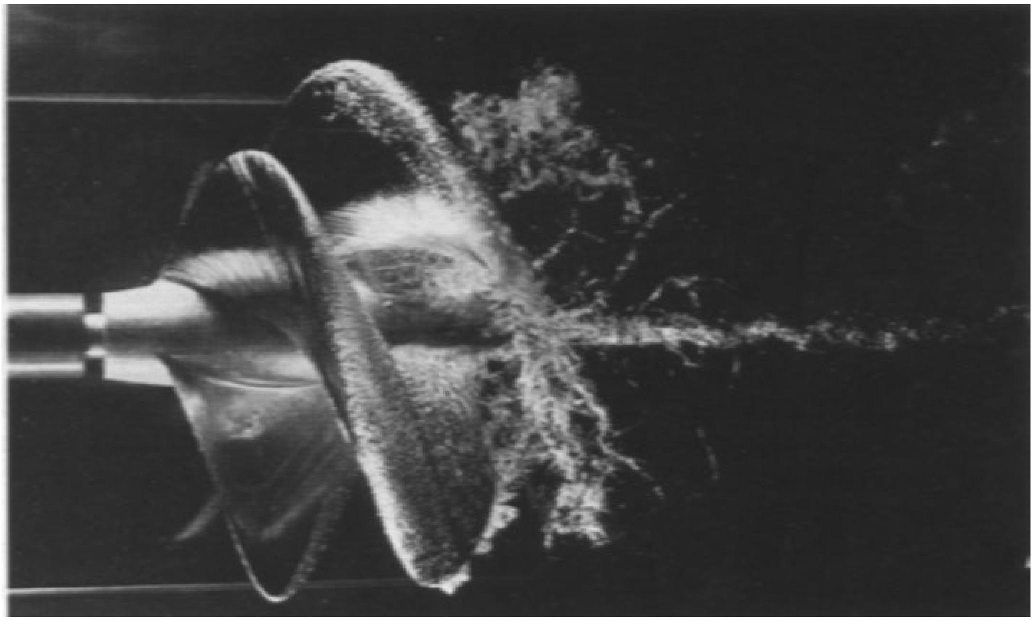


Figura 1.11: Visualizzazione della formazione di zone di cavitazione nel flusso intorno ad un'elica per propulsione navale in acqua.

Figura 1.12: Usura della superficie di pala di un'elica navale prodotta dal fenomeno della cavitazione.

1.7 tensione superficiale

Nella sezione 1.1 abbiamo visto che nei liquidi ci sono delle forze coesive che tendono a mantenere le molecole a 'contatto' tra loro; ciò implica che, al contrario dei gas che si espandono fino ad occupare l'intero volume messo a loro disposizione, i liquidi formano degli agglomerati compatti in modo da rendere minima la superficie esposta per un dato volume [6]. Questo fenomeno si osserva comunemente quando si formano delle goccie d'acqua su una superficie grassa o sulla carta oleata, oppure quando si dispone del mercurio su un piano. In altre parole, in prossimità di un'interfaccia tra un liquido ed un gas o tra liquidi immiscibili, le forze intermolecolari non sono bilanciate in tutte le direzioni e generano un sistema di tensioni che ha lo stesso effetto di una 'pellicola superficiale'. La presenza di questa 'pellicola' può essere evidenziata osservando alcuni insetti in grado di camminare sulla superficie degli stagni come se si muovessero su una membrana elastica, cosa evidentemente impossibile in assenza delle tensioni di suerficie.

Le carateristiche di queste tensioni dipendono dalla natura dei due fluidi a contatto e dalla temperatura (oltre che dal grado di purezza dei fluidi) e possono essere sia di natura attrattiva che repulsiva.

È bene osservare che le forze coesive tra molecole sono presenti in tutti i punti del fluido, sia all'interno che all'interfaccia; nel primo caso, tuttavia queste avranno risultante nulla in quanto si bilanceranno tra loro (figura 1.13a). Nelle zone di interfaccia, al contrario, le molecole non sono circondate dallo stesso fluido su ogni lato e la risultante delle forze di coesione è diversa da zero (figura 1.13b). Ciò implica che le molecole all'interno del fluido possono muoversi in qualunque direzione senza che le forze coesive oppongano alcuna resistenza. Viceversa se si prova a spostare una molecola all'interfaccia ulteriormente al di fuori della particella fluida le forze coesive si opporrano generando una tensione allo stesso modo di una membrana elastica.

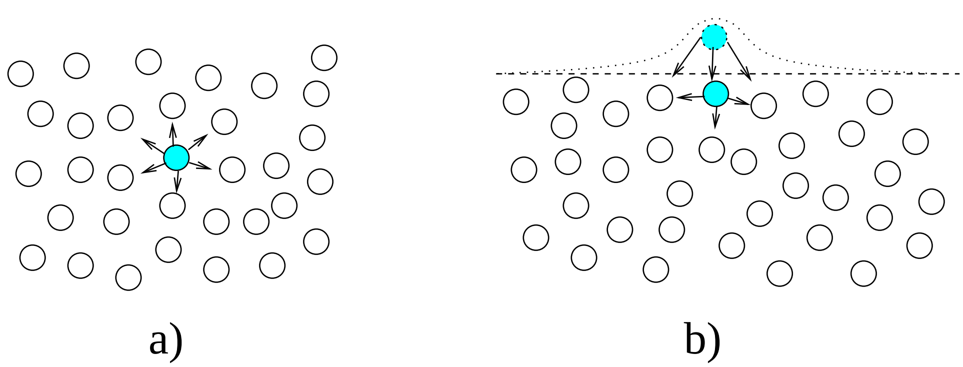


Figura 1.13: Forze di coesione agenti in un liquido su una molecola interna *a)* ed all'interfaccia *b)*. Con la linea ········ è riportata la configurazione con l'interfaccia deformata.

[6] In assenza di perturbazioni esterne questa superficie è quella sferica. Nella realtà, tuttavia, il fluido è sottoposto anche all'azione della gravità che tende a deformare la superficie. Comunque per goccie particolarmente piccole, poiché le forze di volume tendono a zero più rapidamente di quelle superficiali, la forza peso si può trascurare e le superfici sono effettivamente delle sfere.

1.7.1 * effetto della curvatura della superficie

Le azioni di tensione superficiale all'interfaccia tra due fluidi immiscibili genera delle forze tangenti alla superficie stessa che, nel caso di un'interfaccia non piana, induce anche una forza normale e quindi una differenza di pressione tra i fluidi. Per mettere in relazione questa differenza di pressione con le caratteristiche geometriche della superficie, consideriamo lo schema in figura 1.14 in cui viene isolato un elemento di superficie con i lati $\mathrm{d}l_1$ e $\mathrm{d}l_2$ ortogonali e raggi di curvatura, rispettivamente, r_1 ed r_2. Detta $\sigma \mathrm{d}l_2$ la forza ortogonale al lato $\mathrm{d}l_2$ si ha che la componente in direzione normale risulta

$$\mathrm{d}F_2 = \sigma \mathrm{d}l_2 \mathrm{d}\theta = \sigma \frac{\mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2}{r_1} \tag{1.9}$$

con un'espressione analoga per la forza ortogonale al lato $\mathrm{d}l_1$; $\mathrm{d}F_1 = \sigma(\mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2)/r_2$. Queste forze sono bilanciate dalla differenza di pressione tra i fluidi, ottenendo

$$\Delta p \mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2 = \sigma \mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{1.10}$$

con la pressione maggiore dal lato convesso della superficie.

È utile osservare che la quantità $1/r_1 + 1/r_2$, che è il doppio del raggio di curvatura medio della superficie, è un invariante geometrico indipendente dal sistema di riferimento scelto e ciò torna intuitivamente con il fatto che la differenza di pressione che si genera all'interfaccia tra i due fluidi deve chiaramente essere indipendente dal sistema di riferimento che si sceglie per descrivere il fenomeno.

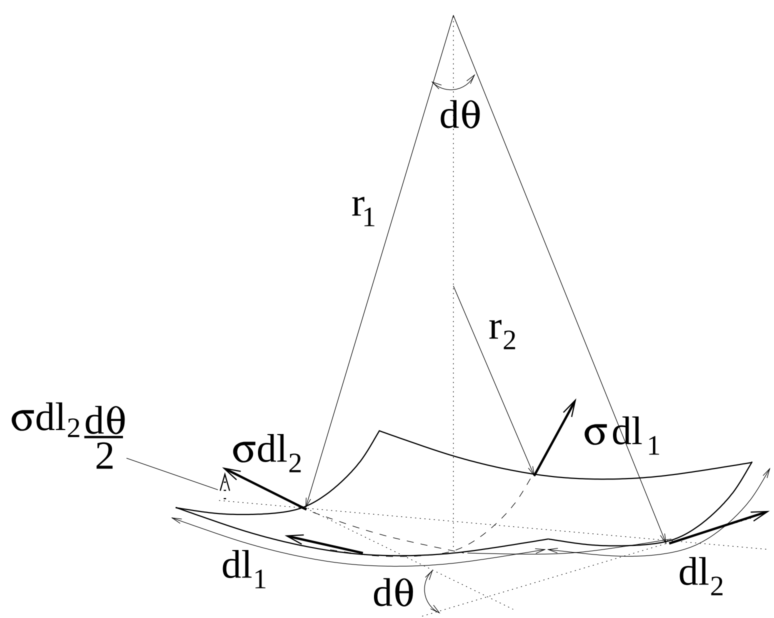


Figura 1.14: Sistema di forze generate dalla tensione superficiale su una superficie curva.

La situazione appena illustrata si riferisce ad un'unico fluido circondato da un gas oppure da un fluido circondato unicamente da un altro fluido [7]. La configurazione diventa notevolmente più complesa nel caso in cui ci siano più fluidi a contatto sia con un gas che con una superficie solida. Presa come esempio la situazione in figura 1.15 si ha chiaramente che deve risultare

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos\alpha \tag{1.11}$$

in cui l'angolo di contatto dipende dai valori delle tensioni superficiali dei materiali a contatto. Quando risulta $\alpha > \pi/2$ (ossia $\sigma_{23} > \sigma_{13}$) si ha che il fluido 2 non bagna il mezzo 3 (per esempio mercurio su vetro). Se invece $\mid \sigma_{13} - \sigma_{23} \mid > \mid \sigma_{12} \mid$ l'equazione (1.11) non può evidentemente essere soddisfatta per alcun valore di α implicando che non è possibile raggiungere una configurazione di equilibrio come quella riportata in figura 1.15.

Questa è la situazione che tipicamente si verifica quando sull'interfaccia aria–acqua si deposita qualche goccia di olio che tende a spandersi uniformemente fino a formare un sottile velo uniforme.

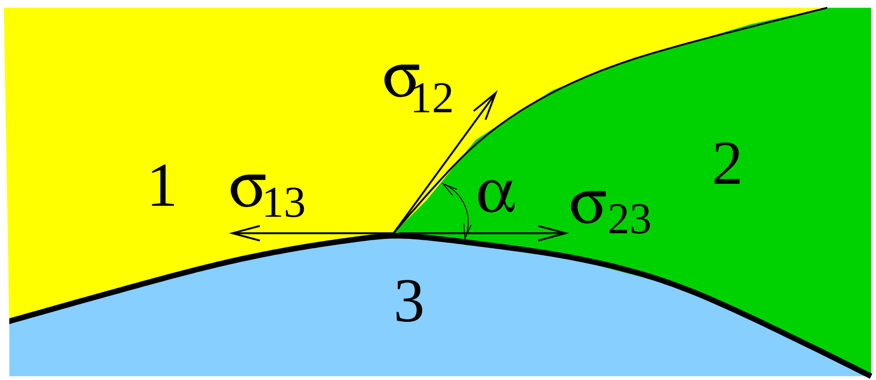


Figura 1.15: Sistema di forze generate dalla tensione superficiale nel punto di contatto tra tre mezzi diversi (di cui almeno uno sia un liquido).

Una situazione comune in cui la tensione superficiale ha un ruolo determinante è nell'impatto di un corpo con un'interfaccia tra fluid immiscibili. In questo caso, infatti, l'impatto produce una deformazione della superficie con linee a piccolo raggio di curvatura. In queste regioni la tensione superficiale ha un effetto dominante sulle altre forze e tende a generare delle piccole goccie che minimizzano la superficie esposta rispetto al volume di fluido contenuto (figura 1.16).

Questo è lo stesso motivo per cui quando si lascia scendere dal rubinetto un 'filino' d'acqua questo prima o dopo si frantuma in piccole gocce. Le particelle fluide, infatti, a causa della forza di gravità tenderebbero ad aumentare indefinitamente la loro velocità e la vena fluida, per conservare la portata, dovrebbe diventare infinitamente sottile. Accade quindi che la distanza tra punti diametralmente opposti della superficie del getto diviene tanto piccole da permettere alla tensione superficiale di diventare efficace e rompere la vena continua in molteplici gocce (figura 1.17).

[7] In questo caso la tensione superficiale σ è il valore di un fluido rispetto all'altro.

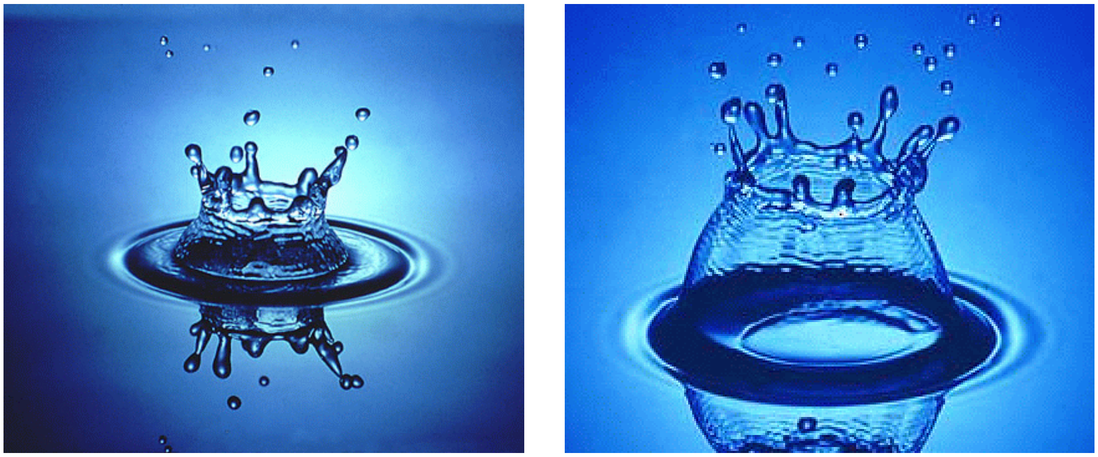


Figura 1.16: Deformazioni della superficie libera e frammentazione conseguente all'impatto di una goccia d'acqua con un'interfaccia acqua/aria.

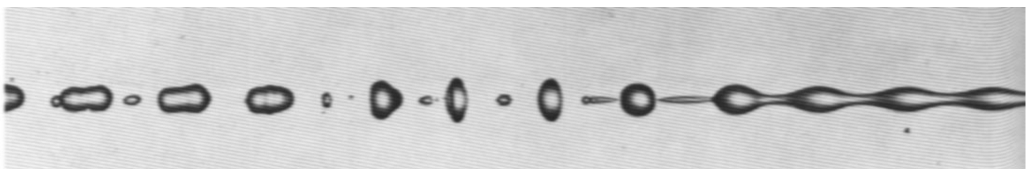


Figura 1.17: Rottura di un getto d'acqua a sezione circdolare di diametro $d = 4$ mm indotta dalla tensione superficiale.

1.7.2 capillarità

Consideriamo infine la combinazione di effetti di tensione superficiale e forza di gravità il cui fenomeno più noto è quello della capillarità. In figura 1.18 sono riportati due esempi di comportamento per le interfacce tra aria–acqua–vetro e aria–mercurio–vetro da cui si può vedere che non solo i fenomeni di tensione superficiale dipendono dalla natura dei due fluidi ma anche dalle forze di adesione dei fluidi con il solido. Nell'esempio specifico è rappresentato un capillare (un tubicino di sezione $\mathcal{O}(1)$mm) in vetro immerso in un recipiente contenente del fluido. A seconda dei casi, l'interfaccia aria–fluido può salire o scendere rispetto al livello esterno e per il calcolo dell'altezza h si procede semplicemente effettuando un bilancio di forze. Se σ esprime il valore della tensione superficiale (in unità N/m) la forza totale esercitata dall'interfaccia sarà pari al perimetro della circonferenza moltiplicata per il valore della tensione ossia $2\pi R\sigma$ orientata come in figura 1.18c. Questa forza, proiettata nella direzione verticale dovrà bilanciare il peso della colonna di fluido sollevata (o abbassata); risulterà quindi:

$$2\pi R\sigma\cos\theta = \rho g h \pi R^2, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R}, \tag{1.12}$$

dove si osservi che h è la quota media dell'interfaccia.

Il valore dell'angolo θ è determinato dal bilancio tra le forze di adesione tra il fluido ed il capillare e le forze di coesione all'interno delle molecole del fluido. Se un fluido tende a 'bagnare' una superficie allora le forze di adesione superano quelle di coesione e l'angolo θ sarà minore di 90^o. Sa al contrario il fluido non aderisce al capillare allora saranno le forze di coesione a prevalere su quelle di adesione e l'angolo θ risulterà maggiore di 90^o. La determinazione di θ viene effettuata per via sperimentale ed acqua e mercurio sono due prototipi di fluido per i comportamenti precedentemente descritti risultando, rispettivamente $\theta_{H_2O} \simeq 0^o$ e $\theta_{Hg} \simeq 130^o$.

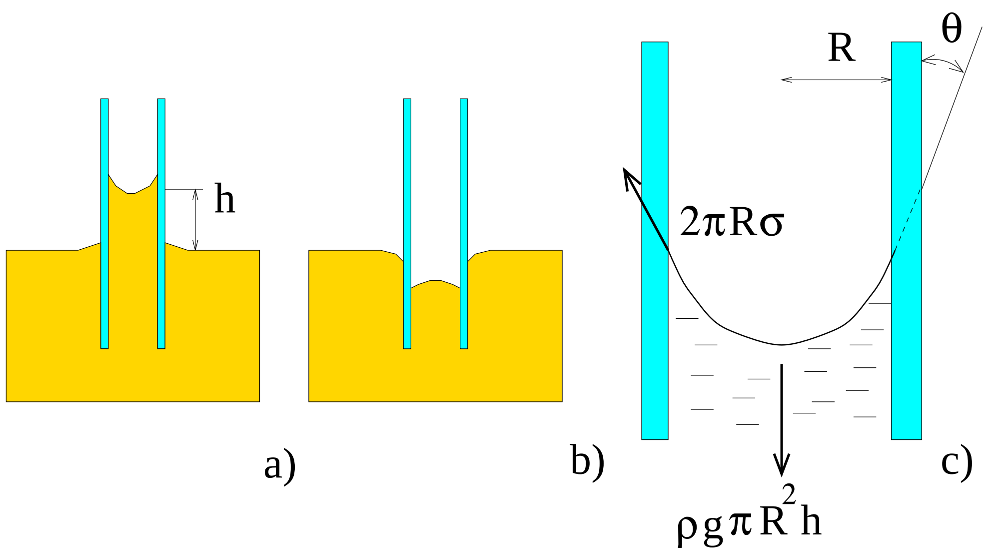


Figura 1.18: Esempi di tensione superficiale all'interfaccia tra aria–acqua–vetro *a)*, aria–mercurio–vetro *b)*. Bilancio tra forza peso e tensione superficiale *c)*.

ESEMPIO

Assumendo che la linfa salga dalle radici alle foglie di un albero per capillarità calcolare il raggio dei vasi linfatici (supposti circolari) per un albero di altezza $h = 15$ m.

Soluzione

Come è stato detto, i fenomeni di tensione superficiale dipendono sia dal fluido e dal suo grado di purezza sia dal materiale con il quale viene a contatto. Tuttavia, volendo attenere una stima di larga massima, si possono assimilare le proprietà della linfa a quelle dell'acqua ed i vasi linfatici ad un capillare in vetro. In tal caso, ricorrendo alla formula (1.12) avendo posto $\theta \simeq 0$ e $\sigma = 7.34 \cdot 10^{-2}$ N/m si ottiene

$$R = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g h} = 9.97 \cdot 10^{-7}\ m.$$

Il presente valore ($\sim 1\mu$m) risulta estremamente piccolo ed è poco probabile che all'interno do un tronco si possa realizzare un condotto, privo di imperfezioni del raggio di 1μm per tutta la sua lunghezza.
Nella realtà il meccanismo che porta la linfa alle foglie è l'osmosi, in quanto evaporando l'acqua attraverso le foglie si creano concentrazioni maggiori di sali in alto che attirano l'acqua dalle radici.

Capitolo 2

Statica dei fluidi

Una categoria importante di problemi della fluidodinamica è costituita da quei fenomeni in cui il fluido si trova in quiete oppure si muove senza generare degli sforzi di taglio; sebbene questa condizione possa sembrare estremamente restrittiva, ci si renderà conto che riguarda una vasta gamma di problemi pratici. Il dimensionamento di una diga, la sollecitazione generata in un serbatoio in pressione, la forma della superficie libera di un liquido in rapida rotazione o il sollevamento in volo di una mongolfiera sono solo alcuni esempi tra molti che incontriamo nella realtà quotidiana. In tutti questi casi le uniche forze presenti sono forze di pressione e forze di volume, la determinazione della cui risultante è lo scopo di questa parte della fluidodinamica.

2.1 pressione in un fluido

Volendo determinare la risultante delle forze di pressione su una superficie immersa in un fluido, ci si deve porre immediatamente la domanda di come la pressione dipenda dall'orientamento dell'elemento di superficie su cui agisce. Consideriamo a tale scopo un fluido in quiete dal quale si tolga un elemento a forma di prisma e si consideri il diagramma di corpo libero per tale elemento (figura 2.1).

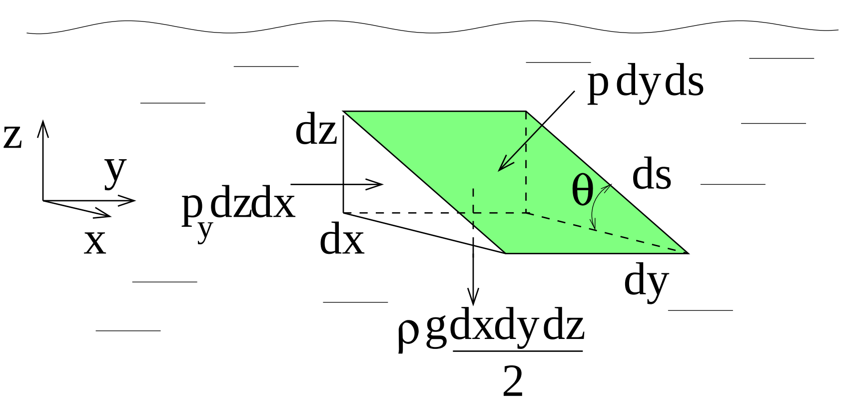


Figura 2.1: Diagramma di corpo libero per un elemento di fluido in quiete.

Essendo l'elemento di fluido in quiete, la risultante delle forze applicate dovrà essere nulla; considerando quindi l'equilibrio nella direzione verticale z e nella x si ottiene

$$p_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y - p\mathrm{d}y\mathrm{d}s\cos\theta = \rho g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad p_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = p\mathrm{d}y\mathrm{d}s\sin\theta, \tag{2.1}$$

da cui osservando che $\mathrm{d}s\sin\theta = \mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}s\cos\theta = dx$, si ha: $p_z - p = \rho g\mathrm{d}z/2$ e $p = p_x$. D'altra parte, essendo interessati alla pressione in un punto, possiamo far tendere a zero le dimensioni del prisma mantenendone invariata la forma da cui risulta per $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \longrightarrow 0$

$$p_z = p, \qquad p_x = p, \tag{2.2}$$

ossia la pressione in un punto ha lo stesso valore indipendente dal valore dell'angolo θ. Se ora ricordiamo che tanto il valore di θ quanto l'orientamento del prisma sono stati scelti in modo del tutto arbitrario arriviamo alla conclusione di validità generale che il valore della pressione in un punto è indipendente dalla direzione in cui agisce, questa affermazione è nota come Legge di Pascal.

Questo esempio ci dà anche lo spunto per riflettere su un'altra questione molto importante in fluidodinamica. Indicando con $\mathrm{d}l$ l'ordine di grandezza dei lati del prisma si ha che le forze di pressione sono proporzionali a $\mathrm{d}l^2$ mentre la forza peso è proporzionale a $\mathrm{d}l^3$. Questa stima è generale e si può applicare a tutte le forze di superficie e di volume. Ciò implica che al diminuire delle dimensioni di un corpo, le forze di volume e di superficie non diminuiscono nello stesso modo ma le prime perdono sempre più importanza mentre le seconde diventano preponderanti. Questo effetto si chiama effetto scala ed è il motivo per cui quando si costruisce un aeromodello non basta ridurre in scala tutte le dimensioni ma bisogna anche cambiare la curvatura dei profili alari per avere un giusto bilanciamento tra il peso dell'aeromodello e la forza di sostentamento (portanza) [1].

2.2 distribuzione di pressione in un fluido

Dopo aver stabilito che la pressione in un punto agisce in ugual modo in tutte le direzioni bisogna ora capire in che modo la pressione varia all'interno di un fluido in quiete o in moto ma sempre sotto la condizione che non siano presenti degli sforzi tangenziali interni al fluido.

In modo simile all'esempio precedente, si consideri un elemento di fluido a forma di parallelepipedo (figura 2.2) e si applichi la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Indicando con p il valore della pressione al centro dell'elemento ed utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor si avrà per le pressioni sulle facce perpendicolari all'asse y $p - \partial p/\partial y(\mathrm{d}y/2)$ e $p + \partial p/\partial y(\mathrm{d}y/2)$ da cui, detta ρ la densità del fluido ed a_y la componente dell'accelerazione lungo la direzione y si può scrivere l'equilibrio dell'elemento:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z a_y, \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y. \tag{2.3}$$

[1] Un altro esempio si ha negli impatti dei corpi; se cade a terra un cucciolo di elefante o un elefante adulto l'effetto sulla struttura ossea certamente non sarà lo stesso anche se i due animali possono certamente essere considerati in scala.

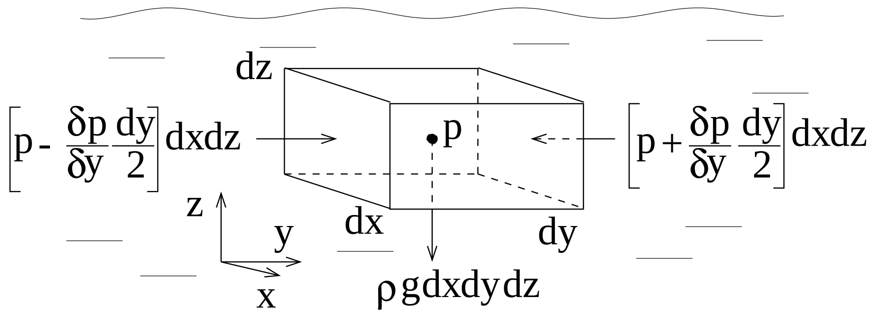


Figura 2.2: Equilibrio delle pressioni per un elemento di fluido.

L'equilibrio si scriverà in modo del tutto analogo nella direzione x mentre per la direzione verticale z bisognerà includere tra le forze il peso:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zg = \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}za_z, \qquad (2.4)$$

ossia

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho a_y.$$

Se ora osserviamo che il gradiente della pressione (in un sistema di coordinate cartesiane) fornisce l'espressione

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}, \qquad (2.5)$$

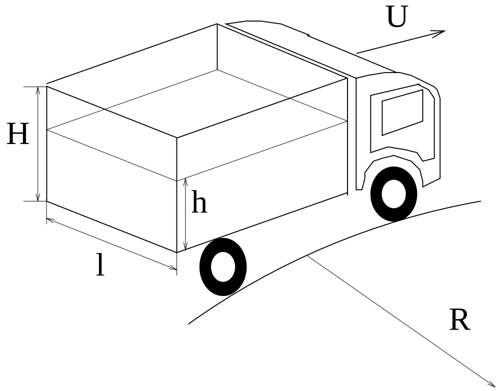
dove $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ sono i versori degli assi, ed indicando con $\mathbf{f}$ il vettore contente tutte le densità di forze di volume (nell'esempio in questione $\mathbf{f} = -g\hat{z}$), l'equilibrio dell'elemento di fluido si scrive

$$-\nabla p + \rho\mathbf{f} = \rho\mathbf{a} \qquad (2.6)$$

che ha validità generale qualunque siano $\mathbf{f}$ ed $\mathbf{a}$. L'unica restrizione all'applicazione di questa relazione resta quindi l'assenza di sforzi viscosi all'interno del fluido.

ESEMPIO

Un camion trasporta del liquido che riempie per 2/3 il cassone a forma di parallelepipedo, aperto in superficie e con le sponde laterali di altezza H. Se percorre una curva circolare di raggio R alla velocità costante U, calcolare la massima velocità con cui può percorrere la curva prima che fuoriesca il liquido.



$l = 2.5$ m $\quad H = 2$ m

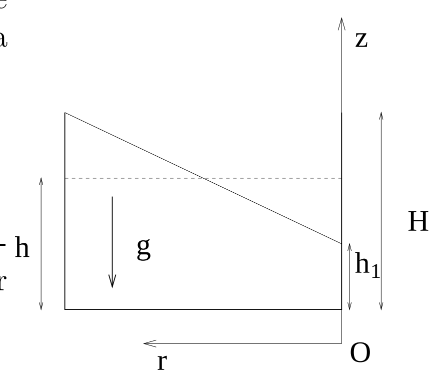
$R = 200$ m $\quad (h = 2H/3)$

Soluzione

In un sistema di riferimento solidale con il camion, sul fluido agiranno la forza peso e quella centrifuga per cui, preso un sistema d'assi come in figura, le equazioni per la statica del fluido saranno:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0, \qquad -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{U^2}{R} = 0,$$

rispettivamente per le componenti verticale e radiale. D'altra parte per il differenziale della pressione si può scrivere



$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r = \rho g \mathrm{d}z + \rho \frac{U^2}{R}\mathrm{d}r.$$

. Essendo la superficie libera una superficie isopressione risulta però $\mathrm{d}p = 0$ da cui si ricava per la superficie libera

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{U^2}{Rg}, \Longrightarrow z(r) = \frac{U^2 r}{Rg} + C.$$

La costante C si determina in base al volume iniziale di fluido. La condizione critica si ha quando $z(r = l) = H$ e per conservare la massa deve risultare $h_1 = 2h - H$ che risulterà anche il valore di $C = z(r = 0)$. Da ciò si ricava $H = U^2 l/(Rg) + 2h - H$ ossia $U = \sqrt{2Rg(H - h)/l} = 32.34$ m/s.

2.3 variazioni di pressione in un fluido in quiete

La relazione (2.6) permette, come caso particolare, di determinare la variazione di pressione con la quota per un fluido soggetto solamente al peso proprio. In questo caso risulterà $\mathbf{a} = 0$ ed orientando l'asse z nella stessa direzione ma verso opposto rispetto alla gravità $\mathbf{f} = -g\hat{z}$ si ottiene dalla (2.6)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g. \tag{2.7}$$

Evidentemente l'integrazione di questa relazione fornisce risultati differenti a seconda che la densità si possa considerare indipendente o meno dalla coordinata z. Nel caso dei liquidi abbiamo visto che il modulo di comprimibilità ha valori estremamente elevati ($\mathcal{O}$[GPa]) e la variazione di densità può essere sicuramente trascurata ottenendo così

$$p(z) = p(0) - \rho g z, \tag{2.8}$$

in cui $p(0)$ è il valore della pressione alla quota $z = 0$ scelta come riferimento. Nel caso dell'acqua ($\rho = 1000\mathrm{Kg/m^3}$) la relazione (2.8) ci dice che ogni 10 metri di profondità ($z = -10\mathrm{m}$) si ha una variazione di pressione $\Delta p = 98000\mathrm{Pa}$ ossia circa un'atmosfera. Questo fatto dovrebbe essere ben noto a tutti quelli che fanno immersioni in quanto il continuo aumento di pressione con la profondità costringe a frequenti compensazioni tra la pressione interna dell'orecchio e quella esterna che agisce sul timpano durante la fase di immersione.

Se invece dei liquidi consideriamo i gas, le variazioni di densità con la quota non saranno più trascurabili e l'integrazione dell'equazione (2.7) deve tenere conto della forma specifica di $\rho(z)$. Un caso semplice è costituito da uno strato di gas che obbedisca all'equazione di stato dei gas perfetti e che sia isotermo risultando così $\rho = p/(RT)$ con il fattore $1/(RT)$ costante in z e dipendente solo dalla temperatura e dal gas specifico considerato. Questa relazione, sostituita nella (2.7) fornisce

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{gp}{RT}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{RT}\mathrm{d}z, \tag{2.9}$$

da cui si ottiene per integrazione

$$\log\frac{p(z)}{p(0)} = -\frac{g}{RT}z, \quad \Rightarrow \quad p(z) = p(0)e^{-\frac{g}{RT}z}, \tag{2.10}$$

da cui si vede che la diminuzione di pressione con la quota è un esponenziale decrescente. Ciò implica che pur salendo in quota, prendendo dei Δz costanti si ottengono dei decrementi di pressione sempre più piccoli; questo effetto si può comprendere intuitivamente osservando che gli strati inferiori dell'atmosfera sono compressi dal peso degli strati superiori e questo peso diminuisce con z per due fattori *ı)* lo spessore di fluido è minore *ıı)* il fluido ha una densità sempre minore perché meno compresso.

È comunque importante notare che dato il basso valore di densità dei gas, le variazioni di pressione dovute al peso proprio diventano importanti solo per variazioni di quota dell'ordine delle centinaia o migliaia di metri. Per provare questa asserzione si può, per esempio applicare la relazione (2.10) all'aria a temperatura ambiente osservando che per una variazione di quota di $z = 50$m si ha una variazione relativa di pressione di solo lo 0.59%.

2.4 atmosfera standard

Tra i problemi di determinazione di variazioni di pressione con la quota, quello dell'atmosfera riveste una particolare rilevanza pratica a causa di tutte le applicazioni di trasporto aereo, meteorologia e geofisica. Purtroppo le cause che determinano le variazioni di pressione nell'atmosfera sono molteplici e complesse [2] e ciò ha reso necessaria la definizione di valori standard applicabili ovunque ed in qualunque momento dell'anno in modo da avere dei valori di riferimento.

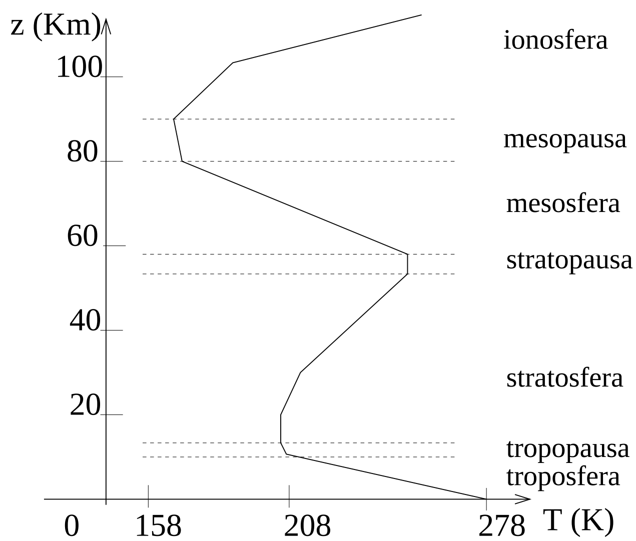


Figura 2.3: Distribuzione della temperatura con la quota nell'atmosfera.

Queste condizioni di riferimento sono state fissate mediando i valori in un anno di tutto il globo alla latitudine 40^o nord il che fornisce una temperatura al suolo di $T(0) = 288.15$K (15^oC) ed una pressione di $p(0) = 101330$Pa. Per le variazioni di temperatura con la quota è stato provato che nella zona compresa tra 0 ed 11000m (troposfera) si ha una diminuzione lineare di temperatura con gradiente costante pari a $\tau = 0.0065$K/m (ossia 6.5 gradi ogni Km di quota) da cui si ottiene

$$T(z) = T(0) - \tau z. \tag{2.11}$$

Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti si possono quindi mettere in relazione p e ρ con la quota

[2]Se ci limitiamo solamente a considerare la pressione al suolo, possiamo già notare che questa varia con la latitudine e con le condizioni meteorologiche di 'alta' o 'bassa pressione' risultando così funzione del tempo oltre che dello spazio.

$$\frac{p}{\rho} = RT, \qquad \frac{p}{\rho} = R(T(0) - \tau z), \qquad \rho = \frac{p}{R(T(0) - \tau z)}, \tag{2.12}$$

che sostituita nella (2.7) diventa

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{pg}{R(T(0) - \tau z)}, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T(0) - \tau z}, \qquad \frac{p(z)}{p(0)} = \left(\frac{T(0) - \tau z}{T(0)}\right)^{\frac{g}{\tau R}}. \tag{2.13}$$

Infine, dalle funzioni $T(z)$ e $p(z)$ si ricava facilmente dall'equazione di stato la funzione per $\rho(z)$.

Al di sopra della troposfera c'è uno strato dello spessore di circa 2Km caratterizzato da un gradiente termico di circa 0.002K/m che è detto tropopausa. Per quote ancora superiori e fino a circa 50Km c'è invece la stratosfera caratterizzata da temperatura che inizialmente è pressoché costante (fino a circa 20Km) mentre successivamente aumenta dapprima lievemente e poi in modo più marcato. A quote ancora superiori si entra nella mesosfera dove si osserva una nuova diminuzione di temperatura fino alla quota di 80Km. Al di sopra dei 90Km si ha infine la ionosfera con una temperatura crescente; in questa regione, tuttavia, il valore estremamente basso di densità e la ionizzazione dei gas presenti (a causa della radiazione solare) non permette più di utilizzare l'ipotesi di continuo e non verrà quindi descritta in questa sede.

2.5 forze di pressione

Possiamo a questo punto calcolare il sistema delle forze di pressione che un fluido in quiete esercita su una superficie di forma qualunque il che generalmente richiede il calcolo dellla sua risultante $\mathbf{F}$ e della coppia $\mathbf{M}$.

Si consideri allo scopo una superficie S (figura 2.4) e, isolato l'elemento d'area $\mathrm{d}S$, si calcoli la forza elementare agente su tale superficie $\mathrm{d}\mathbf{F} = -p\mathbf{n}\mathrm{d}S$ dove $\mathbf{n}$ è la normale orientata dal lato in cui il fluido 'bagna' la superficie. Per la forza totale si avrà semplicemente:

$$\mathbf{F} = \int_S -p\mathbf{n}\mathrm{d}S. \tag{2.14}$$

Preso invece un polo O e detto $\mathbf{x}$ il vettore che unisce il polo con la forza infinitesima $\mathrm{d}\mathbf{F}$ si ha

$$\mathbf{M} = \int_S -p\mathbf{x} \times \mathbf{n}\mathrm{d}S. \tag{2.15}$$

Bisogna notare che sebbene dal punto di vista teorico la soluzione di questo problema sia elementare e si risolva utilizzando elementi classici della teoria dei vettori, la possibilità pratica di calcolare effettivamente gli integrali (2.14 e 2.15) è alquanto limitata e, nel caso generale, quasi mai possibile per via analitica. Le difficoltà possono derivare sia dalla complessità della superficie e dall'orientazione della sua normale ma anche dalla distribuzione della pressione che in linea di principio potrebbe essere una funzione complicata dello spazio; in questi casi si procede ad una soluzione del problema per via numerica in

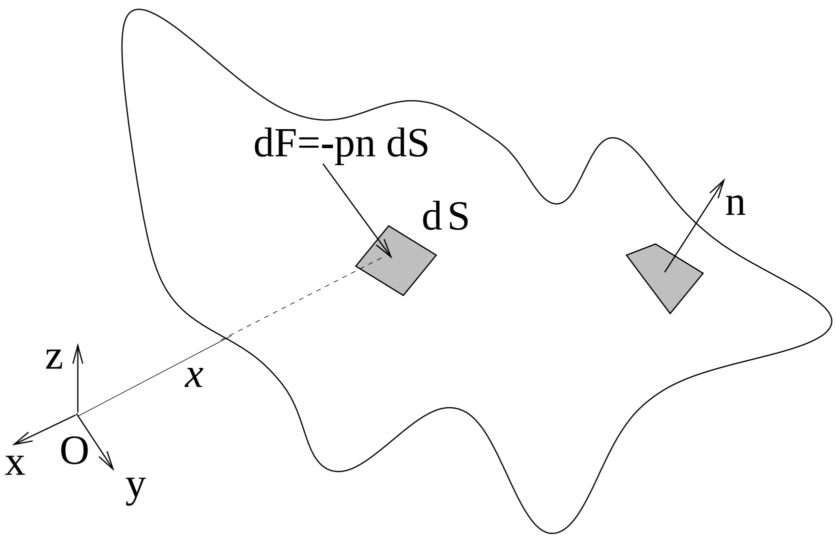


Figura 2.4: Forza di pressione agente su una superficie.

cui la superficie viene discretizzata in tanti elementi sui quali la pressione si possa ritenere costante e gli integrali divengono delle sommatorie discrete.

Ci sono tuttavia numerose applicazioni pratiche in cui la pressione è costante o varia linearmente con la quota (rispettivamente, nei gas per variazioni di quota limitate o nei liquidi) e le superfici in esame sono piane o si possono decomporre in un numero limitato di superfici piane, in tal caso è possibile risolvere gli integrali trovati per via analitica e trovare delle formule risolutive di grande utilità per le applicazioni pratiche.

2.5.1 pressione costante

Iniziamo con il considerare il caso in cui la superficie sia piana e la pressione risulti costante come negli esempi raffigurati nelle figure 2.5 e 2.6. Analizziamo in dettaglio l'esempio di figura 2.5; riprendendo l'espressione (2.14) si ha che la normale è orientata sempre nello stesso modo su tutta la superficie e la pressione non varia ottenendo così $\mathbf{F} = -pS\mathbf{n}$ [3]. La pressione sul fondo del contenitore sarà data dalla somma della pressione atmosferica p_0 più la componente idrostatica risultando $p = p_0 + \rho g h$.

Per il calcolo della retta d'applicazione consideriamo la direzione x e notiamo che nell'espressione (2.15) la normale è costantemente ortogonale al braccio x mentre la risultante

[3] È utile evidenziare che, come è noto dalla meccanica razionale, essendo questo un sistema di vettori paralleli, è possibile ricondurre le forze di pressione ad un unico vettore risultante senza la necessità di calcolarne il momento. In particolare il 'trinomio invariante' $\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{F}$ è identicamente nullo, in quanto $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{F}$ sono ortogonali, e ciò implica che per caratterizzare il sistema di forze è sufficiente calcolarne la risultante $\mathbf{F}$ ed un appropriato punto d'applicazione tale da bilanciare il momento delle forze dato dalla (2.15).

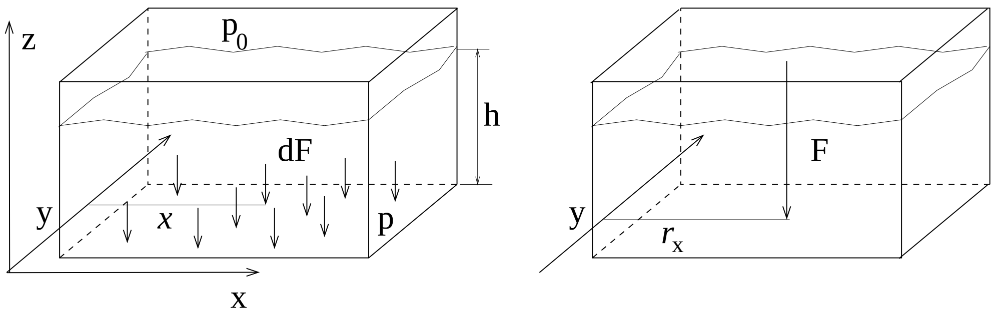


Figura 2.5: Forza di pressione generata da un liquido agente su una superficie orizzontale.

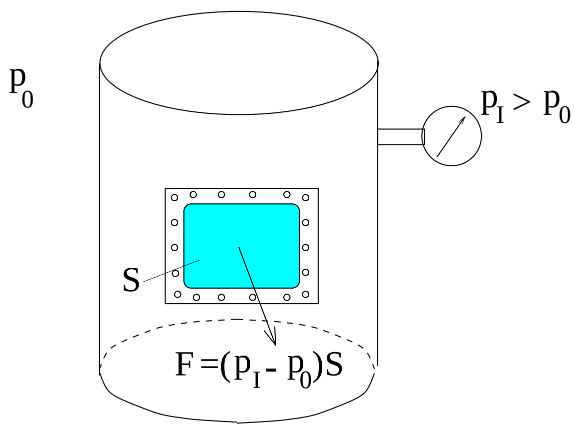


Figura 2.6: Forza di pressione generata da una gas agente su una superficie piana.

F dovrà essere normale al braccio r_x. Esplicitando quindi l'integrale in (2.15) si ha

$$p \int_S x \mathrm{d}S = \mid \mathbf{F} \mid r_x, \Longrightarrow p \int_S x \mathrm{d}S = pSr_x, \Longrightarrow r_x = \frac{\int_S x \mathrm{d}S}{S}. \tag{2.16}$$

Lo stesso ragionamento può essere effettuato in modo del tutto analogo per determinare il punto di applicazione della risultante nella direzione y ottenendo l'espressione $r_y \int_S y \mathrm{d}S/S$ per cui in forma vettoriale

$$\mathbf{r} = \frac{\int_S \mathbf{x} \mathrm{d}S}{S}, \tag{2.17}$$

da cui si vede che in tali circostanze la retta d'applicazione viene determinata esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della superficie. L'integrale in (2.17) è un integrale noto nella geometria ed **r** corrisponde esattamente alla definizione di centroide di una figura. In conclusione si può quindi affermare che nel caso in cui la superficie sia piana e la pressione abbia un valore costante su tale superficie, il sistema di forze di pressione è equivalente ad un'unica forza il cui modulo è dato dal prodotto della pressione per la superficie mentre il punto d'applicazione si trova nel centroide della superficie stessa [4].

[4] Nell'esempio di figura 2.5 è stata calcolata la forza di pressione come $\mathbf{F} = -pS\mathbf{n}$ dove essendo

2.5.2 distribuzione lineare di pressione

Come è stato mostrato nella sezione 2.3 il caso di una pressione linearmente crescente o decrescente con la quota, concerne tutti quei problemi in cui è presente un fluido la cui densità possa essere considerata costante (generalmente tutti i liquidi). Cerchiamo ora di determinare la risultante delle forze di pressione su una superficie piana immersa in tale fluido e comunque orientata. A tale scopo consideriamo la figura 2.7 e notiamo che la pressione alla generica quota z' sarà la somma di quella atmosferica p_0 più il contributo $\rho g z'$ essendo ρ la densità del fluido in esame. La forza dovuta alla pressione atmosferica (che è costante su tutta la superficie S) si determina come mostrato nella sezione precedente e non verrà considerata ulteriormente nel presente esempio.

Utilizzando la (2.14) la componente di pressione linearmente crescente con la quota, darà luogo ad una forza pari a

$$\mathbf{F} = -\rho g \mathbf{n} \int_S z' \mathrm{d}S = -\rho g \mathbf{n} \cos\theta \int_S z \mathrm{d}S = -\rho g \cos\theta z_C S \mathbf{n} = -\rho g z'_C S \mathbf{n}, \tag{2.18}$$

dove con z_C si è indicata la coordinata del centroide di S e con z'_C la coordinata corrispondente sull'asse z'. Per la retta d'applicazione, si possono invece uguagliare i momenti rispetto all'asse x delle forze di pressione e della risultante; per le prime, seguendo la (2.15), si scrive

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{z} \times \mathrm{d}\mathbf{F} = -\int_S p \mathbf{z} \times \mathbf{n} \mathrm{d}S = -\rho g \hat{z} \times \mathbf{n} \int_S z' z \mathrm{d}S = \tag{2.19}$$

$$\rho g \mathbf{n} \times \hat{z} \int_S z' z \mathrm{d}S = \rho g (\cos\theta)^{-1} \hat{x} \int_S z^2 \mathrm{d}S = \rho g (\cos\theta)^{-1} \hat{x} I_x,$$

essendo I_x il momento d'inerzia [5] di S rispetto all'asse x e $\hat{z}$ e $\hat{x}$, rispettivamente i versori degli assi z ed x.

Per il momento della risultante si avrà invece

$$\mathbf{M} = \mathbf{z}_R \times \mathbf{F} = \rho g z_C (\cos\theta)^{-1} S z_R \hat{z} \times \mathbf{n} = \rho g (\cos\theta)^{-1} z_C S z_R \hat{x}, \tag{2.20}$$

$p = p_0 + \rho g h$ si è considerato anche il contributo della pressione atmosferica. Non bisogna però dimenticare che c'è un'ulteriore forza che è quella prodotta dalla pressione atmosferica che agisce sulla stessa superficie esternamente al sebatoio. Seguendo un ragionamento identico ai precedenti si avrà una nuova forza $\mathbf{F}_0 = -p_0 S \mathbf{n}$ avente esattamente lo stesso punto di applicazione di $\mathbf{F}$ ma verso opposto. Ne conseguirà che la forza totale applicata ad S sarà $\mathbf{F}_{tot} = -\rho g h S \hat{z}$.

[5] La quantità I_x è indicata con il nome di momento d'inerzia e ciò può trarre in inganno un quanto c'è un'altra grandezza definita come $I_V = \int_V \rho \mathbf{r}^2 \mathrm{d}V$ (con V volume, ρ densità ed $\mathbf{r}$ distanza del volume elementare $\mathrm{d}V$ rispetto ad un generico punto O) che viene pure chiamata momento d'inerzia. Tuttavia l'analisi delle dimensioni delle due quantità permette di fare un minimo di chiarezza in quanto la prima (I_x) dimensionalmente è una lunghezza alla quarta potenza mentre la seconda è una massa per una lunghezza al quadrato. In altre parole I_x è una quantità puramente geometrica e consistentemente entra in gioco quando si fanno considerazioni di statica. Al contrario I_V (contenendo la massa) è una quantità dipendente dall'inerzia dell'oggetto sotto esame e deve essere considerato nell'analisi di quantità dinamiche. In alcuni testi la quantità I_x viene chiamata momento di figura per evitare la confusione con I_V.

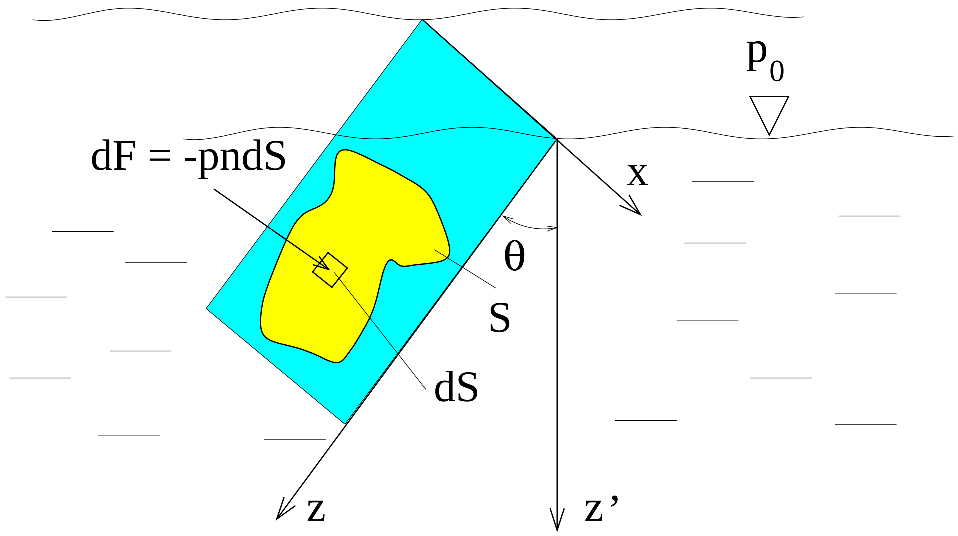


Figura 2.7: Forza di pressione generata da un liquido agente su una superficie generica.

per cui uguagliando gli ultimi membri di (2.19) e (2.20) si ottiene

$$z_R = \frac{I_x}{z_C S} \tag{2.21}$$

che ci fornisce la coordinata z in cui è applicata la risultante delle forze di pressione.

Il momento d'inerzia I_x sarà chiaramente differente a seconda dell'asse x rispetto al quale si valuta ed in linea di principio andrebbe calcolato caso per caso. Tuttavia, utilizzando un noto teorema della meccanica razionale è possibile, una volta noto I_x per un generico asse x calcolare $I_{x'}$ rispetto a qualunque asse x'. Detto allora I_{xc} il momento d'inerzia di S rispetto ad un asse parallelo ad x ma passante per il centroide di S si può scrivere

$$I_x = I_{xc} + z_C^2 S \tag{2.22}$$

per cui dalla (2.21)

$$z_R = z_C + \frac{I_{xc}}{z_C S}. \tag{2.23}$$

La quantità I_{xc} ha il vantaggio di essere già calcolata per la maggior parte delle figure geometriche regolari per cui in base alla (2.23) risulta banale il calcolo del punto di applicazione della risultante delle pressioni. In figura 2.8 vengono riportati i valori di I_{xc} per alcune figure geometriche regolari.

Osservando inoltre l'espressione (2.23) si nota che il secondo termine a secondo membro è certamente definito positivo per cui deve risultare $z_R > z_C$, ossia il punto di applicazione della risultante delle forze è più in basso rispetto al centroide. È altrettanto interessante osservare che la differenza tra z_R e z_C non è costante ma dipende dalla quota di immersione attraverso z_C stesso (che è determinato rispetto ad un asse la cui origine coincide con la

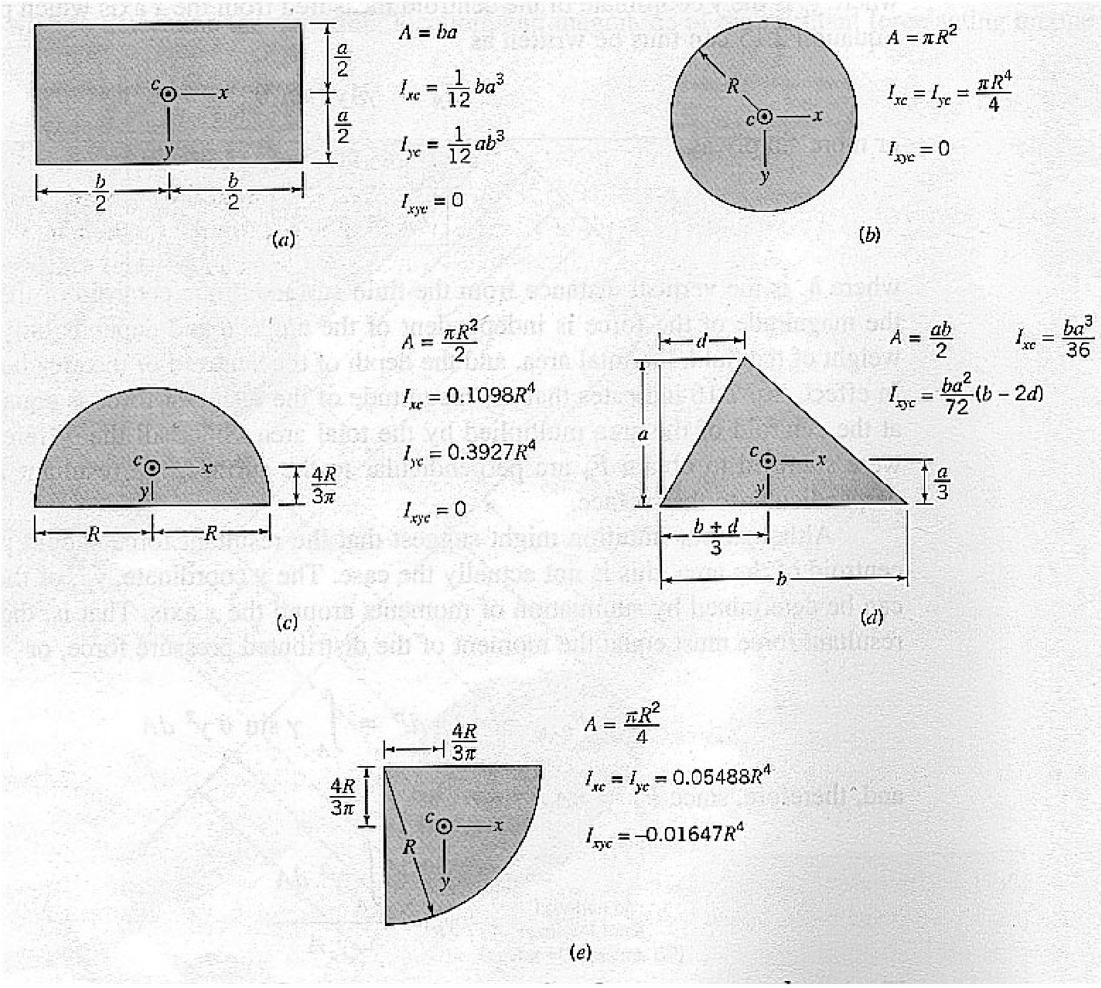


Figura 2.8: Caratteristiche geometriche di alcune figure regolari.

superficie libera del fluido). In particolare, all'aumentare della profondità a cui è immersa S, z_C aumenterà mentre sia S che I_{xc} rimarranno costanti da cui ne consegue che $z_R \to z_C$ (figura 2.9). Il motivo fisico di ciò è che se $z_C \to \infty$ la variazione della pressione sulla superficie diventerà sempre più piccola rispetto alla pressione media e la risultante tenderà a comportarsi come se la pressione fosse costante (e quindi applicata nel centroide).

Per quanto riguarda il punto di applicazione della risultante nella direzione x si può notare che, suddividendo S in tante striscie parallele all'asse x su ognuna delle striscie la pressione risulta costante e quindi la forza di pressione deve essere applicata nel centroide dalla striscia; integrando quindi su tutte le striscie elementari si ottiene che la risultante delle forze di pressione è applicata nella x del centroide.

Riassumendo possiamo concludere affermando che: presa una superficie piana immersa in un fluido la cui pressione vari linearmente con la quota e preso un sistema d'assi $x - z$ con l'origine su pelo libero del fluido ed orientato come in figura 2.9 si ha che la risultante

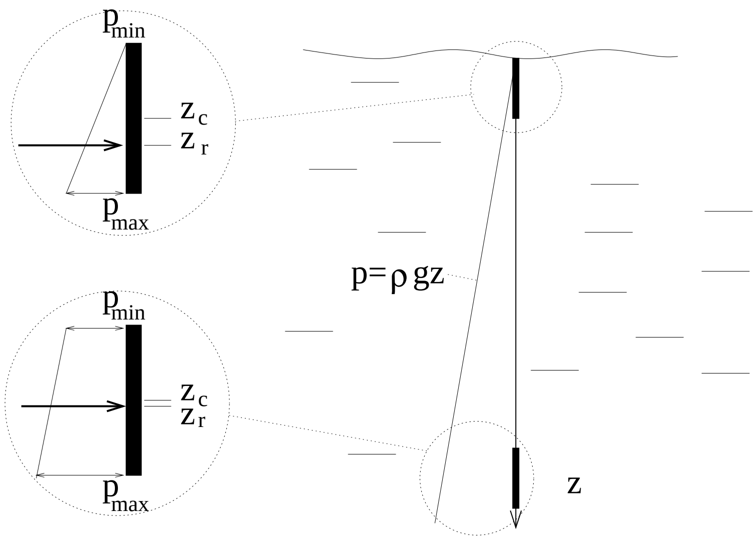
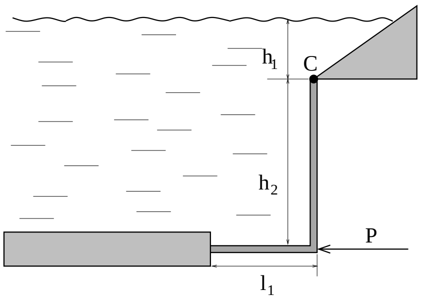


Figura 2.9: Variazione del punto di applicazione della risultante delle forze di pressione con la quota di immersione z.

delle forze di pressione sarà pari al prodotto della superficie S per la pressione valutata alla quota del centroide z'_C ed orientata come $-\mathbf{n}$. Tale risultante sarà applicata in un punto di coordinate (x_C, z_R) in cui x_C è la coordinata x del centroide e z_R è un punto più in basso del centroide definito in (2.23).

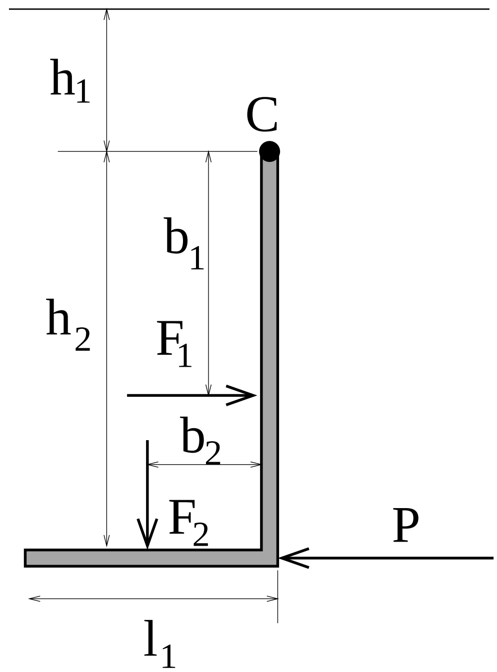
ESEMPIO

Una paratia come in figura si trova sotto il livello dell'acqua ed è incernierata in C. Determinare il minimo valore di P per impedire la fuoriuscita di liquido. (Si trascuri il peso proprio della paratia e l'attrito della cerniera. La dimensione b è ortogonale al foglio.)



$h_1 = 7.\text{m} \quad h_2 = 5$ m
$l_1 = 3$ m $\quad b = 6$ m

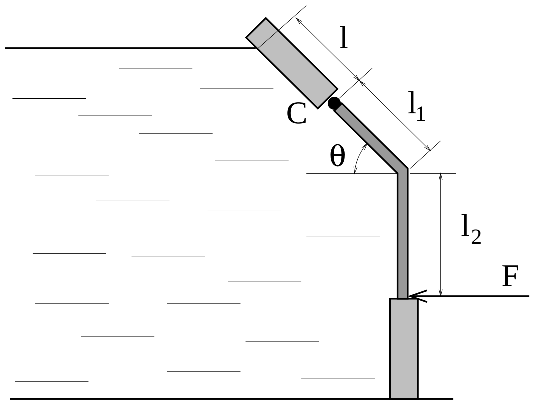
Soluzione



Dall'equilibrio dei momenti intorno alla cerniera C si ha: $F_1 b_1 + F_2 b_2 = P h_2$ con, $F_1 = \rho g(h_1 + h_2/2) b h_2 = 2795850$ N, $F_2 = \rho g(h_1 + h_2) l_1 b = 2118960$ N, $b_1 = y_R - h_1 = h_2/2 + b h_2^3/(12 b h_2[(h_1 + h_2/2)] = 2.719$ m e $b_2 = l_1/2$. Dall'equilibrio dei momenti si ricava, quindi: $P = 2156071$ N.

ESEMPIO

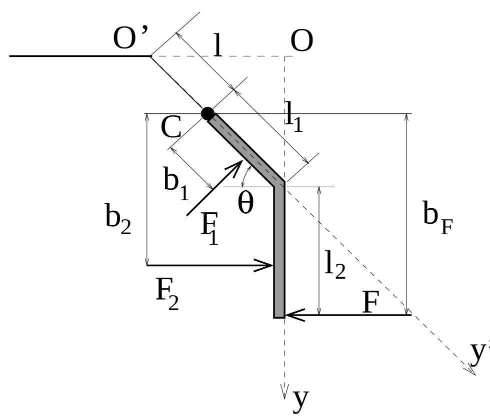
Data la configurazione nell'illustrazione calcolare l'intensità della forza F per evitare l'apertura dello sportello incernierato in C.



$l = 1.2$ m $\quad l_1 = 1.4$ m
$l_2 = 2$ m $\quad b = 1.5$ m
$\theta = 45^o$ $\quad$ fluido:acqua
b è la dimensione dello sportello nella direzione ortogonale al foglio.

Soluzione

Sul tratto inclinato dello sportello agirà una forza $F_1 = \rho g h_{1c} A_1 = 27677$ N, essendo $h_{1c} = (l + l_1/2)\sin\theta = 1.3435$ m. Questa forza è applicata nel punto $y'_{1R} = 1.986$ m misurato sull'asse y' con origine in O'. Nello stesso modo, sul tratto verticale agirà una forza $F_2 = \rho g h_{2c} A_2 = 83536.4$ N con $h_{2c} = (l + l_1)\sin\theta + l_2/2 = 2.838$ m applicata nel punto $y_{2R} = 2.955$ m misurato sull'asse y con origine in O.
Dall'equilibrio dei momenti intorno alla cerniera C si ha: $F_1 b_1 + F_2 b_2 = F b_F$ con $b_1 = y_{R1} - l = 0.786$ m, $b_2 = y_{2R} - l \sin\theta = 2.1064$ m e $b_F = l_1 \sin\theta + l_2 = 2.99$ m da cui si ricava $F = 66126$ N.



2.5.3 forze di pressione su una superficie curva

Nelle due sezioni precedenti abbiamo considerato problemi in cui la superficie in esame poteva essere interamente contenuta in un piano e questo ha permesso di ottenere delle formule generali per il calcolo della risultante delle forze di pressione. Ci sono tuttavia delle applicazioni in cui questa ipotesi non può essere applicata e ciò nonostante è possibile calcolare la risultante delle forze di pressione senza ricorrere al calcolo esplicito degli integrali (2.14) e (2.15). Si consideri allo scopo la figura 2.10 in cui si voglia calcolare la forza risultante sulla superficie esterna che delimita la regione di fluido più scura [6]. Se si isola il volume di fluido delimitato da tale superficie e dalle superfici piane orizzontali e verticali interne al fluido si può tracciare il diagramma di corpo libero per tale volume e determinare le reazioni che la superficie esterna esercita sul fluido. Utilizzando le formule ricavate precedentemente si ricavano facilmente F_y ed F_x da cui dall'equilibrio alla traslazione in x ed y si ha

$$F_{rx} = F_x, \qquad F_{ry} = F_y + W, \tag{2.24}$$

essendo W il peso del volume di fluido racchiuso nella zona evidenziata in figura 2.10. Il vettore della forza risultante avrà quindi modulo F_r e formerà con l'asse x un angolo α così determinati:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}, \qquad \alpha = \tan^{-1} \frac{F_{ry}}{F_{rx}}. \tag{2.25}$$

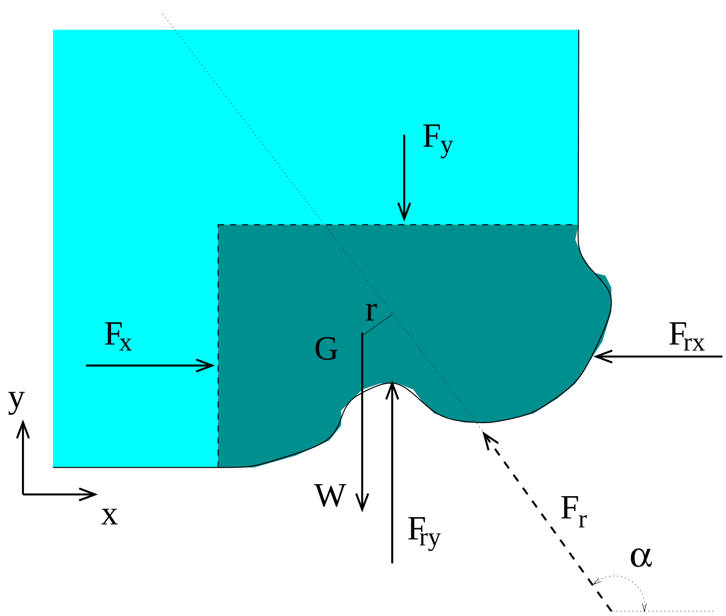


Figura 2.10: Forze di pressione su una superficie curva.

Per determinare la retta di applicazione di F_r basta infine equilibrare i momenti delle forze rispetto ad un punto. Se, per esempio si sceglie il baricentro, detti r, r_x ed r_y, rispettivamente, i bracci di F_r, F_{rx} ed F_{ry} rispetto a G si ricava dall'equilibrio alla rotazione

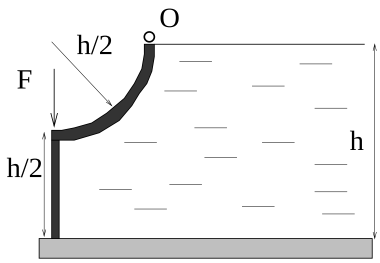
$$F_r r + F_{rx} r_x - F_{ry} r_y = 0, \tag{2.26}$$

[6]Si noti che anche in questo caso il sistema di forze è equivalente solo ad una risultante applicata in un punto opportuno in quanto, in ogni sezione, tutte le forze sono contenute in un piano (quello del foglio). Nel caso più generale la riduzione del sistema di forze richiederebbe il calcolo di una risultante e di un momento rispetto ad un polo.

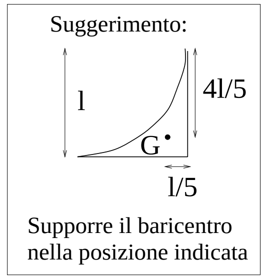
da cui si ricava r.

ESEMPIO

Determinare F in modo che lo sportello non si apra sotto la spinta dell'acqua.



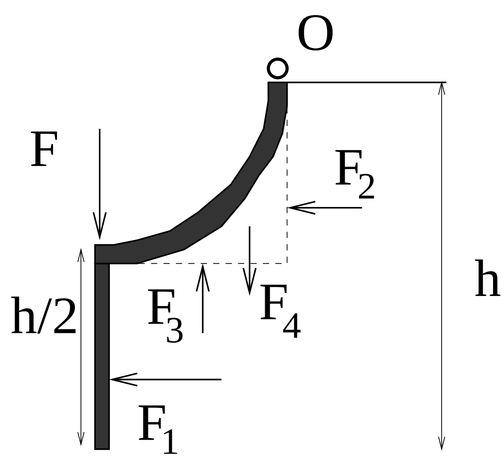
(sportello incernierato in O)



$h = 3$ m $\quad b = 2$ m

Soluzione

Sul sistema agiranno le 4 forze disegnate in figura e determinate secondo le seguenti formule: $F_1 \rho g 3h/4 \cdot bh/2 = 66217.5$ N, $F_2 \rho g h/4 \cdot bh/2 = 22072.5$ N, $F_3 = \rho g h/2 \cdot bh/2 = 44145$ N, $F_4 = b(h^2/4 - \pi h^2/16)\rho g = 94736$ N, aventi braccio rispetto ad O $r_1 = 3h/4 + h/36 = 2.333$ m, $r_2 = h/3 = 1$ m, $r_3 = h/4 = 0.75$ m, $r_4 = h/10 = 0.3$ m. Dall'equilibrio dei momenti intorno ad $= 0$, $Fh/2 = F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3 - F_4 r_4$ si ricava $F = 137897.8$ N.



2.6 spinta di Archimede

Vogliamo ora calcolare la forza esercitata da un fluido che circonda un corpo a causa della variazione di pressione. Riferendoci alla figura 2.11 consideriamo un corpo di forma generica immerso in un fluido e consideriamo il perimetro massimo che circoscrive il corpo in un piano orizzontale [7] indicando con S la superficie delimitata. Se per ogni elemento dS costruiamo un cilindro elementare contenuto nel solido, possiamo calcolare la risultante delle forze di pressione esercitate su tale cilindro che saranno

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = (p_l - p_u)\mathrm{d}S\hat{z}, \tag{2.27}$$

che per integrazione su tutta la superficie S ci fornisce la risultante. Essendo la pressione costante su piani orizzontali possiamo utilizzare la relazione (2.7) per calcolare la differenza

[7] In realtà esistono forme solide per le quali non si può determinare tale perimetro; è però possibile decomporre tali forme in un numero finito di corpi per i quali l'operazione descritta è definita quindi la procedura ha validità generale.

$(p_l - p_u)$; risulta infatti $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$ e quindi

$$(p_l - p_u) = -\int_{z_l}^{z_u} \mathrm{d}p = \int_{z_l}^{z_u} \rho g \mathrm{d}z, \tag{2.28}$$

che sostituita in (2.27) diventa

$$\mathbf{F} = \int_S (p_l - p_u) \mathrm{d}S \hat{z} = \int_S \int_{z_l}^{z_u} \rho g \mathrm{d}z \mathrm{d}S \hat{z} = \int_V \rho g \mathrm{d}V \hat{z}, \tag{2.29}$$

da cui, essendo ρ la densità del fluido, ne consegue che la forza esercitata dal fluido sul corpo è una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato dal corpo [8].

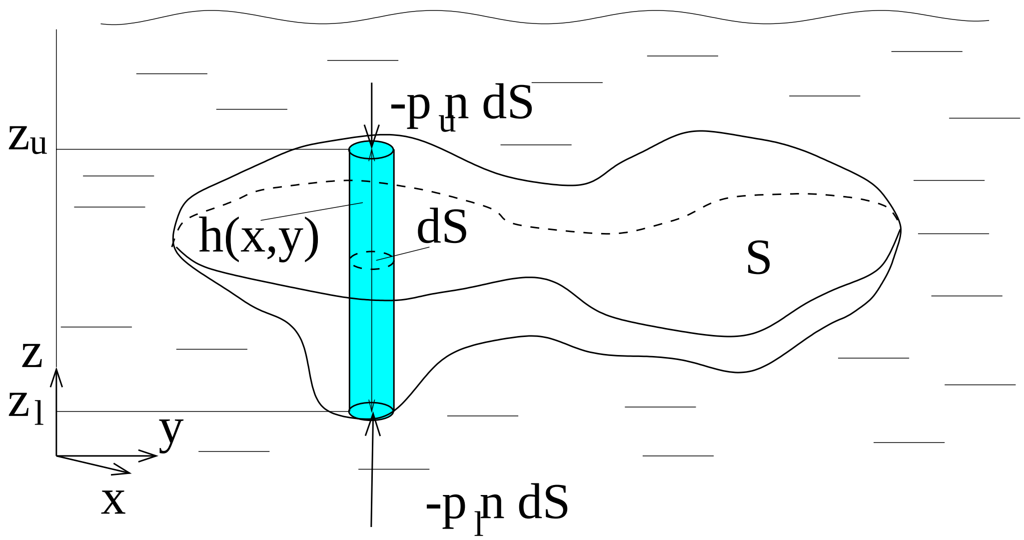


Figura 2.11: Forze di pressione su corpo immerso in un fluido.

Gli stessi ragionamenti fatti per un corpo immerso in un solo fluido, possono essere ripetuti per un corpo immerso parzialmente in un fluido e parzialmente in un altro fluido a densità differente (figura 2.12). Se la configurazione risulta stabile, ossia se $\rho_1 \geq \rho \geq \rho 2$ allora il corpo si disporrà in una posizione intermedia all'interfaccia tra i due fluidi in modo che la spinta di Archimede bilanci il suo peso. Naturalmente ogni fluido contribuisce alla spinta per la porzione di fluido spostato per cui detti rispettivamente V_1 e V_2 le frazioni di volume del corpo immerse nei fluidi a densità ρ_1 e ρ_2 e V il volume totale del corpo (con $V = V_1 + V_2$) dovrà risultare

$$\int_{V_1} \rho_1 g \mathrm{d}V + \int_{V_2} \rho_2 g \mathrm{d}V = \rho g V, \tag{2.31}$$

[8] L'espressione (2.27) assume una forma particolarmente semplice se la pressione ha una variazione lineare con la quota in quanto risulta $p_l = p_u - \rho g (z_l - z_u) = p_u + \rho g h$ e la (2.27) diventa

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \rho g h \mathrm{d}S \hat{z}, \quad \text{da cui} \quad \mathbf{F} = \rho g h \int_S h \mathrm{d}S \hat{z} = \rho g V \hat{z}, \tag{2.30}$$

essendo V il volume del solido in esame.

oppure nel caso di fluidi incomprimibili

$$\rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho g V. \tag{2.32}$$

A rigore questo ragionamento andrebbe applicato anche quando i due fluidi sono acqua ed aria come per esempio nel caso di una nave; tuttavia avendo l'aria una densità di $600-800$ volte minore di quella dell'acqua si capisce immediatamente che il contributo alla spinta dell'aria risulta trascurabile rispetto a quello dell'acqua e di solito non si considera [9].

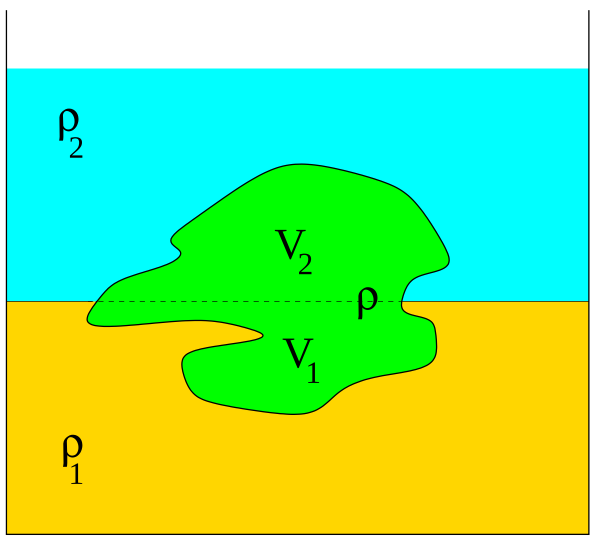
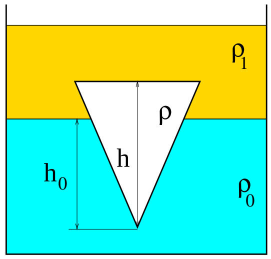


Figura 2.12: Galleggiamento per un corpo in equilibrio tra due fluidi a differente densità.

[9] Uno dei primi esperimenti di cui si abbia traccia scritta sul galleggiamento di un corpo tra due fluidi a differente densità è descritto da Galileo Galilei nel 1630 che riporta: "...Nel fondo di un recipiente ho messo dell'acqua salata e sopra di essa uno strato di acqua pura; ho quindi mostrato che la palla (di cera) rimaneva in equilibrio all'interfaccia tra i due fluidi e quando veniva spinta verso il fondo o sollevata verso l'altro non rimaneva in nessuna delle due posizioni ma ritornava nella posizione iniziale".

ESEMPIO

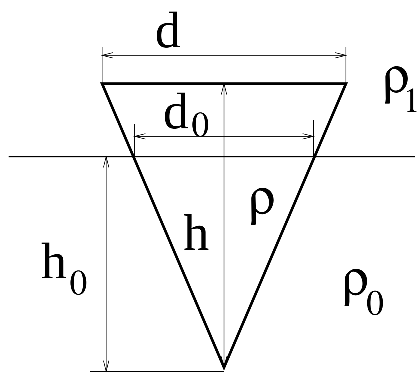
Dato il cono a base circolare in figura, determinare l'altezza della porzione di solido immerso nel fluido a densità ρ_0.



$$\rho = 1.15 \text{ Kg/dm}^3 \quad \rho_0 = 1.2 \text{ Kg/dm}^3$$
$$\rho_1 = 0.98 \text{ Kg/dm}^3 \quad h = 0.4 \text{ m}$$

Soluzione

Dal principio di Archimede si ha $\rho_0 g V_0 + \rho_1 g V_1 = \rho g V$ (essendo, rispettivamente V_0 e V_1 le frazioni di volume del corpo immerse nei fluidi a densità ρ_0 e ρ_1, e V il volume totale del corpo). Risultando $V_1 = V - V_0$ l'equilibrio al galleggiamento si può scrivere come $V_0(\rho_0 - \rho_1) = V(\rho - \rho_1)$. D'altra parte i volumi sono dati da $V = \pi d^2 h/12$ e $V_0 = \pi d_0^2 h_0/12$ mentre dalla similitudine tra i triangoli si può scrivere $d/h = d_0/h_0$ per cui la precedente relazione diventa:



$$\frac{\pi d_0^2 h_0}{12}(\rho_0 - \rho_1) = \frac{\pi d^2 h}{12}(\rho - \rho_1), \quad \Longrightarrow \quad h_0^3 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} h^3,$$

da cui si ricava $h_0 = 0.367$ m.

2.7 galleggiamento e stabilità

Nella sezione precedente abbiamo visto come calcolare la risultante delle pressioni esercitate da un fluido in cui è immerso un corpo. Tale risultante prende il nome di spinta di Archimede e si calcola in modo identico anche nel caso in cui il corpo sia solo parzialmente immerso nel fluido. In quest'ultimo caso, nascono questioni di stabilità visto che il peso del corpo è applicato nel suo baricentro (ed è quindi indipendente dall'immersione del corpo) mentre la spinta di galleggiamento è applicata nel baricentro della regione di fluido spostata (detto centro di spinta) ed è quindi funzione della posizione del corpo rispetto alla superficie libera del fluido. Nel caso di figura 2.13 si può vedere che per un'oscillazione contenuta del corpo, il punto di applicazione della spinta si sposta in modo tale da formare con il peso una coppia stabilizzante che tende cioè a riportare il corpo nella posizione iniziale.

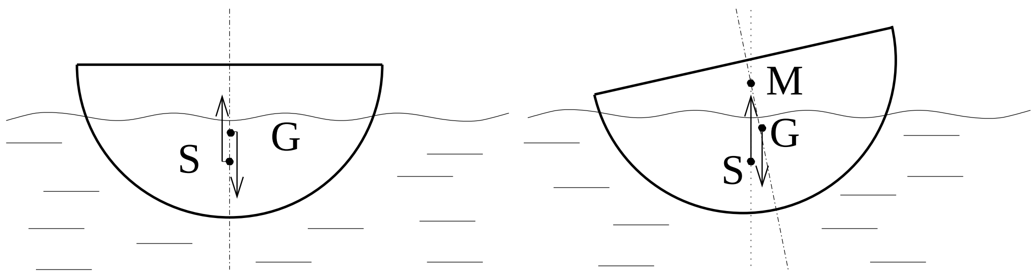


Figura 2.13: Schema di stabilità alla rotazione.

Nel caso di corpi simmetrici, il punto di intersezione tra la retta contenente la spinta e l'asse di simmetria del corpo è detto metacentro e si può immaginare che il corpo oscilli intorno ad un asse ortogonale al piano del foglio e passante per il metacentro [10]; si può vedere che la configurazione sarà stabile fino a quando il baricentro si trova al di sotto del metacentro mentre nel caso opposto si ha una configurazione instabile. È utile osservare che mentre la spinta ed il suo punto di applicazione dipendono unicamente dall'immersione del corpo, la posizione del baricentro dipende dalla dislocazione delle masse con la conseguenza che la stabilità può eseere aumentata o diminuita spostando dei pesi all'interno del corpo. Come esempio si consideri un piccolo natante con sei persone a bordo; se tutte le persone si alzano in piedi, si avrà un innalzamento del baricentro che, avvicinandosi al metacentro, diminuirà la stabilità del natante. Se infine come caso estremo si immagina che tutte le persone, salendo su una scala, si portino ad un'altezza di $2-3$ metri si può avere facilmente il ribaltamento della barca.

2.8 misuratori di pressione

In questo paragrafo verranno illustrati alcuni dispositivi di misura della pressione soffermandosi in particolare sul loro principio di funzionamento. Iniziamo con il considerare il dispositivo di figura 2.14a che, per il suo impiego nella misurazione della pressione atmosferica, è anche detto barometro. Preso un tubo chiuso ad un estremo e riempito di fluido, si pone il lato aperto in un recipiente contenente lo stesso fluido; si osserva allora che la colonna di fluido nel tubo scende fino ad un'altezza h dalla cui misura si può risalire al valore di pressione che insiste sulla superficie libera del fluido nel recipiente. In particolare se questa pressione è quella atmosferica ed il fluido manometrico è mercurio, in base alla (2.8) si ottiene:

$$p_{atm} = \rho_{Hg} g h + p_{Hg}, \tag{2.33}$$

[10]Questo in realtà è vero solo nel caso in cui siano assenti movimenti di beccheggio, per un corpo simmetrico rispetto al piano del foglio e per piccoli valori dell'angolo di rollio.

in cui p_{Hg} è la tensione di vapore del mercurio alla temperatura di esercizio. Data la bassa volatilità del mercurio si può porre $p_{Hg} \simeq 0$ da cui ne consegue il valore ben noto $h = 759\text{mm}$ [11].

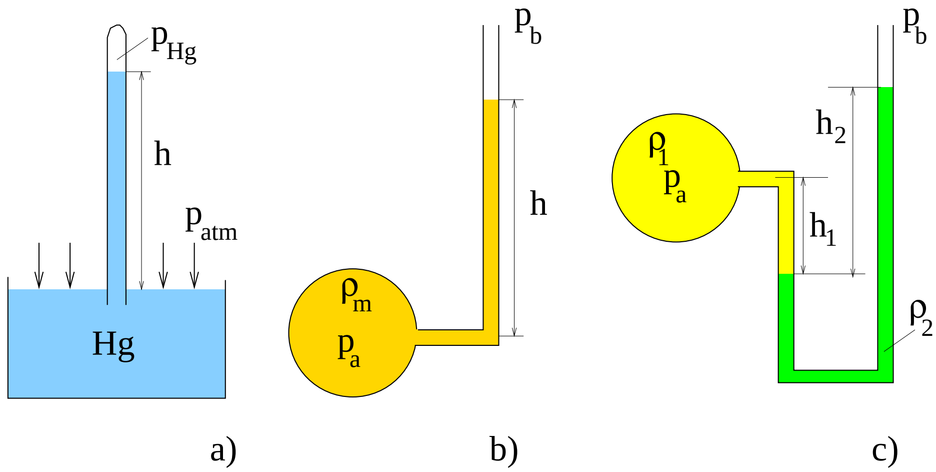


Figura 2.14: Schema di funzionamento di dispositivi per la misurazione della pressione: *a)* barometro, *b)* manometro, *c)* manometro ad U.

Il dispositivo in figura 2.14b è simile al precedente ma ha l'estremità del tubo aperto; dette quindi p_a e p_b le pressioni alle due estremità del tubo risulterà

$$p_a = \rho_m g h + p_b, \tag{2.34}$$

per cui si può misurare il valore della pressione p_b noti p_a ed h oppure la differenza di pressione $p_a - p_b$ conoscendo solamente h. Questo strumento pur essendo molto semplice ha notevoli limitazioni che ne rendono l'uso abbastanza limitato. Innanzi tutto il fluido manometrico ed il fluido di cui bisogna misurare la pressione devono essere immiscibili, il fluido nel tubo deve essere un liquido e la pressione p_b non può scendere al di sotto di un valore limite se si vuole evitare la fuoriuscita del fluido manometrico dal tubo.

Lo strumento riportato in figura 2.14c risolve alcuni dei problemi appena citati. Se infatti il tubo ha la forma di U e tra il fluido a densità ρ_1 e quello ambiente viene inserito un terzo fluido a densità ρ_2 non è più necessario che i primi due fluidi siano immiscibili. Inoltre dall'equilibrio delle pressioni si ha:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + p_b, \tag{2.35}$$

da cui si vede che la massima differenza di pressione $p_a - p_b$ non dipende più ora solamente dalla lunghezza del tubo ma anche dal valore di ρ_2 che può essere quindi variato per aumentare la sensibilità o la portata dello strumento.

[11] Questa esperienza fu effettuata per la prima volta da Evangelista Torricelli (1608–1647) che fu allievo di Galileo Galilei. La descrizione del dispositivo e dell'esperimento sono contenute in 'Lezioni Accademiche' in cui sono riportate una serie di conferenze tenute da Torricelli all'Accademia della Crusca.

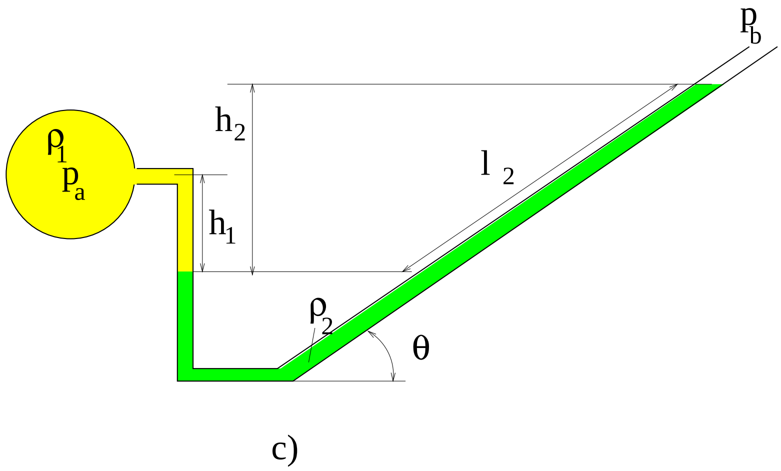


Figura 2.15: Schema di funzionamento del manometro inclinato.

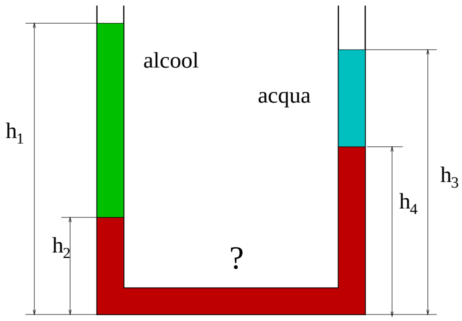
Dagli esempi precedenti è evidente che il principio di funzionamento di tutti i manometri discussi si riduce alla conversione di una lunghezza h in un valore di pressione una volta nota la densità del fluido manometrico ρ_m. Dalla relazione $\Delta p = \rho_m g h$ si vede quindi che per aumentare la sensibilità del manometro bisogna rendere massima h a parità di Δp. A prima vista sembrerebbe che si possa agire solo su ρ_m, cercando cioè dei fluidi manometrici con bassa densità (alcool, benzina); ad un esame più attento, tuttavia si nota che h è la lunghezza della colonna di fluido nella direzione di g e se quindi si inclina il tubo si ottengono valori assoluti di lunghezza l che possono crescere a piacimento diminuendo l'inclinazione del tubo. In figura 2.15 è raffigurato uno di tali dispositivi dal cui equilibrio delle pressioni si ha:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g l_2 \sin\theta + p_b. \tag{2.36}$$

I misuratori descritti in questa sezione hanno il vantaggio di essere estremamente semplici ed economici ma non permettono la lettura di valori precisi, non consentono di misurare pressioni elevate e, a causa dell'inerzia della colonna di fluido, non sono adatti a misure di pressioni rapidamente variabili nel tempo. Per questo motivo nelle applicazioni pratiche vengono usati dei manometri il cui principio di funzionamento è la deformazione di una superficie a causa delle forze di pressione comunicate dal fluido. Nel caso dei manometri meccanici questa superficie è generalmente una membrana che costituisce la parete di una camera stagna all'interno della quale c'e' una pressione nota. Nel caso dei trasduttori elettronici, si sfrutta invece l'effetto piezoelettrico, la proprietà cioè che hanno alcuni cristalli (per esempio il quarzo) di generare una differenza di potenziale quando sottoposti a compressione in alcune particolari direzioni. Dalla lettura di questa differenza di potenziale si risale quindi alla pressione per mezzo di un'operazione di taratura dello strumento con delle pressioni note.

ESEMPIO

Dato il dispositivo in figura, calcolare la densità del fluido incognito. Come cambierebbero i livelli se tale dispositivo fosse trasportato sulla luna?



$h_1 = 40$ cm $\quad h_2 = 16$ cm $\quad h_3 = 32$ cm

$h_4 = 21$ cm $\quad \rho_{\text{acqua}} = 1000$ Kg/m^3 $\quad \rho_{\text{alcool}} = 780$ Kg/m^3

Soluzione

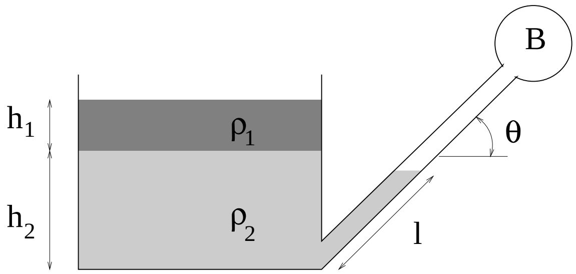
Per l'equilibrio deve risultare:

$$g\rho_{\text{alcool}}(h_1 - h_2) + g\rho h_2 = \rho_{\text{acqua}}(h_3 - h_4) + g\rho h_4,$$

poiché il termine g si semplifica a primo e secondo membro, la configurazione di equilibrio e' indipendente dal valore della gravità e quindi sulla luna non cambierebbe nulla. Dalla relazione precedente si può calcolare ρ ottenendo $\rho =$ 1544 Kg/m^3.

ESEMPIO

Dato il dispositivo in figura calcolare l'angolo θ in modo da avere all'equilibrio nel tubo inclinato una colonna di fluido di lunghezza l.



$h_1 = 22$ cm $\quad h_2 = 86$ cm
$\rho_1 = 10870$ Kg/m^3 $\quad \rho_2 = 11030$ Kg/m^3
$p_B = 1.7$ atm $\quad l = 0.6$ m

Soluzione

Dall'equilibrio delle pressioni tra la superficie libera ed il punto B si scrive

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = l \sin\theta \rho_2 g + p_b$$

da cui si ricava

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{p_0 + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) - p_B}{l\rho_2 g}\right) = 44^o.62.$$

Capitolo 3

Cinematica dei fluidi

In questo contesto verrano definite alcune proprietà del moto di un fluido come posizione, velocità ed accelerazione indipendentemente dalle forze necessarie a generare il moto; ci occuperemo quindi della cinematica dei fluidi che riveste un'importanza fondamentale oltre che per la descrizione di un flusso anche per la sua visualizzazione sia in un esperimento di laboratorio che in una simulazione numerica.

3.1 descrizione lagrangiana ed euleriana

Quando si analizza il moto di un solido si considera solitamente il moto del suo baricentro ed il suo orientamento (angoli di Eulero) descrivendo la loro evoluzione nel tempo. La descrizione del moto di un fluido risulta in qualche modo più ambigua in quanto il sistema è composto da particelle [1] fluide in continuo moto relativo e la sola informazione sul baricentro e sugli angoli di Eulero non sono sufficienti a caratterizzare la distribuzione del fluido nello spazio. Si pongono a questo punto due alternative, la prima consiste nel seguire il moto di tutte le particelle fluide nel tempo mantenendo separata la loro identità mentre nella seconda si descrive il moto del fluido considerando dei punti fissi nello spazio indipendentemente dalle particelle che li attraversano.

Per esempio, quando si seguono le evoluzioni di una rondine nel cielo si sta adottando un punto di vista lagrangiano in quanto si fissa ad un certo istante un oggetto e lo si segue nel tempo. Al contrario, se si osserva il mare attraverso un foro nel ghiaccio praticato dagli eschimesi per la pesca, la descrizione risulta euleriana considerando che si dispone di un punto di osservazione fisso nello spazio attraverso cui passano in continuazione differenti particelle di fluido.

Per chiarire meglio consideriamo la figura 3.1 in cui viene raffigurato il moto di due particelle fluide A e B; secondo il primo punto di vista, la descrizione del moto consiste

[1] Il concetto di 'particella fluida' non deve essere in alcun modo confuso con quello di atomo o molecola. La particella fluida infatti è un'astrazione concettuale che indica un'insieme abbastanza grande di molecole di fluido da poter considerare valide le ipotesi di continuo ma allo stesso tempo la particella deve avere un'estensione in volume piccola abbastanza da essere caratterizzata da un'unico valore di velocità accelerazione, pressione, etc.

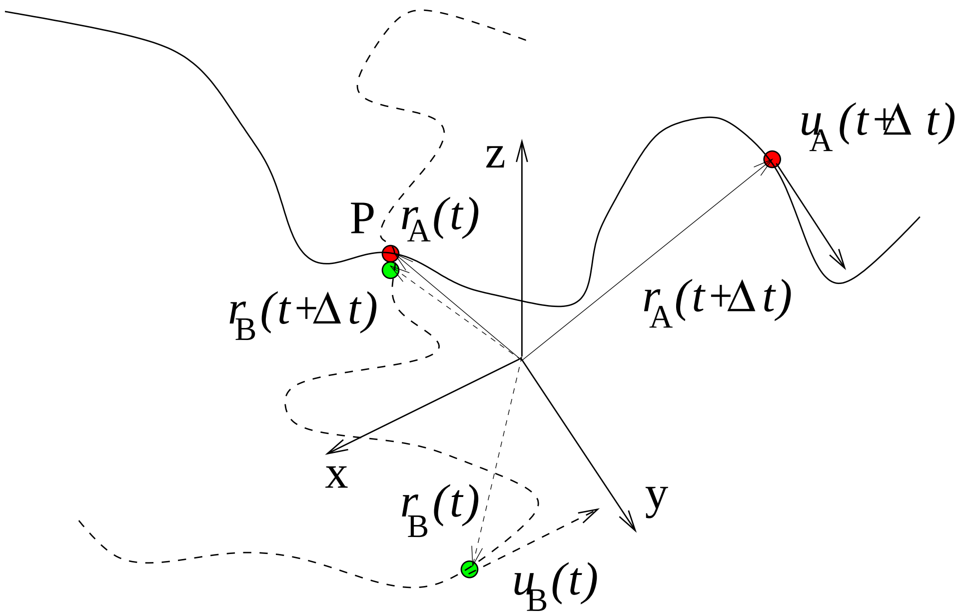


Figura 3.1: Traiettorie lagrangiane per due particelle fluide A e B e descrizione euleriana nel punto P.

nel descrivere tutte le funzioni $\mathbf{r}_A(t)$, $\mathbf{r}_B(t)$, ... per tutte le particelle fluide del sistema in esame. Nel secondo caso, al contrario si considera ogni punto P fisso nello spazio e si descrive la variazione nel tempo delle grandezze. In particolare dalla figura 3.1 si nota che la particella A passa per P al tempo t mentre la particella B ci passa al tempo $t + \Delta t$ risultando $\mathbf{u}_P(t) = \mathbf{u}_A(t)$ e $\mathbf{u}_P(t + \Delta t) = \mathbf{u}_B(t + \Delta t)$.

La descrizione del moto delle singole particelle fluide viene detta *descrizione lagrangiana* mentre l'altra *descrizione euleriana*. Generalmente, essendo impossibile identificare le singole particelle fluide in un flusso, la descrizione lagrangiana non viene praticamente mai utilizzata anche se dal punto di vista teorico ha il vantaggio di fornire delle espressioni di più immediata comprensione per molte grandezze fluidodinamiche.

3.2 traiettorie, linee di corrente e streaklines

Nella sezione precedente abbiamo parlato di traiettoria di una particella fluida senza tuttavia darne una definizione rigorosa; ciò è importante in quanto vedremo che in un flusso si possono definire diverse 'linee', in generale non coincidenti, ognuna delle quali con un diverso significato.

Possiamo definire la traiettoria di una particella fluida come il luogo geometrico dei punti occupati dalla stessa particella in istanti di tempo successivi. Riferendoci alla figura 3.1 si ha quindi che le linee solida e tratteggiata sono rispettivamente le traiettorie delle particelle fluide A e B. È evidente come il concetto di traiettoria sia lagrangiano in quanto legato all'identificazione ed al tracciamento di particelle singole.

Definiamo invece linea di corrente una linea che sia in ogni punto tangente al vettore locale di velocità. Se quest'ultima avrà un'evoluzione non stazionaria, le linee di corrente saranno evidentemente diverse da istante ad istante. Un esempio di linee di corrente in due diversi istanti temporali è riportato in figura 3.2 dove si può notare che nei punti di intersezione tra le linee le tangenti sono diverse in quanto la velocità è funzione del tempo. Il concetto di linea di corrente è evidentemente un concetto euleriano in quanto considera per ogni istante temporale la distribuzione spaziale di velocità e, fissato un insieme di punti, traccia la linea tangente al vettore velocità nei punti considerati. In ogni punto per istanti differenti transiteranno particelle fluide diverse quindi in generale le traiettorie intersecheranno le linee di corrente.

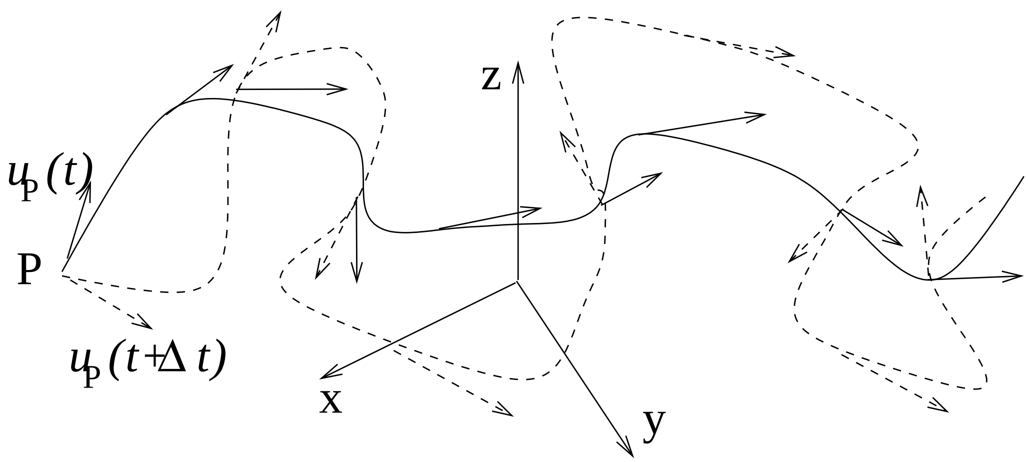


Figura 3.2: Linee di corrente in due diversi istanti di tempo.

La definizione delle streaklines (talvolta tradotte in italiano come 'linee di fumo') è invece un concetto che riguarda principalmente gli esperimenti di laboratorio. Si definisce infatti una streakline come il luogo dei punti occupato ad una dato istante da tutte le particelle fluide che in un istante precedente siano transitate per una posizione stabilita. Questo concetto è particolarmente utile quando si considerano le visualizzazioni di laboratorio in quanto in questi casi si rilascia un tracciante (fumo, inchiostro, etc.) nel flusso da una posizione prefissata e si segue la traccia lasciata da questa emissione continua nello spazio. Nella figura 3.3 si vede come dalla sorgente S vengano rilasciate delle particelle fluide P per tempi successivi $t_6 > t_5 > ..... > t_0$ il cui luogo dei punti forma appunto le streakline.

Da questo esempio si vede come la definizione di streakline sia essenzialmente operativa e, a meno di casi speciali, queste linee non hanno un particolare significato fisico. Il vasto utilizzo delle streaklines in campo sperimentale è dovuto al fatto che se il flusso risulta stazionario (ossia se la la velocità in ogni punto risulta indipendente dal tempo) le streaklines coincidono sia con le traiettorie che con le linee di corrente. In questo caso le streaklines costituiscono un modo estremamente pratico ed economico per conoscere la

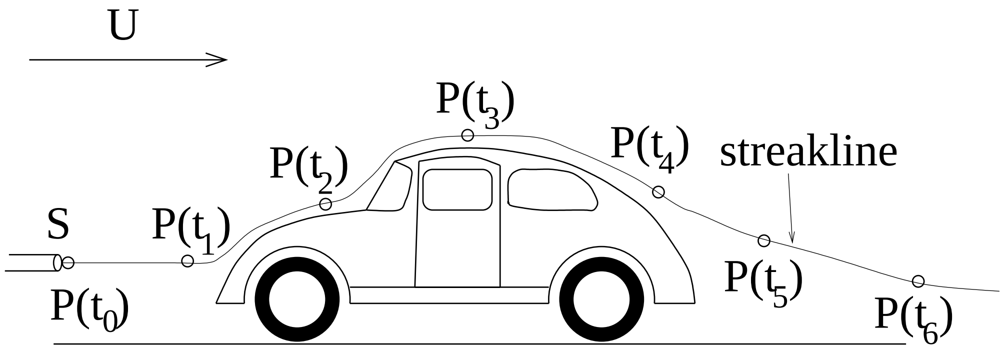


Figura 3.3: Esempio di streakline.

direzione del vettore velocità in ogni punto e la traiettoria delle particelle fluide (figure 3.4, 3.5).

Figura 3.4: Esempio di streaklines intorno ad un modello di camion in un tunnel ad acqua.

Per ottenere un'espressione matematica per le varie linee descritte riconsideriamo le loro definizioni: per le traiettorie abbiamo che presa una particella questa si muoverà con la propria velocità che sarà in generale funzione dello spazio e del tempo potendo così scrivere

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \tag{3.1}$$

L'integrazione di questa espressione fornirà quindi il valore di $\mathbf{r}(t)$ che dipenderà dal suo valore iniziale $\mathbf{r}(0)$, se quindi la particella fluida n–esima si trova a passare nella posizione $\mathbf{r}(0)$ al tempo $t = 0$ allora la curva $\mathbf{r}(t)$ descriverà la traiettoria della particella n.

Le linee di corrente sono invece definite come quelle linee in ogni punto tangenti al

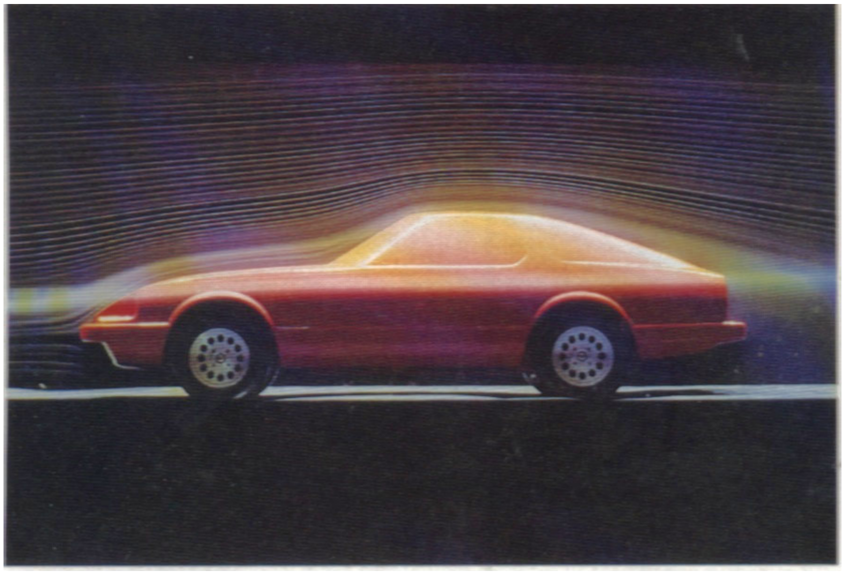


Figura 3.5: Esempio di streaklines intorno ad un modello di automobile in una galleria del vento.

vettore velocità e questo si può esprimere matematicamente nella forma

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mid \mathrm{d}\mathbf{r} \mid} = \frac{\mathbf{u}}{\mid \mathbf{u} \mid}, \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{u(\mathbf{r},t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(\mathbf{r},t)} = \frac{\mathrm{d}z}{w(\mathbf{r},t)} \tag{3.2}$$

in cui, rispettivamente $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}z$ sono le componenti cartesiane di $\mathrm{d}\mathbf{r}$ e u, v e w le componenti di $\mathbf{u}$.

La definizione matematica delle streaklines è più macchinosa in quanto risulta essere il luogo geometrico di tutte le posizioni $\mathbf{r}_i(t)$ delle particelle i che per un tempo $t_i \leq t$ sono transitate per una posizione $\mathbf{r}_0$: si tratta quindi di definire caso per caso, a seconda del campo di velocità, tale luogo geometrico e descriverlo in forma parametrica $\mathbf{r}(l)$ (essendo l il parametro) per ogni tempo t.

3.3 derivata materiale

Consideriamo la traiettoria della particella tracciata in figura 3.6 osservando che al tempo t occupa la posizione $\mathbf{r}(t)$ mentre al tempo $t + \Delta t$ si trova in $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Volendo quindi calcolare la velocità e l'accelerazione della particella al tempo t basta utilizzare le definizioni

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}, \qquad \mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

In figura 3.6 queste quantità sono state calcolate per via grafica e si può notare che le velocità sono tangenti alla traiettoria mentre l'accelerazione ha una componente centripeta dovuta alla curvatura ed una componente tangenziale causata dall'aumento di velocità lungo la traiettoria. È bene notare che le definizioni date sono delle definizioni lagrangiane in quanto seguono le variazioni di una particella fluida lungo la sua traiettoria. Abbiamo comunque accennato che in fluidodinamica risulta più utile la descrizione euleriana, vogliamo quindi vedere come si passa da una descrizione all'altra per le grandezze considerate.

Per quanto riguarda la posizione $\mathbf{r}(t)$ non esiste chiaramente una controparte nella descrizione euleriana in quanto in questo caso non ci sono particelle da seguire ma piuttosto delle 'stazioni di osservazione' fisse nel tempo.

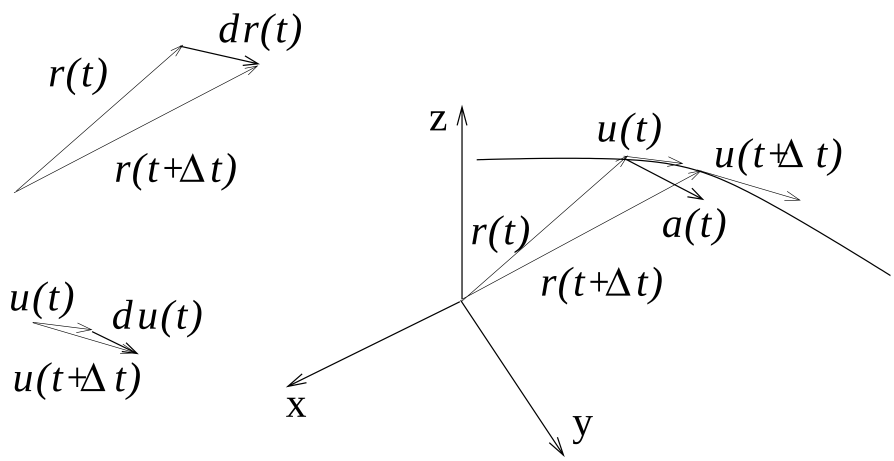


Figura 3.6: Posizione, velocità ed accelerazione lungo la traiettoria di una particella fluida.

La velocità sarà invece definita in modo analogo nei due casi anche se il loro significato fisico è sostanzialmente differente; nella descrizione lagrangiana, infatti, la velocità sarà solamente funzione del tempo ($\mathbf{u}(t)$) in quanto si tratta della velocità misurata da un osservatore 'a cavallo' sempre della stessa particella fluida durante il suo moto. Nella descrizione euleriana, al contrario la velocità è misurata in punti di osservazione fissi quindi il suo valore sarà funzione del tempo e della stazione di osservazione, ossia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Questa differenza può sembrare sottile ma in realtà cambia completamente il punto di vista del fenomeno e porta ad una profonda differenza nella definizione di accelerazione [2]. Volendo infatti definire quest'ultima grandezza da un punto di vista euleriano, bisogna considerare la variazione di velocità nel punto fisso $\mathbf{x}$ di una particella fluida la cui posizione al tempo t sia proprio $\mathbf{x}$. Questa particella avrà tuttavia una posizione $\mathbf{x}$ dipendente dal tempo per cui si avrà per l'accelerazione

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.4}$$

Osservando ora che $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$ è la velocità della particella che si trova in $\mathbf{x}$ al tempo t, e

[2] Ciò non deve far pensare che si tratti di concetti differenti, si tratta infatti solamente della stessa accelerazione valutata da riferimenti differenti.

quindi anche la velocità euleriana nel punto fisso $\mathbf{x}$, si ottiene dall'espressione precedente

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \tag{3.5}$$

in cui $D \bullet /Dt = \partial \bullet /\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \bullet$ è chiamato operatore di derivata materiale [3].

Per capire meglio quanto grandi siano le implicazioni di questa espressione, consideriamo un sistema di assi coordinati cartesiani ed indichiamo con a_x, a_y ed a_z le componenti di $\mathbf{a}$ e con u_x, u_y ed u_z quelle di $\mathbf{u}$. L'espressione (3.5) scritta per componenti risulterà quindi

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \tag{3.6}$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Risulta subito evidente che le componenti di accelerazione possono esistere anche nel caso di velocità indipendente dal tempo (flusso stazionario) in quanto la curvatura della traiettoria e la dipendenza della velocità da punto a punto nello spazio sono responsabili del termine $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ che è detto *accelerazione convettiva.* Questo risultato non è affatto sorprendente se ripensiamo al significato di $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ che è l'accelerazione di una particella fluida che al tempo t occupa la posizione $\mathbf{x}$; se questa particella si muovesse con velocità costante lungo una traiettoria circolare, questa dovrebbe possedere l'accelerazione centripeta prodotta dalla curvatura della traiettoria e questa accelerazione dovrebbe comparire anche nella descrizione euleriana.

L'altro risultato importante è che come si osserva dalle (3.6) nella componente di accelerazione a_x entrano anche le componenti di velocità in y e z e lo stesso accade per le altre direzioni; questo implica che le equazioni della fluidodinamica (che non sono altro che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ scritta per un fluido) sono accoppiate spazialmente, cioè non è possibile avere informazioni sull'evoluzione in una direzione senza conoscere ciò che accade nelle altre direzioni. L'ultima informazione che possiamo estrarre dalle (3.6) è che l'accelerazione è una funzione non lineare delle velocità (e tali risulteranno quindi le equazioni della fluidodinamica). Questo fatto costituisce la maggiore difficoltà alla soluzione dei problemi fluidodinamici come si vedrà nel seguito. Per il momento ci limiteremo a riferire che a meno di problemi estremamente semplificati o di condizioni del tutto particolari l'espressione dell'accelerazione rende impossibile la soluzione analitica delle equazioni del moto, limitando l'analisi di problemi complessi a soluzioni numeriche o esperimenti di laboratorio.

[3] La notazione $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ potrebbe sembrare inconsistente in quanto $\nabla \mathbf{u}$ è un tensore mentre $\mathbf{u}$ è un vettore ed il prodotto "righe per colonne" non sembrerebbe possibile. L'espressione precedente va invece intesa come $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ che è definito in modo corretto.

3.4 * accelerazione di Lagrange

In questa sezione mostreremo brevemente un'identità vettoriale che tornerà utile per gli argomenti trattati successivamente. Riprendiamo la formula (3.5) per l'accelerazione di una particella fluida

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \tag{3.7}$$

e notiamo che, detta $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ la vorticità sussiste l'identità

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \tag{3.8}$$

da cui si può scrivere

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \tag{3.9}$$

L'identità (3.8) può essere dimostrata come facile esercizio scrivendo $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{u}$ per componenti in un sistema d'assi cartesiano.

3.5 * funzione di corrente

Avendo definito le linee di corrente come quelle linee che sono in ogni punto tangenti al vettore velocità, risulta naturale introdurre la funzione di corrente come quella funzione le cui isolinee (in due dimensioni o isosuperfici in tre dimensioni) costituiscono le linee di corrente. Limitandoci per semplicità al caso bidimensionale si può porre dalla (3.2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y}, \Longrightarrow u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x = 0, \tag{3.10}$$

ottenendo che lungo una linea di corrente la quantità $u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x$ non varia. Se allora poniamo

$$\mathrm{d}\psi = u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x \tag{3.11}$$

avremo che nemmeno la funzione ψ varia lungo una linea di corrente che è quindi la funzione cercata.

La funzione di corrente risulta particolarmente utile quando si voglia determinare la portata in volume tra due punti. Considerato infatti l'esempio di figura 3.7 detto ds l'elemento di lunghezza del segmento che unisce il punto A con B si ha per la portata elementare $\mathrm{d}Q = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s = u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x$ che, in base alla (3.11) è proprio uguale a $\mathrm{d}\psi$. Per la portata tra A e B si avrà allora

$$Q = \int_A^B \mathrm{d}Q = \int_A^B (u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x) = \int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_B - \psi_A, \tag{3.12}$$

per cui se si conosce la funzione di corrente per un flusso, la differenza di ψ tra due punti qualunque ci fornice il valore della portata in volume (per unità di lunghezza nella direzione ortogonale al foglio) che passa tra i due punti. L'espressione (3.12) ci dice anche

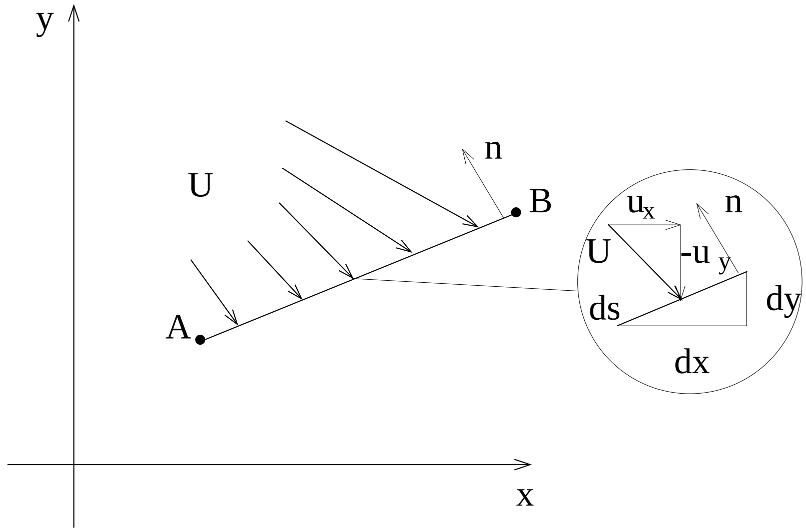


Figura 3.7: Determinazione della portata (in volume) tra due punti.

che questo valore della portata è indipendente dal percorso seguito per andare da A a B per cui dψ deve essere un differenziale esatto. Notiamo infine che nel caso in cui A e B vengano scelti su una linea di corrente allora risulterà $Q = 0$. Ciò è consistente con il fatto che un linea di corrente è sempre tangente al vettore velocità e quindi si comporta come una superficie impermeabile da cui il valore nullo di portata.

3.6 analisi del moto nell'intorno di un punto

3.6.1 caso bidimensionale semplificato

Concludiamo lo studio della cinematica dei fluidi, considerando lo stato di moto nell'intorno di un punto. Questa analisi ci permetterà di comprendere in che modo una particella fluida si deforma durante la sua evoluzione e renderà più semplice la definizione degli sforzi in un fluido quando se ne affronterà la dinamica.

Data una regione fluida inizialmente di forma rettangolare, immaginiamo che dopo un intervallo di tempo Δt sia stata deformata dal campo di velocità come in figura 3.8. Osserviamo dalla figura 3.9 che la deformazione totale può essere decomposta in tre moti elementari che verranno ora illustrati.

Il primo consiste in una traslazione rigida in cui tutta la regione si muove con la stessa velocità $\mathbf{u}_0$ uniforme nello spazio. Il secondo moto è una dilatazione pura in cui l'elemento fluido subisce una variazione di lunghezza dei suoi lati, senza tuttavia ruotare ne variare l'angolo tra i lati del rettangolo. Detta l_x la lunghezza in x dell'elemento indeformato ed l'_x la lunghezza dello stesso lato dopo la deformazione si avrà

$$l'_x = l_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} l_x \Delta t, \tag{3.13}$$

da cui si ricava per la velocità relativa di dilatazione $\dot{\epsilon}_x$ in x

$$\dot{\epsilon}_x = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{1}{l_x} \frac{\Delta l_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{l'_x - l_x}{l_x \Delta t} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \tag{3.14}$$

Un'espressione del tutto analoga si ricava per la direzione y.

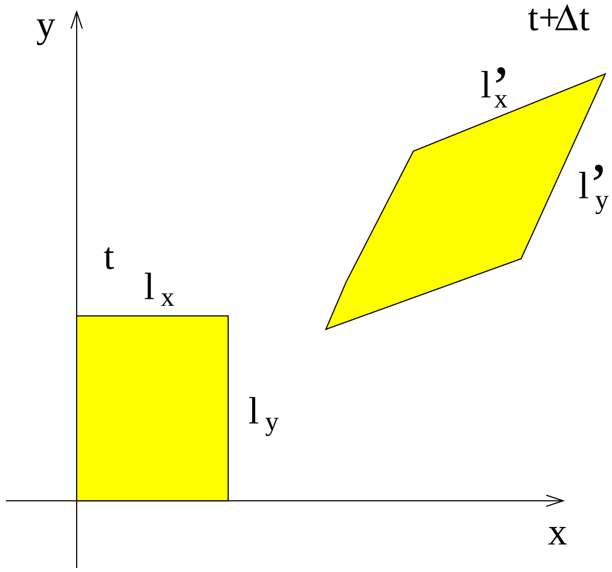


Figura 3.8: Deformazione di un elemento fluido in un tempo Δt.

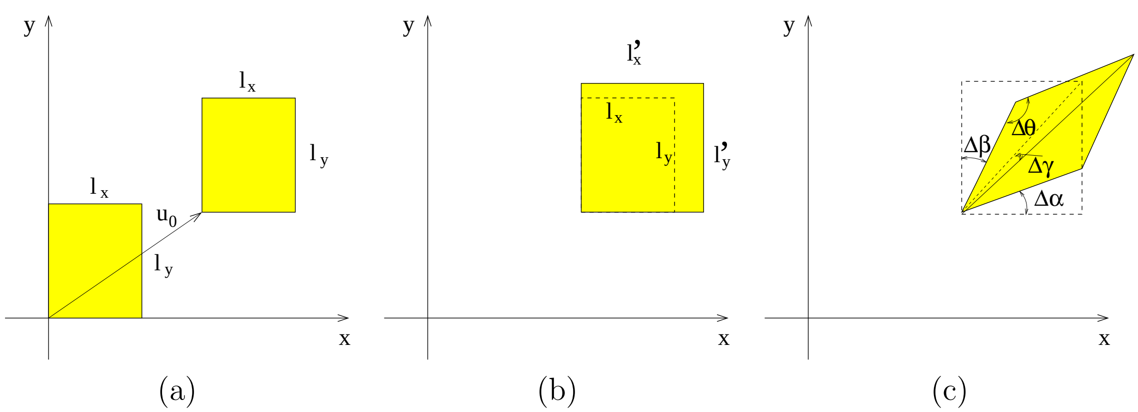


Figura 3.9: Decomposizione della deformazione di un elemento fluido in moti elementari.

Il terzo moto consiste contemporaneamente in una rotazione rigida ed una deformazione angolare che possono essere quantificate calcolando gli angoli $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ di cui ruotano, rispettivamente, i lati l_x ed l_y nel loro moto. Utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine si ha

$$\Delta\alpha \simeq \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{l_x \Delta t}{l_x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta t, \qquad \Delta\beta \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta t. \tag{3.15}$$

Per calcolare la velocità di deformazione angolare si osserva semplicemente che risulta $\Delta\theta = \pi/2 + \Delta\alpha + \Delta\beta$ da cui si può porre

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{3.16}$$

Per la velocità di rotazione rigida, da considerazioni geometriche si ottiene $\Delta\gamma = \Delta\alpha + \pi/2 - \Delta\theta/2 = \pi/4 + (\Delta\alpha + \Delta\beta)/2$ da cui si ha per la velocità di rotazione

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{3.17}$$

D'altra parte, dallo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine si può scrivere per la velocità lungo x

$$u_x = u_{x0} + \frac{\partial u_x}{\partial x}x + \frac{\partial u_x}{\partial y}y, \tag{3.18}$$

che contiene i termini precedentemente identificati quanto si riscriva nella forma

$$u_x = u_{x0} + \frac{\partial u_x}{\partial x}x + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)y = \tag{3.19}$$

$$u_{x0} + \frac{\partial u_x}{\partial x}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)y.$$

Con passaggi analoghi si ottiene per la componente y di velocità

$$u_y = u_{y0} + \frac{\partial u_y}{\partial y}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)x. \tag{3.20}$$

Le espressioni (3.19) e (1.2) possono essere unificate nell'espressione vettoriale

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

che, considerando le (3.14), (3.16) e (3.17) assume la forma:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\theta}/2 \\ \dot{\theta}/2 & \dot{\epsilon}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Quest'ultima espressione mette in evidenza che lo stato di moto nell'intorno di un punto è dato da una traslazione rigida, una rotazione rigida descritta da un tensore antisimmetrico ed una dilatazione lineare con una deformazione angolare descritte da un tensore simmetrico. Questi due tensori sono, rispettivamente, la parte simmetrica ed antisimmetrica del tensore gradiente di velocità.

Una visualizzazione sperimentale della deformazione di particelle fluide è riportata in figura 3.10 dove viene evidenziata una deformazione più consistende delle particelle vicine alle pareti a causa dei gradienti di velocità prodotti dall'aderenza del fluido alla parete (strato limite).

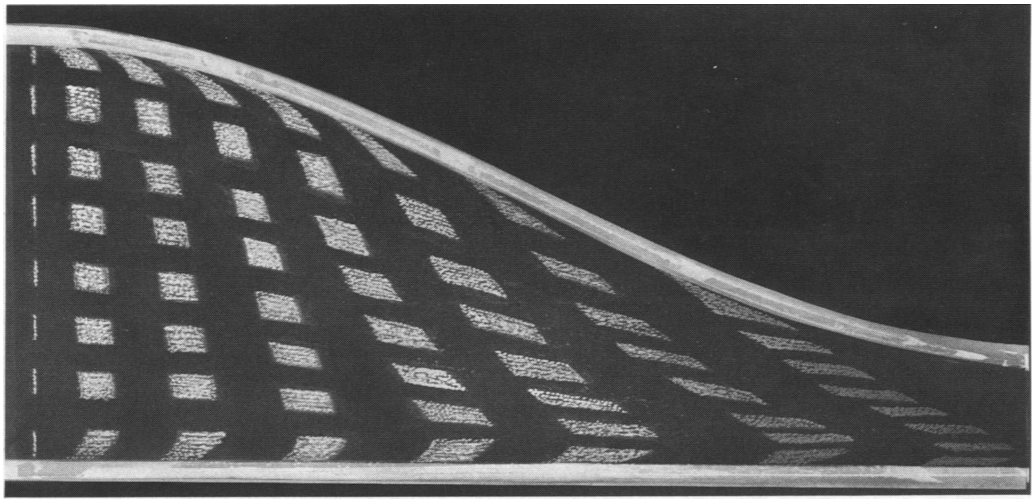


Figura 3.10: Deformazione di elementi di fluido (marcati con un tracciante) durante il loro moto all'interno di un canale convergente.

3.6.2 * caso generale tridimensionale

Più in generale le stesse conclusioni si ottengono per il caso tridimensionale considerando una particella fluida il cui baricentro al tempo t coincida con l'origine di un sistema di assi cartesiani ed immaginiamo che dopo un tempo Δt la stessa particella si sia portata in una posizione P sufficientemente vicina da poter ritenere accurato uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine. Detto allora $\mathbf{x}$ lo spostamento della particella nel tempo Δt si potrà scrivere

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \nabla \mathbf{u} \mid_O \cdot \mathbf{x} + \mathcal{O}(\mathbf{x}^2), \tag{3.23}$$

in cui $|_O$ sta ad indicare che il gradiente $\nabla \mathbf{u}$ è valutato nel punto O [4].

Essendo $\mathbf{u}$ un vettore, il termine $\nabla \mathbf{u}$ sarà un tensore che si può quindi decomporre in una parte simmetrica ed una antisimmetrica

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T\right) = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}, \tag{3.24}$$

da cui, trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ottiene dalle espressioni precedenti

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x}. \tag{3.25}$$

Poichè $\mathbf{\Omega}$ è un tensore a traccia nulla ed antisimmetrico si può vedere che $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x}$ è un termine di rotazione rigida e, introdotta la vorticità come il rotore del campo di velocità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ risulta identicamente

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \tag{3.26}$$

[4] Bisogna notare che $\nabla \mathbf{u}$ è un tensore ed il temine $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$, indicando il prodotto scalare tra un tensore ed un vettore fornisce come risultato un vettore. È consuetudine in fluidodinamica indicare il prodotto scalare tra un tensore ed un vettore con il simbolo "·" al contrario della meccanica dei solidi dove tale operazione è denotata con $\nabla \mathbf{u}\, \mathbf{x}$. Le due notazioni tuttavia indicano di fatto la stessa operazione.

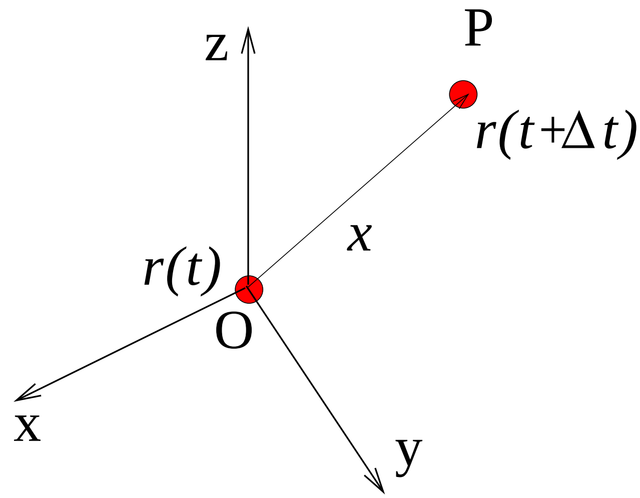


Figura 3.11: Spostamento di una particella fluida in un tempo Δt.

Per il temine $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$ si dimostra invece che si tratta di una deformazione pura: ciò è particolarmente semplice osservando che essendo $\mathbf{E}$ un tensore simmetrico i suoi autovalori saranno reali. Ponendosi quindi nella terna principale formata dagli autovettori di $\mathbf{E}$ questo tensore diventa diagonale ed i termini della diagonale sono gli autovalori stessi. Se indichiamo quindi con x', y' e z' le componenti del vettore $\mathbf{x}$ nella terna principale risulterà $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 x' \hat{x'} + \lambda_2 y' \hat{y'} + \lambda_3 z' \hat{z'}$, dove λ_1, λ_2 e λ_3 sono gli autovalori di $\mathbf{E}$. In base a questa espressione, se quindi un punto si trova inizialmente su uno dei tre assi, esso vi rimarrà indefinitamente confermando che il tensore $\mathbf{E}$ produce un moto di deformazione pura.

In conclusione possiamo quindi affermare che lo stato di moto nell'intorno di un punto può essere descritto nel seguente modo

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \tag{3.27}$$

in cui $\mathbf{u}_O$ è una velocità di traslazione pura, il secondo termine costituisce una rotazione rigida con velocità angolare $\mid \boldsymbol{\omega} \mid /2$ mentre il terzo termine è una deformazione pura.

Si considereranno ora dei semplici campi di moto per mostrare in dettaglio la natura dei termini appena descritti. In figura 3.12a è riportato l'esempio di una rotazione pura con velocità angolare Ω costante intorno all'asse z da cui risulta $\theta = \Omega t$ e quindi

$$x = r\cos\theta = r\cos(\Omega t), \Longrightarrow u_x = \dot{x} = -r\Omega\sin(\Omega t) = -\Omega y, \tag{3.28}$$

$$y = r\sin\theta = r\sin(\Omega t), \Longrightarrow u_y = \dot{y} = -r\Omega\cos(\Omega t) = \Omega x,$$

mentre la componente di velocità lungo z è sempre nulla ($u_z = 0$). Se ora calcoliamo gli elementi E_{ij} ed Ω_{ij} (con $i, j = x, y, z$) dei tensori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{\Omega}$ in base alle definizioni (3.24) risulterà (ponendo $x_x = x$, $x_y = y$ ed $x_z = z$):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \equiv 0, \tag{3.29}$$

$$\Omega_{yx} = -\Omega_{xy} = \Omega, \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0, \text{ per } ij \neq xy, yx, \tag{3.30}$$

da cui si può confermare che un campo di rotazione pura ha tutti gli elementi di $\mathbf{E}$ nulli mentre il tensore antisimmetrico $\boldsymbol{\Omega}$ risulta diverso dal tensore nullo.

Se infine dalla definizione $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ si calcola la vorticità si ottiene

$$\omega_x = \omega_y \equiv 0, \qquad \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x j}{\partial y} = 2\Omega \tag{3.31}$$

da cui si vede che in una rotazione rigida la vorticità è un vettore con stessa direzione e verso del vettore rotazione e modulo doppio.

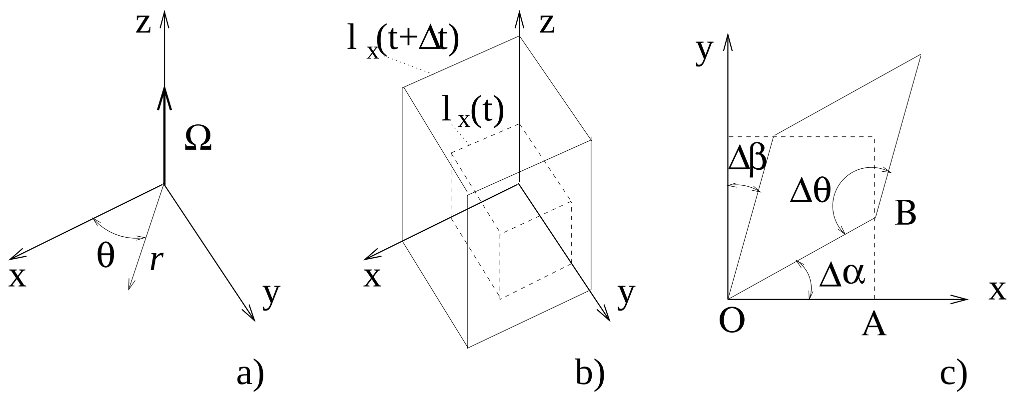


Figura 3.12: Esempi di moto nell'intorno di un punto per una particella fluida: *a)* rotazione pura, *b)* dilatazione pura, *c)* deformazione angolare pura.

Nella figura 3.12b è rappresentato un esempio di dilatazione pura, un moto cioè in cui non c'è nè rotazione nè deformazione angolare. In questo caso si ha banalmente che, poiché le superfici inizialmente complanari con i piani coordinati rimarranno tali indefinitamente, le componenti di velocità (per esempio u_x) devono risultare costanti o al più dipendere dalla sola coordinata corrispondente (x), risultando così $u_i = u_{i0} + a_i x_i$, $i = x, y, z$. In particolare nell'esempio di figura 3.12b si nota che il vertice del parallelepipedo inizialmente nell'origine degli assi rimane nell'origine anche dopo un tempo Δt il che implica $u_{i0} = 0$, $i = x, y, z$ e quindi

$$u_x = a_x x, \qquad u_y = a_y y, \quad \text{e} \quad u_z = a_z z. \tag{3.32}$$

Da queste espressioni per le componenti di velocità si ricava che $\Omega_{ij} \equiv 0$ o in modo equivalente $\omega_i \equiv 0$. Per il tensore velocità di deformazione risulta invece $E_{ij} = 0$ per $i \neq j$ e $E_{ii} = a_i$ da cui si vede che in assenza di deformazione angolare i termini fuori diagonale del tensore $\mathbf{E}$ sono nulli [5].

[5] Chiaramente l'assenza di deformazione angolare dipende dal sistema di riferimento nel quale viene descritto il moto. Se per esempio lo stesso problema venisse descritto in un sistema di riferimento con gli assi coincidenti con le diagonali del parallelepipedo, allora il tensore $\mathbf{E}$ perderebbe la sua struttura diagonale. In generale si può dire che $\mathbf{E}$ risulta diagonale solo quando il sistema di riferimento coincide con la terna principale, caso al quale è sempre possibile ricondursi data la simmetria del tensore $\mathbf{E}$.

Se infine indichiamo con $l_i(t)$ la lunghezza dei lati del parallelepipedo al tempo t possiamo calcolare il volume del solido $V(t) = l_x(t)l_y(t)l_z(t)$. Al tempo $t + \Delta t$ si avrà invece

$$l_i(t + \Delta t) = l_i(t) + u_i(l_i)\Delta t = l_i(t) + a_i l_i(t)\Delta t \tag{3.33}$$

da cui si può scrivere per il volume al tempo $t + \Delta t$

$$V(t + \Delta t) = l_x(t + \Delta t)l_y(t + \Delta t)l_z(t + \Delta t) = \tag{3.34}$$

$$(l_x + a_x l_x \Delta t)(l_y + a_y l_y \Delta t)(l_z + a_z l_z \Delta t) =$$

$$= l_x l_y l_z + (a_x + a_y + a_z)l_x l_y l_z \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \approx V(t) + (a_x + a_y + a_z)V(t)\Delta t,$$

da cui si ricava che la variazione relativa di volume nell'unità di tempo è proprio pari alla traccia di $\mathbf{E}$

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta t} = a_x + a_y + a_z = \nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{3.35}$$

essendo l'ultimo termine la divergenza del campo di velocità definita come $\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z$.

Riassumendo i risultati principali di questo esempio abbiamo trovato che in un moto di dilatazione pura, il tensore velocità di rotazione $\mathbf{\Omega}$ ha tutti i termini nulli mentre nel tensore velocità di deformazione $\mathbf{E}$ sono nulli solo gli elementi fuori dalla diagonale che rappresentano quindi una velocità di deformazione angolare. Per i termini sulla diagonale di $\mathbf{E}$ abbiamo invece visto che sono diversi da 0 e sono esattamente uguali alle variazioni di velocità lineare lungo gli assi (a_i). La somma di tutti i termini sulla diagonale, infine, è la traccia del tensore $\mathbf{E}$ e ci fornisce la variazione relativa nell'unità di tempo del volume considerato che è pari alla divergenza del campo di velocità. Se come caso particolare si considerasse un flusso incomprimibile il volume di un suo qualunque elemento deve rimanere costante nel tempo e quindi in base alla (3.35) deve risultare $a_x + a_y + a_z = 0$ da cui si vede che le a_i non possono avere tutte lo stesso segno. Da un punto di vista fisico ciò implica che se due lati si dilatano il terzo si deve accorciare o viceversa. Sempre dalla (3.35) si nota che l'incomprimibilità implica $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$; questa relazione costituisce l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale per i flussi incomprimibili come verrà ritrovato per altra via nei capitoli successivi.

Per completare il quadro delle possibilità ci rimane da considerare il caso di figura 3.12c in cui il campo di moto induce una pura deformazione angolare. Se immaginiamo che inizialmente la forma dell'elemento fluido fosse rettangolare mentre dopo un tempo Δt l'elemento si è deformato in un rombo si può allora scrivere utilizzando degli sviluppi in serie di Taylor per le velocità (troncati al primo ordine):

$$\Delta\alpha \approx \tan(\Delta\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{\partial u_y}{\partial x} OA \Delta t \frac{1}{OA} = \frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta t, \tag{3.36}$$

e analogamente

$$\Delta\beta \approx \tan(\Delta\beta) = \frac{\partial u_x}{\partial y}\Delta t.$$

Da semplici considerazioni geometriche sulla figura 3.12c risulta inoltre $\Delta\theta = \pi/2 + \Delta\alpha + \Delta\beta$ per cui possiamo scrivere per la velocità di deformazione angolare

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha + \Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2E_{xy} = 2E_{yx}. \tag{3.37}$$

Per tutti gli altri elementi di $\mathbf{E}$ si ha invece $E_{ij} = 0$ così come risulta $\Omega_{ij} \equiv 0$, confermando quindi che gli elementi fuori diagonale di $\mathbf{E}$ sono legati alla velocità di deformazione angolare dell'elemento fluido. In particolare E_{ij} è pari al doppio della velocità di deformazione angolare misurata con i lati inizialmente paralleli agli assi i e j.