

# Capitolo 10

## \* Turbolenza

### 10.1 fenomenologia della turbolenza

L'osservazione di flussi turbolenti è un'esperienza quotidiana che identifichiamo con il moto non stazionario, irregolare ed apparentemente caotico di un fluido. Le volute formate dal fumo di una sigaretta nel suo moto ascensionale, il miscelamento tra latte e caffè all'interno di una tazza o la scia irregolare di un fiume a valle del pilone di un ponte sono solo alcuni esempi tra un'innumerabile quantità.

Sebbene il concetto di turbolenza sia abbastanza chiaro per ognuno di noi, non è altrettanto chiaro l'effetto che ha la turbolenza sulle caratteristiche globali di un flusso.

Si consideri, per esempio l'accensione di una sigaretta all'interno di una stanza; è esperienza comune che dopo pochi secondi la presenza del fumo può essere avvertita in tutta la stanza, indicando che il fumo ha “diffuso” ovunque. Un'interpretazione ingenua potrebbe indurre a pensare che la diffusione sia la causa di questo fenomeno ma una stima delle scale temporali esclude inequivocabilmente questo fattore. Detta infatti  $\nu$  la viscosità cinematica dell'aria ed  $L$  la distanza percorsa dal fumo, il tempo impiegato dal fumo per percorrere tale lunghezza risulta  $T_\nu = L^2/\nu$  che, utilizzando i parametri dell'aria ed ipotizzando  $L = 4\text{m}$  fornisce  $T_\nu \simeq 1.07 \cdot 10^6\text{s}$  (circa 12 giorni)! In realtà il tempo risulterebbe ancora maggiore in quanto per tale calcolo non bisognerebbe considerare  $\nu$  che dà la diffusività della quantità di moto ma la diffusività  $\kappa$  del fumo in aria; potendo porre  $\kappa = \nu Sc$  (essendo  $Sc$  il numero di Schmidt che vale circa  $Sc = 0.7$  per l'aria) si otterrebbe  $T_\nu \simeq 17.7\text{giorni}$ .

Si potrebbe comunque osservare che poiché il fumo di sigaretta è più caldo dell'aria circostante, la convezione naturale ha un ruolo rilevante nella diffusione del fumo. Una stima dimensionale, tuttavia fornisce delle velocità dell'ordine dei cm/s che, combinata con l'osservazione che il fumo caldo sale verso l'alto e non si propaga orizzontalmente, porta comunque a dei tempi di ore in netto contrasto, con l'esperienza quotidiana.

La ragione della discrepanza tra l'esperienza pratica e le due stime quantitative è che in entrambi i casi, si è trascurata la presenza della turbolenza. Le fluttuazioni di velocità indotte nel fluido dal moto turbolento, infatti, hanno la capacità di trasportare una quantità (scalare o vettoriale) molto rapidamente anche in assenza di moto medio. Ciò

porta ad assimilare l'effetto della turbolenza con un notevole aumento della diffusività del fluido che arriva ad essere anche due o tre ordini di grandezza maggiore rispetto al valore molecolare. Un studio più attento dei fenomeni turbolenti mostrerà comunque che questo è solo l'effetto più visibile di una dinamica molto complessa che coinvolge principalmente i termini non lineari delle equazioni di Navier–Stokes.

Per fornire un altro esempio sugli effetti macroscopici della turbolenza consideriamo la portata di un fluido attraverso un tubo a sezione circolare di raggio  $R$  e lunghezza  $L$  per una data differenza di pressione  $\Delta p$ . In base alla soluzione laminare di Hagen–Poiseuille si potrebbe scrivere  $Q = \pi R^4 \Delta p / (8\mu L)$  indicando che sarebbe sufficiente una differenza di pressione di un Pascal per ogni metro di lunghezza per avere in un tubo di raggio  $R = 0.5$  m una portata d'acqua di  $Q \simeq 20$  m<sup>3</sup>/s. Questo risultato sovrastima in modo molto grossolano la portata reale che risulta <sup>1</sup> invece  $Q \simeq 0.25$  m<sup>3</sup>/s. Il motivo di tale differenza è che il numero di Reynolds del flusso è  $Re \simeq 3 \cdot 10^5$  ossia molto al di sopra del limite  $Re = 2100$  di validità della soluzione laminare; in tali condizioni, il flusso all'interno del condotto non può considerarsi nè stazionario nè tantomeno piano (ossia contenente la sola componente di velocità nella direzione della corrente) e le intense fluttuazioni di velocità “diffondono” la quantità di moto in modo molto efficiente comportando un apparente aumento degli sforzi viscosi.

Questo esperimento è stato descritto per la prima volta in modo sistematico da O. Reynolds nel 1883 il quale, conducendo degli esperimenti sul flusso all'interno di tubi a sezione circolare, osservò che combinando la velocità media del flusso  $U$ , il diametro del tubo  $d$  e la viscosità cinematica del fluido  $\nu$  nel fattore  $Ud/\nu$  (che in seguito prese il nome di numero di Reynolds) si poteva descrivere la dinamica del flusso in 3 categorie differenti. Per  $Re \leq 2100$  il flusso si manteneva stazionario e si comportava come se delle lamine rettilinee (da cui il termine flusso laminare) scorressero le une sulle altre interagendo solo attraverso degli sforzi tangenziali. Questo comportamento fu notato osservando l'evoluzione di una “streakline” di inchiostro rilasciata da una posizione fissa all'interno del condotto; la linea di colorante, infatti, si manteneva rettilinea diffondendo molto debolmente mentre si allontanava dalla sorgente.

Per  $2100 \leq Re \leq 4000$  la linea di colorante perdeva la sua stazionarietà e si propagava lungo una traiettoria ondulata con caratteristiche dipendenti dal tempo. In questo regime transizionale, tuttavia la traccia di colorante preservava la sua coerenza spaziale rimanendo confinata in una linea sottile.

Al contrario, per  $Re \geq 4000$ , dopo un tratto iniziale con oscillazioni di ampiezza crescente la traccia d'inchiostro veniva diffusa vigorosamente in tutta la sezione trasversale del tubo fino a distribuirsi omogeneamente in tutto il flusso. Quest'ultimo regime è detto turbolento ed è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.

Un tipico esempio di segnale turbolento di velocità è mostrato in figura 10.2 da cui si vede che la velocità oscilla intorno ad un valore medio senza alcuna frequenza specifica. Un'altra caratteristica comune a tutti i flussi turbolenti è che se si ripete lo stesso esperi-

---

<sup>1</sup>Questo risultato è stato determinato utilizzando il valore del fattore d'attrito  $f$  determinato dal diagramma di Moody ipotizzando una rugosità relativa delle superfici del tubo pari a  $\epsilon/D = 10^{-3}$ .

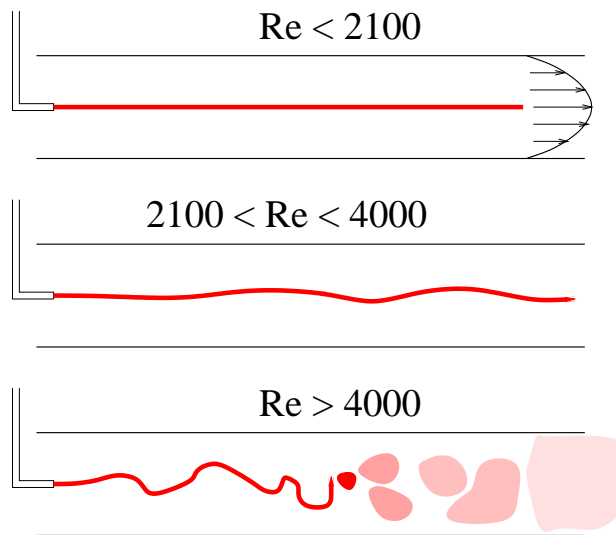


Figura 10.1: Disegno schematico dell'esperimento di Reynolds.

mento e si misura la stessa quantità nello stesso punto per lo stesso intervallo temporale si ottengono dei segnali notevolmente differenti se confrontati istantaneamente mentre essi hanno le stesse caratteristiche statistiche (valore medio, deviazione standard, etc.).

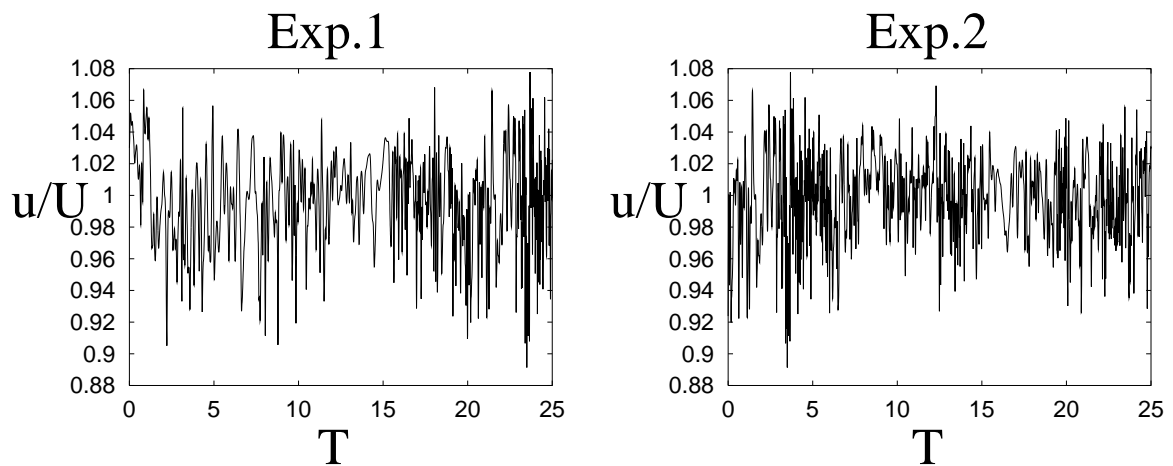


Figura 10.2: Segnali turbolenti di velocità per due realizzazioni successive dello stesso esperimento.

Questa osservazione sembra a prima vista inconciliabile con la natura delle equazioni che governano il fenomeno, cioè le equazioni di Navier–Stokes; essendo infatti le equazioni di tipo deterministico ed avendo condizioni iniziali ed al contorno definite si ha che anche la soluzione deve essere deterministica nello spazio e nel tempo. Questo dilemma è stato risolto da Lorentz che nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di

partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti <sup>2</sup>.

A tale scopo si consideri il sistema di equazioni

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (10.1)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy,$$

in cui i parametri valgono  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  e  $\rho = 35$  con le condizioni iniziali  $x(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.1$  e  $z(0) = 0.3$ ; la soluzione di questo sistema è riportata in figura 10.3 dove il tempo è il parametro lungo la curva si può osservare il noto attrattore di Lorenz. In figura 10.4, viene riportata invece con una linea continua l'andamento temporale per una della variabile  $y(t)$  del sistema (10.1).

Se, lasciando tutto invariato, si considerano le condizioni iniziali  $x(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.100001$  e  $z(0) = 0.3$  si nota che dopo un intervallo di tempo iniziale (in questo caso  $t \geq 15$  ma il valore dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\rho$ ) le due soluzioni differiscono nei valori istantanei e possono essere confrontate solo nei valori medi e nell'ampiezza delle fluttuazioni (figura 10.4, linea tratteggiata).

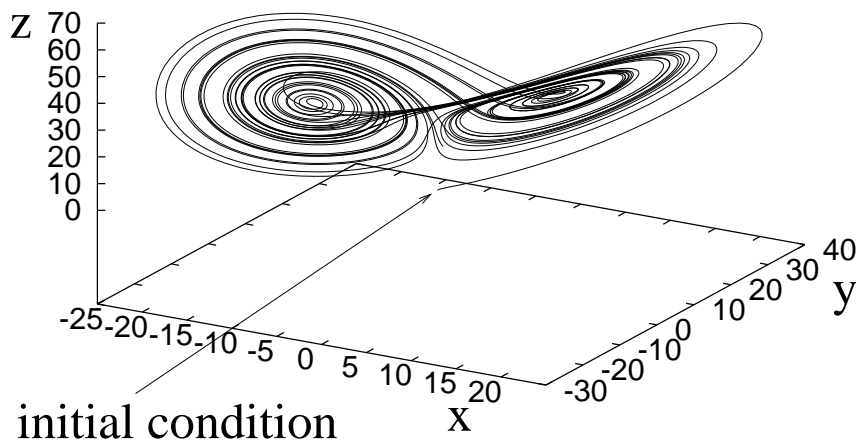


Figura 10.3: Attrattore di Lorenz nello spazio tridimensionale  $x$ - $y$ - $z$ .

Facendo un parallelo con le equazioni di Navier–Stokes possiamo annoverare tra i parametri iniziali sicuramente il campo di velocità, la pressione e la geometria del condotto, ma anche la distribuzione iniziale di temperatura (che determina la viscosità del fluido)

<sup>2</sup>Questo esempio è stato preso dal testo ‘Turbulent Flows’ by S.B. Pope, Cambridge Univ. Press, 2000).

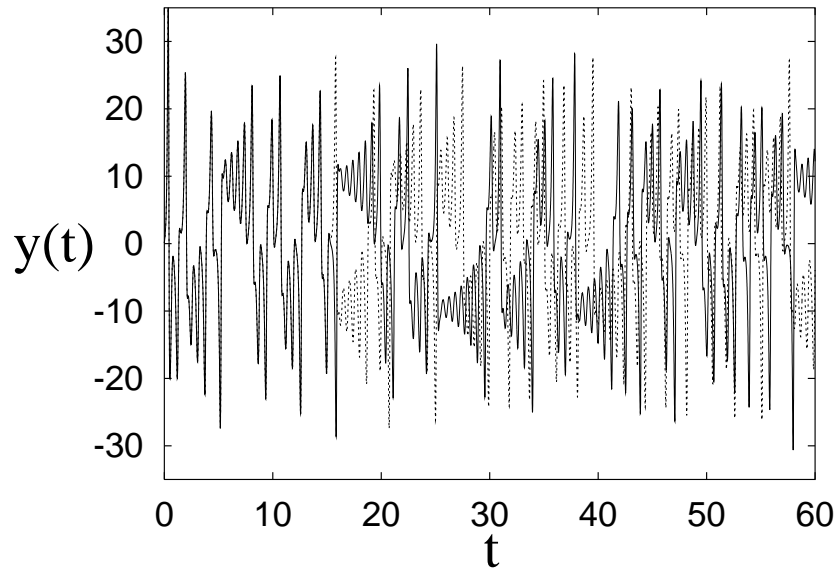


Figura 10.4: Evoluzione temporale della variabile  $y(t)$  soluzione dell'equazione di Lorentz: — condizioni iniziali originali, ..... condizioni iniziali perturbate.

la presenza di eventuali impurità e le condizioni di finitura superficiale del tubo. Questi ultimi parametri non possono essere controllati in modo arbitrariamente preciso e ciò determina (attraverso la non linearità delle equazioni) la dinamica non deterministica precedentemente descritta. In altre parole, per quanto si cerchi di mantenere controllati tutti i parametri di un esperimento è impossibile che due relizzazioni successive dello stesso fenomeno abbiano le condizioni iniziali replicate con una precisione infinita e ciò porta inevitabilmente a soluzioni divergenti nel tempo.

I termini non lineari sono anche gli artefici della produzione di fluttuazioni 'locali' di velocità che comportano la generazione di strutture fluidodinamiche di piccola scala. Riconsiderando infatti l'esempio del flusso nel condotto, ci si convince facilmente che la differenza di pressione imposta  $\Delta p$  fornisce energia solamente al moto medio, mentre la dispersione dell'inchiostro in tutto il flusso richiede l'azione di strutture piccole rispetto al diametro del tubo in grado di miscelare localmente il colorante con il fluido non marcato; come viene trasferita l'energia dal moto a grande scala fino alle strutture più piccole?

Per rispondere a questa domanda consideriamo l'equazione di Burgers, un'equazione monodimensionale, che ha tutte le caratteristiche principali delle equazioni di Navier-Stokes tranne il termine di pressione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10.2)$$

Immaginiamo ora che l'intervallo di definizione della soluzione sia  $x \in [0, 2\pi)$  e che la soluzione sia periodica in  $x$  con media nulla; con queste ipotesi è possibile espandere la

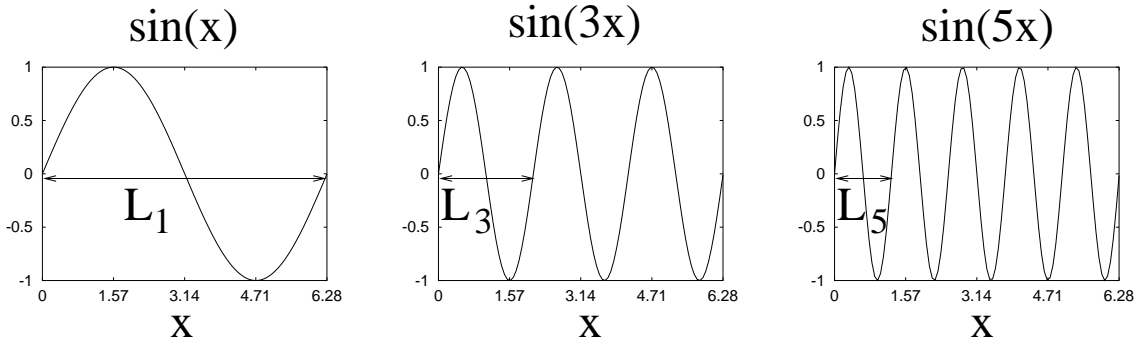


Figura 10.5: Esempio di variazione di lunghezza d'onda  $L_k$  con il numero d'onda  $k$ .

$u(x, t)$  con una serie di seni

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx), \quad (10.3)$$

in cui la dinamica della soluzione è tenuta in conto dai coefficienti  $A_k(t)$  mentre la base di seni soddisfa automaticamente le condizioni al contorno. A titolo di esempio vengono riportate in figura 10.5 le funzioni seno per  $k = 1, 3, 5$  da cui si può notare che la lunghezza della singola onda (detta appunto lunghezza d'onda) è pari ad  $L_k = 2\pi/k$  e che il gradiente della curva diventa tanto più ripido quanto più aumenta  $k$ . Con questo semplice esempio abbiamo quindi imparato che l'indice  $k$  ci dà l'informazione sulla dimensione della struttura e sui gradienti spaziali che, rispettivamente, diminuiscono ed aumentano al crescere di  $k$ .

Avendo fatto questa precisazione, possiamo utilizzare la sommatoria (10.3) per esprimere i singoli termini della (10.2) ed ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx), & (10.4) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k \cos(kx), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx), \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_l(t) A_m(t) m \sin(lx) \cos(mx) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \}. \end{aligned}$$

Questi termini possono essere risostituiti nell'equazione (10.2) che diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \} = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx). \quad (10.5)$$

Osservando ora la proprietà di ortogonalità delle funzioni seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \pi \delta_{pq},$$

abbiamo che moltiplicando l'equazione (10.5) per  $\sin(kx)$  ed integrando tra 0 e  $2\pi$  si ottiene

$$\dot{A}_k(t)\pi + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi A_l(t) A_m(t) m}{2} = -\pi \nu k^2 A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

essendo la doppia sommatoria ristretta ai soli  $m$  ed  $l$  tali che  $l + m = k$  ed  $l - m = k$  ossia

$$\dot{A}_k + \sum_{m=1}^{\infty} m \left( \frac{A_m A_{k-m}}{2} + \frac{A_m A_{k+m}}{2} \right) = -\nu k^2 A_k, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (10.6)$$

L'equazione appena trovata indica che le variazioni nel tempo della quantità di moto nel modo  $k$ -esimo ( $\dot{A}_k$ ) hanno due cause, una lineare ed una non lineare. Per comprendere meglio l'effetto dei due termini sorgente immaginiamo per un istante di cancellare dall'equazione di partenza (10.2) i termini non lineari, ottenendo che la (10.6) diventa

$$\dot{A}_k = -\nu k^2 A_k, \implies A_k(t) = A_k(0) e^{-\nu k^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (10.7)$$

da cui si nota che ogni componente  $A_k$  decresce inesorabilmente nel tempo tanto più rapidamente quanto più è viscoso il fluido e quanto più è piccola la struttura (ossia quanto più grande è  $k$ ). L'altro risultato notevole è che in assenza di termini non lineari l'evoluzione di ogni modo  $A_k$  è indipendente dagli altri; ciò implica che una condizione iniziale che contenesse solamente un numero finito di  $A_k(0)$  (per esempio  $k = 1, 3, 8$ ) evolverebbe unicamente con i modi 1, 3, 8 ognuno decrescendo nel tempo indipendentemente dagli altri secondo la soluzione appena ricavata. In figura 10.6 è riportata la soluzione in termini di  $u(x, t)$  e di  $A_k(t)$  dell'equazione (10.7) in cui si vede che effettivamente solo i coefficienti  $A_k$  presenti nella condizione iniziale determinano la dinamica del fenomeno e che questi decrescono nel tempo tanto più rapidamente quanto più è grande  $k$ .

Al contrario, la presenza dei termini non lineari modifica completamente la dinamica del fenomeno, trasferendo quantità di moto dalla componente  $k$  alle componenti  $k - m$  e  $k + m$ . Per illustrare più in dettaglio questo concetto, immaginiamo che il numero di termini della sommatoria (10.3) sia limitato a 3 invece che infinito. L'equazione (10.6) scritta per componenti risulterebbe allora:

$$\dot{A}_1 + (A_1 A_0 + A_1 A_2) \frac{1}{2} + (A_2 A_{-1} + A_2 A_3) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-2} + A_3 A_4) \frac{3}{2} = -\nu A_1, \quad (10.8)$$

$$\dot{A}_2 + (A_1 A_1 + A_1 A_3) \frac{1}{2} + (A_2 A_0 + A_2 A_4) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-1} + A_3 A_5) \frac{3}{2} = -\nu A_2,$$

$$\dot{A}_3 + (A_1 A_2 + A_1 A_4) \frac{1}{2} + (A_2 A_1 + A_2 A_5) \frac{2}{2} + (A_3 A_0 + A_3 A_6) \frac{3}{2} = -\nu A_3,$$

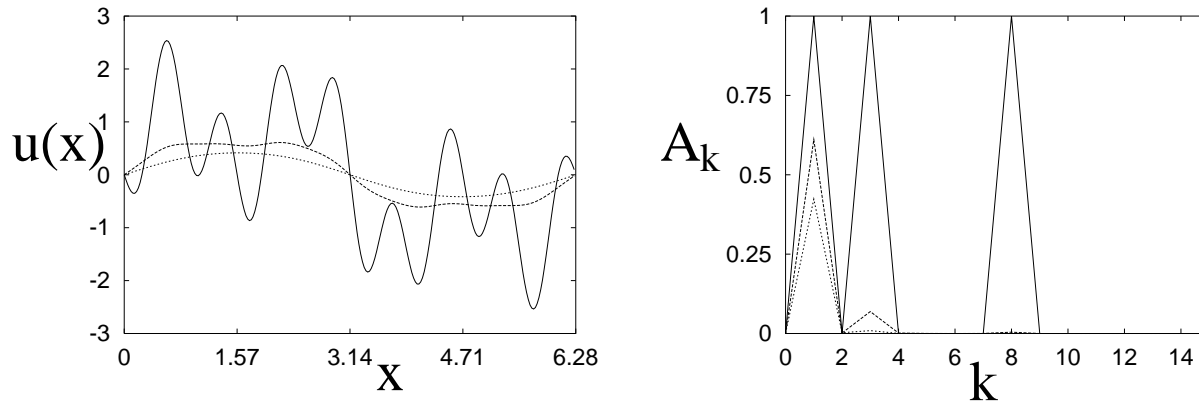


Figura 10.6: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers (senza i termini non lineari)  $\nu = 10$ . A sinistra e' riportata l'evoluzione temporale di  $u(x, t)$ , rispettivamente per —  $t = 0$ , ----  $t = 0.5$  e .....  $t = 1$ . A destra ci sono i coefficienti  $A_k$  per gli stessi tempi.

e osservando che risulta  $A_p \equiv 0$  per  $p \leq 0$  e  $p > 3$  si riducono a

$$\dot{A}_1 + \frac{A_1 A_2}{2} + A_2 A_3 = -\nu A_1, \quad (10.9)$$

$$\dot{A}_2 + \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_1 A_3}{2} = -4\nu A_2$$

$$\dot{A}_3 + \frac{3A_1 A_2}{2} = -9\nu A_3.$$

Se ora consideriamo una condizione iniziale contenente solo  $A_1$  (per esempio un seno come il primo pannello di figura 10.7) si vede che a causa del termine  $A_1 A_1/2$  risulterà nell'istante iniziale  $\dot{A}_2 \neq 0$  indicando che parte della quantità di moto viene trasferita nella componente  $A_2$ . D'altra parte, quando risulta  $A_2 \neq 0$ , anche il termine  $3A_1 A_2/2$  verrà attivato nell'equazione per  $A_3$  e quindi anche la terza struttura verrà interessata dal moto del flusso. Se ricordiamo quindi che al crescere di  $k$  diminuisce la dimensione della struttura, abbiamo che i termini non lineari hanno come effetto quello di trasferire il 'moto' (e quindi l'energia) dalle strutture grandi a quelle più piccole<sup>3</sup> con un meccanismo detto di 'cascata' dai moti a grande scala verso quelli più piccoli e locali.

In particolare se nell'esempio precedente invece di limitare a 3 il numero di termini ne avessimo infiniti, avremmo un trasferimento di energia verso strutture sempre più piccole ( $k$  grandi) in un tempo tanto più lungo quanto più distante risulterebbe  $k$  dal modo  $k = 1$  contenente energia nella condizione iniziale. Questa osservazione ci pone quindi un nuovo

<sup>3</sup>Ciò non è vero nella turbolenza bidimensionale dove l'effetto combinato dei termini non lineari ed i termini viscosi crea un trasferimento in direzione opposta rispetto al caso monodimensionale e tridimensionale. Questo spiega la formazione di strutture di grande scala nell'atmosfera e negli oceani (grandi circolazioni e correnti).



interrogativo e cioè se il trasferimento dell'energia procede indefinitamente fino a  $k = \infty$  oppure se interviene qualche meccanismo in grado di bloccare questa cascata.

La risposta è fornita dalla soluzione analitica (10.7) da cui si vede come la viscosità diminuisca rapidamente il contenuto energetico del modo  $k$ -esimo all'aumentare di  $k$ . Se in particolare questa diminuzione è sufficientemente rapida, si può inibire il trasferimento di energia verso numeri d'onda  $k$  elevati semplicemente perché l'energia viene dissipata prima ancora che riesca ad essere trasferita. In pratica la viscosità opera un 'taglio' sulla dimensione minima della struttura che è possibile generare (o sul  $k$  massimo) in un flusso e questo taglio dipende sia dal valore della viscosità  $\nu$  sia da quanto velocemente l'energia viene trasferita da un modo all'altro; si potrebbe verificare, infatti, che il flusso di energia verso le piccole scale è così rapido che la viscosità è costretta a 'spostare' il  $k$  di taglio verso valori maggiori dove può agire più efficientemente.

Le considerazioni appena fatte sono mostrate mediante due esempi in cui si riporta la soluzione dell'equazione di Burgers, entrambe con la medesima condizione iniziale, ma con due diversi valori di viscosità. Confrontando le figure 10.7 e 10.8 si nota come nel caso a viscosità minore la curva presenti un gradiente più ripido in corrispondenza del punto  $x = \pi$ . Ragionando in termini di  $A_k$  abbiamo quindi che la soluzione con viscosità piccola conterrà  $A_k$  con  $k$  più elevati rispetto alla soluzione più viscosa. Ciò è confermato dai pannelli di destra delle figure 10.7 e 10.8 che riportano l'evoluzione temporale della distribuzione degli  $A_k$ , consistentemente con gli argomenti precedentemente discussi.

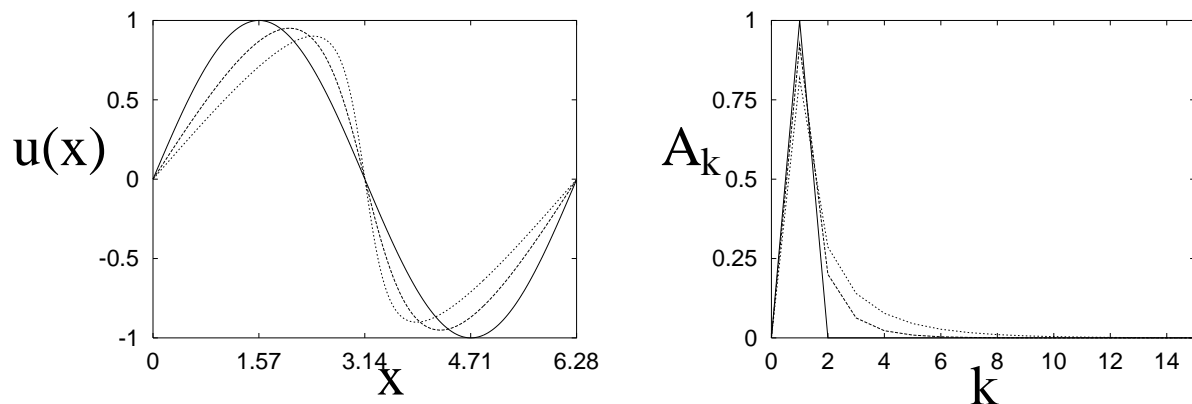


Figura 10.7: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers  $\nu = 10^{-1}$ . A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di  $u(x, t)$ , rispettivamente per —  $t = 0$ , ----  $t = 0.5$  e .....  $t = 1$ . A destra ci sono i coefficienti  $A_k$  per gli stessi tempi.

Riconsiderando con quest'ottica l'esperimento di Reynolds per il flusso all'interno di tubi, si comprende che se il numero di Reynolds è piccolo ( $Re < 2100$ ) gli effetti viscosi prevalgono su quelli inerziali (non lineari) e, essendo inibito ogni trasferimento di energia, il moto medio a grande scala non degenera in strutture più piccole. Al contrario, quando gli effetti inerziali prevalgono su quelli viscosi ( $Re > 4000$ ) il trasferimento tra i modi sarà attivato ed il moto inizialmente uniforme produrrà strutture fluidodinamiche più piccole.

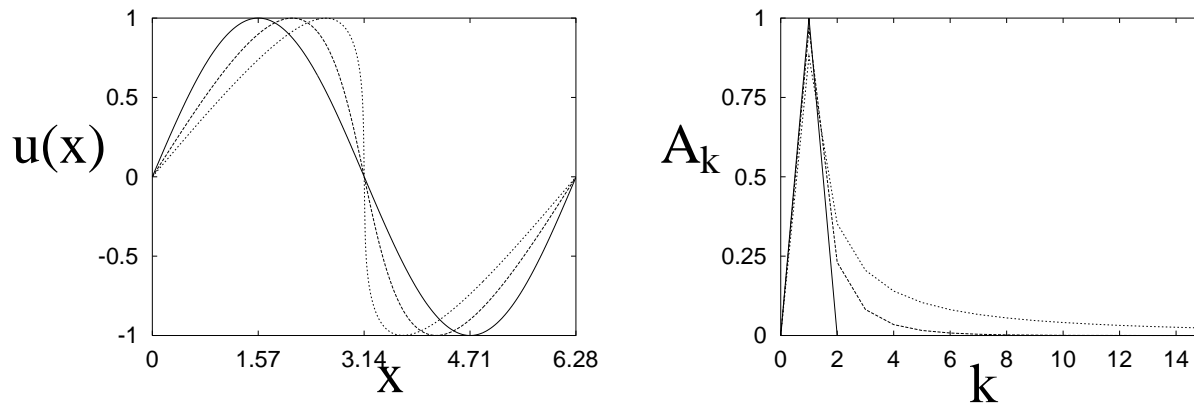


Figura 10.8: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers  $\nu = 10^{-3}$ . A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di  $u(x, t)$ , rispettivamente per —  $t = 0$ , ----  $t = 0.5$  e .....  $t = 1$ . A destra ci sono i coefficienti  $A_k$  per gli stessi tempi.

Queste ultime osservazioni costituiscono la base di partenza della teoria della turbolenza tridimensionale che illustreremo brevemente in una sezione successiva.

## 10.2 equazioni di Reynolds

Nella sezione precedente abbiamo visto che in un flusso turbolento, anche con condizioni al contorno e forzanti stazionarie, il campo di velocità è non stazionario con oscillazioni non deterministiche intorno ad un valore medio che eventualmente può dipendere anch'esso dal tempo.

È utile chiarire immediatamente che questa dinamica così complessa è interamente contenuta nelle equazioni di Navier–Stokes che sono in grado di descrivere il moto e l'interazione di tutte le scale di moto, fino alle più piccole e dissipative. Purtroppo dal punto di vista pratico, l'estremo dettaglio con cui queste equazioni descrivono il flusso costituisce al tempo stesso la debolezza del modello in quanto le risorse di calcolo necessarie per la risoluzione di queste equazioni crescono vertiginosamente con il numero di Reynolds ( $\sim Re^3$ ). Se si considera che nei problemi pratici si ha  $Re = 10^6 - 10^9$  si capisce immediatamente che una soluzione del problema con un metodo 'diretto' è tecnicamente impossibile.

D'altra parte per alcune applicazioni pratiche la sola conoscenza delle grandezze medie può essere sufficiente per la soluzione del problema, ci si chiede quindi se sia possibile, partendo dalle equazioni di Navier–Stokes, derivare delle equazioni più semplici per le sole grandezze medie.

A tal fine, iniziamo con l'osservare che dato un qualunque segnale dipendente dal tempo (nella fattispecie la velocità) è possibile decomporlo in un valore medio ed una fluttuazione. Nel caso in cui il valore medio sia costante nel tempo allora si può porre:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (10.10)$$

risultando

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad \text{e} \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}), \quad (10.11)$$

in cui tutta la non stazionarietà del segnale è nella fluttuazione (figura 10.9). Dalle definizioni risulta identicamente  $\langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \mathbf{0}$ , proprietà che tornerà utile nella decomposizione delle equazioni del moto.

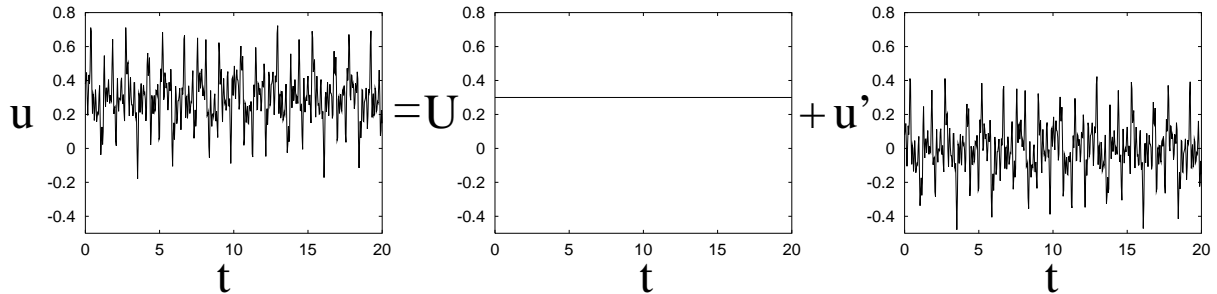


Figura 10.9: Decomposizione di un segnale statisticamente stazionario in parte media e parte fluttuante.

Se la velocità media risulta invece anch'essa funzione del tempo allora l'operazione di media non va effettuata per un tempo infinito ma su un'intervallo finito che risulti molto grande rispetto alle scale temporali delle fluttuazioni ma abbastanza breve se confrontato con i tempi di variazione del campo medio <sup>4</sup> (figura 10.10).

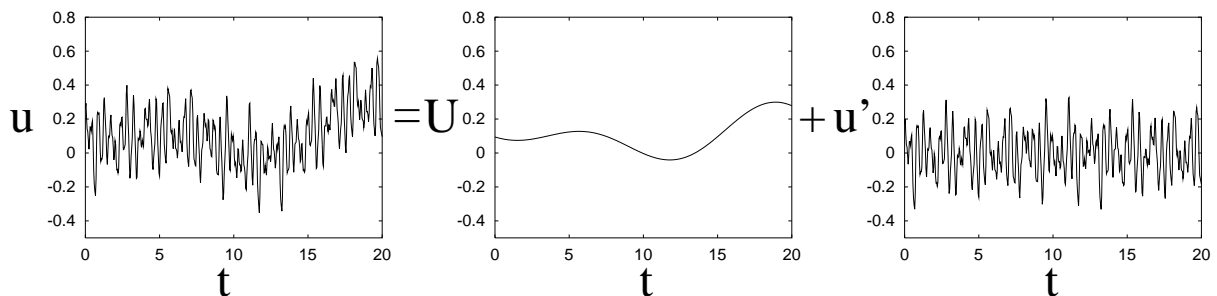


Figura 10.10: Decomposizione di un segnale statisticamente *non* stazionario in parte media e parte fluttuante.

La decomposizione appena illustrata può naturalmente essere effettuata per la pressione  $p$  e per tutte le altre variabili dipendenti delle equazioni di Navier–Stokes e di conservazione della massa. Per semplicità tratteremo solo il caso  $\rho = \text{const.}$  (flusso incomprimibile

<sup>4</sup>Questa operazione è ben definita quando esiste una netta separazione tra i periodi delle piccole fluttuazioni e quelli del campo medio. In turbolenza questa eventualità si verifica assai raramente (a meno che non ci siano forzanti periodiche imposte esternamente) e la decomposizione in parte media e parte fluttuante può presentare delle ambiguità.

omogeneo) per cui, l'equazione di continuità si può decomporre in

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{u}') = \mathbf{0}, \quad \implies \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{0}, \quad (10.12)$$

rispettivamente per la velocità media e quella fluttuante. La seconda delle (10.12) è stata ottenuta dalla prima dopo aver effettuato un'operazione di media, aver notato che  $\langle \mathbf{u}' \rangle \equiv \mathbf{0}$  e che l'operazione di media e di divergenza commutano (in quanto entrambi operatori lineari). La terza delle (10.12) è infine ottenuta semplicemente per sottrazione della seconda dalla prima.

Per decomporre in modo analogo le equazioni di Navier–Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (10.13)$$

osserviamo che per tutti i termini, tranne quello non lineare possiamo porre

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}, \quad \nabla p = \nabla P + \nabla p', \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (10.14)$$

Il termine non lineare si decompone invece secondo

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot [(\mathbf{U} + \mathbf{u}')(\mathbf{U} + \mathbf{u}')] = \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}'). \quad (10.15)$$

Se ora sostituiamo i termini così decomposti nell'equazione (10.13) e ne facciamo la media, osservando che risulta  $\langle \mathbf{U}\mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{u}'\mathbf{U} \rangle \equiv \mathbf{0}$  mentre  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \neq \mathbf{0}$  si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (10.16)$$

e sottraendo questa equazione dalla (10.13) si ricava l'equazione per le fluttuazioni

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p}' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}', \quad (10.17)$$

L'equazione (10.16) e la seconda delle (10.12) costituiscono le equazioni della dinamica del campo medio e se non fosse per il termine  $\nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle)$  queste sarebbero identiche alla (10.13) e la prima delle (10.12) che sono le equazioni di partenza. La differenza potrebbe sembrare marginale ma mentre il sistema originale di equazioni è chiuso (4 equazioni nelle 4 incognite  $\mathbf{u}$  e  $p$ ) le equazioni del campo medio rimangono 4 a fronte di un numero di incognite che sale a 13,  $\mathbf{u}$ ,  $p$  ed il tensore<sup>5</sup> del secondo ordine  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ . Questo problema è noto come 'chiusura' della turbolenza e si presenta sempre con un numero di incognite superiore al numero delle equazioni ogni volta che si tenta di derivare un'equazione per la turbolenza. Una conferma di questa affermazione si può ottenere ricavando l'equazione per  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  dalla (10.17) dopo averla moltiplicata per  $\mathbf{u}'$  ed averne effettuato la media.

<sup>5</sup>Notando evidenti proprietà di simmetria del tensore  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  il numero delle incognite si riduce a 10, non risolvendo comunque il problema della chiusura.

Infatti, poiché l'equazione (10.16) introduce un'incognita aggiuntiva, potremmo essere tentati di ricavarne un'equazione per chiudere il problema.

Purtroppo se effettivamente derivassimo questa nuova equazione noteremmo che l'evoluzione di  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  introduce la nuova incognita  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  e la procedura potrebbe essere ripetuta all'infinito senza mai riuscire a bilanciare il numero di incognite con le equazioni. Si otterrebbe cioè una gerarchia di equazioni in cui le incognite sono sempre superiori rispetto alle relazioni disponibili rendendo impossibile la soluzione esatta del problema.

La via comunemente utilizzata è quindi quella di troncare il numero di equazioni ad un certo ordine e modellare le incognite di ordine superiore con delle relazioni approssimate. Chiaramente maggiore è l'ordine a cui si tronca la gerarchia, maggiore sarà il numero delle incognite da modellare e conseguentemente la complessità del modello utilizzato. Lasciamo ai testi specialistici del settore la disamina dei numerosi modelli ed equazioni di ordine elevato mentre in queste note ci limiteremo al semplice caso in cui i termini  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  vengono modellati con una semplice ipotesi di 'gradiente diffusivo'.

Per comprendere il significato fisico di tale approssimazione, riconsideriamo l'equazione (10.16) e riscriviamola nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (\mathbf{2}\nu \mathbf{E} - \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle), \quad \text{con} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (10.18)$$

da cui si osserva che i termini  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  possono essere considerati come degli sforzi aggiuntivi (detti sforzi di Reynolds) che sottraggono energia al campo medio per trasferirla alle fluttuazioni. Identificando queste fluttuazioni come la componente turbolenta del moto, detta  $K$  l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) definita come

$$K = \frac{1}{2}(\langle u'_x u'_x \rangle + \langle u'_y u'_y \rangle + \langle u'_z u'_z \rangle) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle), \quad (10.19)$$

si può, analogamente al caso laminare, porre per la parte deviatorica degli sforzi di Reynolds,

$$-\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle + \frac{2}{3} \mathbf{K} \mathbf{I} = \mathbf{2}\nu_T \mathbf{E}, \quad (10.20)$$

in cui  $\nu_T$  è la viscosità turbolenta ed è la nuova incognita del problema.

Con questa posizione l'equazione (10.16) assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P^* + \nabla \cdot (\mathbf{2}\nu^* \mathbf{E}), \quad (10.21)$$

che è identica all'equazione originale avendo usato la pressione modificata  $P^* = P + 2K/3$  ed avendo definito una viscosità 'totale'  $\nu^* = \nu + \nu_T$ . Sebbene le espressioni (10.20) e (10.21) possano sembrare particolarmente attraenti data la loro semplicità, è bene sottolineare che nascondono diverse insidie, sia matematiche che fluidodinamiche. Infatti, mentre  $\nu$  è una proprietà molecolare del *fluido* e nelle ipotesi  $\rho = \text{const.}$  è costante in tutto il campo,  $\nu_T$  è una proprietà del *flusso* il cui valore cambia in ogni punto del campo e nel

tempo ( $\nu_T = \nu_T(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ ) ed il suo comportamento varia da problema a problema. Inoltre, anche se a prima vista la relazione (10.20) sembra solo aver spostato l'incognita  $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$  nell'incognita  $\nu_T$ , dobbiamo osservare che la prima è un tensore del secondo ordine mentre la seconda è uno scalare. L'equazione (10.20) implica quindi che il primo e secondo membro abbiano le stesse direzioni principali ossia che gli autovettori dei due tensori siano paralleli. Questa proprietà non è giustificabile teoricamente ed infatti una verifica diretta della (10.20) attraverso simulazioni numeriche ed esperimenti di laboratorio ha mostrato che ciò non è verificato per la maggior parte dei flussi; questo 'disallineamento' porta in qualche caso a piccole differenze tra le soluzioni calcolate e quelle misurate, mentre altre volte induce errori grossolani. Ricordiamo infine che, anche accettando in modo acritico l'equazione (10.20), il problema non risulta ancora chiuso in quanto le equazioni sono sempre 4 mentre le incognite sono ancora 5 ( $\mathbf{U}$ ,  $p$  e  $\nu^*$  oppure  $\nu_T$ ).

A questo proposito abbiamo detto che  $\nu_T$  dipende dal flusso, ossia a seconda che si stia studiando un flusso a valle di un'ostacolo, uno strato limite o un getto turbolento, esistono leggi empirico-euristiche (spesso con correzioni sperimentali o ad hoc) che permettono di calcolare la  $\nu_T$  dalla geometria del problema o dalle caratteristiche del flusso medio e quindi di chiudere il sistema di equazioni. Anche in questo caso, la descrizione di tutti i modelli per la  $\nu_T$  viene lasciata ai testi di modellistica della turbolenza mentre in queste note ci limiteremo a commentare un particolare modello algebrico basato sul concetto di lunghezza di mescolamento. Ricordiamo tuttavia che alcuni modelli possono essere tanto complicati da richiedere per il calcolo della  $\nu_T$  un set di equazioni differenziali più complesse di quello per il calcolo del campo medio.

### 10.3 viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento

Uno dei primi tentativi effettuati per la determinazione della viscosità turbolenta è stato fatto costruendo un'analogia tra la turbolenza e la diffusione a livello molecolare della quantità di moto. Ricordiamo infatti brevemente che la diffusione molecolare avviene a causa degli urti casuali tra molecole dovuti al moto di agitazione termica. Dalla teoria cinetica dei gas ne consegue che, detta  $\mathcal{V}$  la metà della velocità media delle molecole e  $\lambda$  il libero cammino medio si ottiene  $\nu \approx \mathcal{V}\lambda$ .

Se allora si identificano i vortici più piccoli del flusso come le 'molecole' della turbolenza si può immaginare che questi, dopo aver percorso una distanza  $\ell$  ad una velocità  $V$ , interagiscano mescolandosi tra loro e quindi diffondendo la quantità di moto. Il problema della determinazione di  $\nu_T$  si tradurrà quindi nella valutazione di  $\ell$  (detta appunto lunghezza di mescolamento) e di  $V$ .

In figura 10.11 è riportato uno schema di flusso (tipo strato limite) sul quale si possono effettuare semplici ragionamenti intuitivi per determinare l'andamento di  $\ell$  e  $V$ . Per questo flusso, infatti, la velocità media  $U$  sarà prevalentemente orizzontale ed il suo profilo dipenderà dalla coordinata normale alla parete  $y$ . Immaginiamo quindi di posizionarci alla distanza  $y^*$  dalla parete ed osservare in quel punto sia fluttuazioni di velocità verso

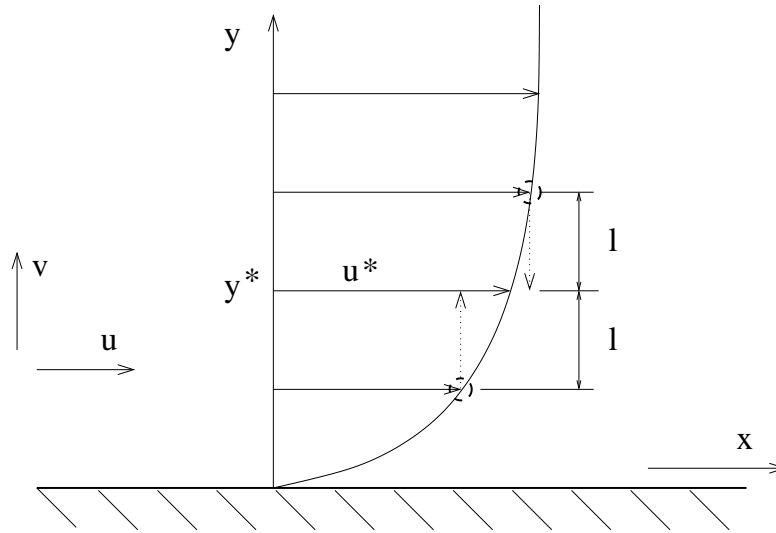


Figura 10.11: Schema di flusso per la definizione di lunghezza di mescolamento e viscosità turbolenta.

il basso che verso l'alto. Nel primo caso, una particella inizialmente nella posizione  $y^* + l$  verrà trasportata in  $y^*$  generando una fluttuazione di velocità orizzontale

$$u'_+ \approx \Delta U_+ = U(y^* + l) - U(y^*) \simeq l \frac{dU}{dy},$$

avendo troncato lo sviluppo in serie di Taylor per la velocità al primo ordine. Analogamente, le fluttuazioni verso l'alto porteranno una particella fluida inizialmente nella posizione  $y^* - l$  in  $y^*$  inducendo una fluttuazione di velocità

$$u'_- \approx \Delta U_- = U(y^*) - U(y^* - l) \simeq -l \frac{dU}{dy}.$$

Statisticamente avremo quindi che le fluttuazioni di velocità orizzontale in  $y^*$  avranno un modulo pari a

$$u' = \frac{1}{2}(|u'_+| + |u'_-|) = l \left| \frac{dU}{dy} \right|.$$

Osserviamo ora che per la conservazione della massa, una variazione positiva di  $u$  (particella che si muove da  $y^* + l$  ad  $y^*$ ) induce una fluttuazione negativa di  $v$  mentre l'opposto accade per una particella che si muove da  $y^* - l$  ad  $y^*$ . Ciò implica che si può porre  $v' \approx -c_1 u'$  con  $c_1$  costante di ordine uno e che il prodotto  $u'v'$  deve essere sicuramente negativo. Con queste ipotesi si può scrivere

$$\langle u'v' \rangle = -c_2 |u'| |v'| = -c_1 c_2 l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 = -\ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 \quad (10.22)$$

in cui  $c_2$  è ancora una costante di ordine uno,  $\ell$  è la lunghezza di mescolamento e  $\ell|dU/dy| = V$  è la velocità cercata. Ciò si evince facilmente confrontando la relazione appena trovata con la (10.20) ed osservando che per questo semplice flusso risulta  $2E_{12} = dU/dy$  da cui si ricava  $\nu_T = \ell V = \ell^2|dU/dy|$ .

L'ultimo punto che rimane da chiarire è come determinare  $\ell$  in funzione della geometria del flusso. Prandtl nel 1925 osservò che risultando alla parete ( $y = 0$ )  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$  anche gli sforzi turbolenti dovranno essere nulli in quel punto; con questo vincolo l'assunzione più semplice per la  $\ell$  è

$$\ell = Ay. \quad (10.23)$$

Prandtl suppose anche che, tranne che per gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla parete, gli sforzi turbolenti fossero molto più grandi degli sforzi puramente viscosi, che quindi erano trascurabili, e che i primi si mantenessero di intensità costante. Indicando con  $\tau_T/\rho = -\langle u'v' \rangle$  gli sforzi turbolenti l'assunzione (10.23) implica quindi

$$\frac{\tau_T}{\rho} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2, \implies \sqrt{\frac{\tau_T}{\rho}} = Ay \frac{dU}{dy} \implies U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_T}} = \frac{1}{A} \ln y + C, \quad (10.24)$$

che fornisce l'andamento della velocità media  $U$  in funzione della distanza dalla parete.

D'altra parte, queste ipotesi non possono essere applicate alla parete dove, a causa della condizione di aderenza, il flusso deve essere laminare. In quella regione infatti si deve assumere che gli sforzi turbolenti siano trascurabili, mentre quelli viscosi sono i più rilevanti e sono approssimativamente costanti (che è equivalente ad ammettere che il profilo di velocità alla parete sia linearizzabile). Indicando quindi lo sforzo viscoso di parete come

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0}, \quad (10.25)$$

è possibile definire delle scale di velocità e lunghezza  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  e  $\delta_\tau = \nu/u_\tau$  dette, rispettivamente velocità e lunghezza d'attrito, con le quali è possibile adimensionalizzare le quantità della turbolenza di parete. In particolare, la relazione (10.25) con  $\tau_w$  costante può essere facilmente integrata

$$\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} U = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{y}{\nu} + c \implies U^+ = y^+, \quad (10.26)$$

dovendo risultare  $c = 0$  per le condizioni alla parete ed avendo indicato

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} = U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\tau} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad (10.27)$$

dette quantità di parete.

Allo stesso modo,  $u_\tau$  e  $\delta_\tau$  possono essere utilizzate per rendere adimensionale la (10.24) che assume la forma

$$U^+ = \frac{1}{\alpha} \ln y^+ + \beta \quad (10.28)$$



in cui  $\alpha = 0.4$  e  $\beta = 5.5$  sono delle costanti in cui sono compresi tutti i fattori di normalizzazione e risultano universali per tutti i flussi turbolenti di parete che ricadono nella tipologia della figura 10.11.

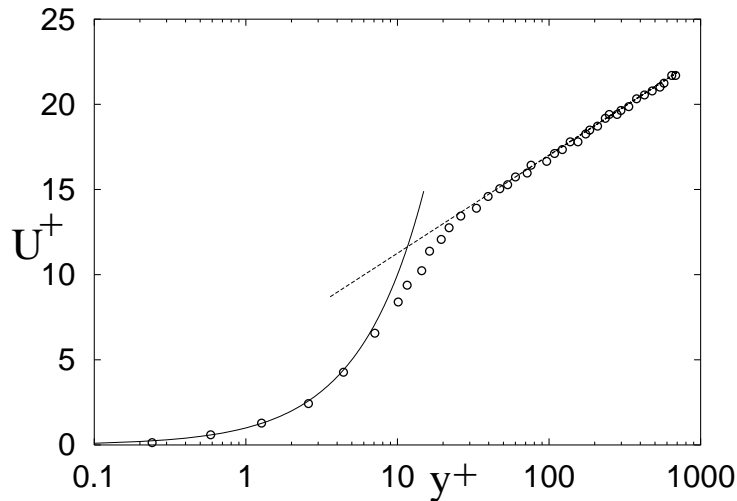


Figura 10.12: Andamento della velocità media in funzione della distanza dalla coordinata  $y$  (quantità di parete). Le linee indicano gli andamenti teorici, mentre i simboli sono valori misurati.

Un andamento tipico della velocità normalizzata  $U^+$  in funzione delle coordinate di parete  $y^+$  è riportato in figura 10.12 da cui si nota che il flusso ha due comportamenti distinti. Il primo per  $y^+ \leq 5$  in cui la  $U^+$  segue la legge (10.26); questa regione è detta sottostrato laminare ed è caratterizzata da sforzi puramente viscosi di intensità circa costante. La seconda regione per  $y^+ \geq 30$  segue la legge riportata in (10.28) ed è dovuta a sforzi turbolenti di intensità costante. La regione intermedia ( $5 \leq y^+ \leq 30$ ) è una regione di sovrapposizione dei due regimi in cui sia sforzi viscosi che turbolenti hanno rilevanza sul fenomeno.

Il profilo di velocità di figura 10.12 mostra chiaramente che l'assunzione (10.23) per la lunghezza di mescolamento descrive in modo adeguato la dinamica della turbolenza di parete. Questo risultato, tuttavia, non deve trarre in inganno in quanto una tale semplificazione funziona solo nel caso in cui nel flusso non ci sono separazioni, in assenza di gradienti di pressione esterni e per geometrie piane. Nelle applicazioni pratiche la geometria del flusso è solitamente più complicata e devono essere utilizzati modelli più complessi e con fisica meno intuitiva.

## 10.4 turbolenza omogenea ed isotropa

L'esempio della soluzione di Burgers ha mostrato come nelle equazioni di evoluzione di un fluido ci sono i termini viscosi e quelli non lineari che hanno meccanismi di azione

completamente diversi ed in competizione tra loro. I primi, infatti, sono dissipativi ed hanno un'azione locale, interessano cioè singolarmente i vari modi senza implicare alcuna interazione. L'efficacia con cui viene dissipata l'energia cresce con il quadrato del numero d'onda  $k$  e quindi con l'inverso del quadrato della dimensione della struttura. I secondi, al contrario, data la loro natura non lineare sono responsabili del trasferimento di energia tra i vari modi senza alterarne il valore globale.

Sebbene le equazioni di Navier–Stokes abbiano una struttura più complessa dell'equazione di Burgers, l'azione dei termini non lineari e di quelli viscosi è analoga a quella appena descritta e questa dinamica ha dato spunto a molti scienziati del ventesimo secolo per ipotizzare lo scenario evolutivo della turbolenza. In particolare Richardson nel 1922 immaginò che l'energia entri nel flusso alle scale più grandi e, attraverso meccanismi di instabilità, vengano prodotti vortici più piccoli che a loro volta generano vortici ancora più piccoli e così via fino a quando le dimensioni non sono talmente piccole che la viscosità dissipa le strutture impedendo ogni ulteriore trasferimento <sup>6</sup>. Questa descrizione implica un trasferimento a cascata (essenzialmente non viscosa) dell'energia dalle scale più grandi del moto verso quelle sempre più piccole fino alle scale dissipative dove la viscosità trasforma tutta l'energia in calore.

Lo scenario appena presentato descrive in modo abbastanza fedele ciò che accade in un flusso turbolento anche se, senza ulteriori ipotesi, non è possibile quantificare il fenomeno descritto; per esempio, quanto piccole sono le dimensioni a cui prevalgono gli effetti viscosi, e cosa succede tra le scale in cui l'energia viene immessa nel flusso e quelle a cui viene dissipata? Questi quesiti hanno trovato una risposta solo recentemente quando Kolmogorov nel 1941 ha pubblicato i risultati di una sua teoria applicabile alla turbolenza omogenea ed isotropa <sup>7</sup>.

È bene precisare subito che la turbolenza omogenea ed isotropa è un'astrazione concettuale e che non è mai riprodotta in modo esatto da alcun sistema fisico reale. Tuttavia la sua utilità per lo studio della turbolenza è duplice in quanto da un lato semplifica enormemente la trattazione teorica e permette quindi una migliore comprensione della fisica, dall'altro si osserva che tutti i sistemi reali soddisfano 'localmente' le condizioni di omogeneità ed isotropia.

Quest'ultima asserzione costituisce la prima ipotesi fondamentale di Kolmogorov e cioè "per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le strutture fluidodinamiche piccole in un flusso turbolento sono statisticamente isotrope". In questa affermazione 'strutture fluidodinamiche piccole' è inteso rispetto alle scale di moto in cui l'energia turbolenta

---

<sup>6</sup>L'asserzione di Richardson era: "Big whorls have little whorls, which feed on their velocity and little whorls have lesser whorls and so on to viscosity".

<sup>7</sup>La turbolenza si definisce omogenea ed isotropa, rispettivamente, quando le sue caratteristiche statistiche non dipendono dalla posizione nello spazio e sono uguali in tutte le direzioni. Tecnicamente la definizione rigorosa richiede l'introduzione di variabili random; detta infatti  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  una variabile random funzione della posizione  $\mathbf{x}$  (per esempio la velocità) questa è definibile mediante tutti i suoi momenti statistici (media, deviazione standard, etc.)  $\langle \mathbf{u}^m \rangle = \int f(\mathbf{x}) \mathbf{u}^m d\mathbf{u}$  dove  $f(\mathbf{x})$  è la funzione densità di probabilità. Un fenomeno si definisce omogeneo se la funzione  $f(\mathbf{x})$  è indipendente dalla posizione  $\mathbf{x}$ . La definizione di isotropia richiede invece che  $f(\mathbf{x})$  sia invariante sotto ogni rotazione e riflessione degli assi in  $\mathbf{x}$ .

viene immessa nel flusso e questa osservazione chiarisce anche perché vengano richiesti ‘numeri di Reynolds sufficientemente elevati’. Ciò infatti implica che gli effetti inerziali siano di gran lunga più importanti di quelli viscosi rendendo possibile un lungo processo di cascata dell’energia dalle strutture più grandi alle più piccole. Se si ipotizza che ad ogni passo della cascata le strutture perdano sempre più memoria delle caratteristiche dei vortici che hanno innescato la cascata, si conclude facilmente che le strutture più fini di qualunque flusso turbolento hanno tutte le stesse caratteristiche. Si avrà quindi che le piccole scale generate dietro un cilindro o a valle di un getto hanno la stessa statistica nonostante le scale più grandi abbiano una dinamica completamente differente.

La seconda ipotesi di Kolmogorov trae spunto dall’osservazione che la dinamica della turbolenza dipende da quanto rapidamente l’energia viene trasferita dalle grandi alle piccole scale e dal valore della viscosità che fissa il numero d’onda  $k$  a cui viene operato il taglio nel trasferimento di energia. Se il fenomeno fluidodinamico è statisticamente stazionario, essendo la cascata dall’energia non viscosa, si deduce che, detta  $\epsilon$  l’energia cinetica turbolenta (per unità di massa) prodotta nell’unità di tempo, questa sarà anche l’energia dissipata nell’unità di tempo<sup>8</sup>. Con questa osservazione si può comprendere la seconda ipotesi di Kolmogorov che dice: “per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, le caratteristiche delle piccole scale di tutti i flussi turbolenti sono universali e sono determinate dalla viscosità  $\nu$  e dalla potenza dissipata  $\epsilon$ .”

Questa osservazione potrebbe apparire di scarsa utilità per stime quantitative, tuttavia considerazioni di tipo dimensionale ci portano a concludere che con  $\epsilon$  e  $\nu$  c’è un solo modo per costruire delle scale di lunghezza, velocità e tempo. In particolare, osservando che  $\epsilon$  è un’energia per unità di tempo e unità di massa si ottiene

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad t_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}, \quad (10.29)$$

rispettivamente per la lunghezza, velocità e tempo delle scale dissipative (le più piccole).

Ricordiamo ora, che per un processo stazionario  $\epsilon$  coincide con la potenza immessa nel flusso dalle scale di moto più grandi; dette quindi  $U$  ed  $L$ , rispettivamente, la velocità e la lunghezza caratteristiche di queste scale, si ottiene da considerazioni dimensionali  $\epsilon = U^3/L$ . È utile osservare che in questa stima dimensionale non è stata considerata la viscosità in quanto per le strutture più grandi gli effetti viscosi sono trascurabili e le questioni energetiche devono coinvolgere fattori puramente inerziali.

Dalla stima per  $\epsilon$  e dalle relazioni (10.29), ricordando la definizione del numero di Reynolds  $Re = UL/\nu$ , si ottiene:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}, \quad \frac{U}{u_\eta} = Re^{1/4}, \quad \frac{T}{t_\eta} = Re^{1/2}, \quad (10.30)$$

dove  $T = L/U$  è la scala dei tempi dei moti a grande scala.

<sup>8</sup>Infatti, se così non fosse, l’energia si dovrebbe accumulare alle scale intermedie che, avendo un contenuto di energia variabile nel tempo, non potrebbero essere statisticamente stazionarie.

Queste relazioni permettono di stimare i rapporti tra le caratteristiche delle scale più grandi e quelle più piccole in un flusso turbolento in funzione del solo numero di Reynolds ed hanno ripercussioni di straordinaria importanza pratica per le misure sperimentali, per le simulazioni numeriche e per la possibilità di predizione di un flusso turbolento.

Dopo aver messo in relazione le strutture più piccole con le più grandi, rimane da analizzare la dinamica delle strutture intermedie con dimensione  $r$  tale che  $L \gg r \gg \eta$ .

In base a quanto visto finora, è facile convincersi che la viscosità avrà un'influenza trascurabile in quanto agisce solo alle scale più piccole. D'altra parte l'energia viene immessa nel flusso dalle scale più grandi da cui ne consegue che le scale intermedie vedranno solo un flusso di energia in transito, proveniente dai grandi vortici e trasferito verso i vortici dissipativi. In base a quanto detto, la terza ipotesi di Kolmogorov afferma che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le caratteristiche (la statistica) delle strutture di dimensione  $r$  (con  $L \gg r \gg \eta$ ) sono universali e dipendono unicamente da  $\epsilon$  (e quindi sono indipendenti da  $\nu$ ).

Ciò comporta che se  $u_r$  è la velocità delle scale di dimensione  $r$  si ottiene

$$\frac{u_r^3}{r} = \epsilon = \frac{U^3}{L}, \implies u_r = \frac{U}{L^{1/3}} r^{1/3}, \quad \text{e} \quad t_r = \frac{r}{u_r} = \frac{L^{1/3}}{U} r^{2/3}. \quad (10.31)$$

Queste stime indicano che le strutture con scale  $r$  intermedie tra  $L$  ed  $\eta$  hanno una velocità caratteristica che cresce solo come  $r^{1/3}$  mentre i tempi caratteristici crescono come  $r^{2/3}$ . La conseguenza di ciò è che i vortici più grandi hanno le velocità più intense ed una dinamica più lenta mentre per i gradienti di velocità  $\nabla u \sim u_r/r \approx r^{-2/3}$  si ha che quelli più intensi sono alle scale più piccole<sup>9</sup>.

Notiamo a margine che dall'ultima ipotesi si deriva la famosa legge di potenza ( $k^{-5/3}$ ) per lo spettro di energia. Se infatti si definisce lo spettro come  $E(k)$  tale che

$$K = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (10.32)$$

con  $K$  energia cinetica per unità di massa del flusso, dalla terza ipotesi di Kolmogorov e da argomenti dimensionali si ottiene  $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ , in cui  $C$  è una costante universale<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Da questa stima sembrerebbe che i gradienti diventino infiniti per  $r \rightarrow 0$ , mentre in realtà bisogna ricordare che le formule (10.31) valgono solo per  $L \gg r \gg \eta$ . Viceversa quando  $r \rightarrow 0$  risulta  $r$  dello stesso ordine di  $\eta$  ed il campo di velocità si 'regolarizza' essendo  $u_r \sim r$  con dei gradienti finiti.

<sup>10</sup>A questo risultato si giunge facilmente ricordando che dimensionalmente  $k$  è l'inverso di una lunghezza da cui ne consegue che le dimensioni di  $E(k)$  sono una velocità al quadrato per una lunghezza (ossia quelle di un'energia cinetica per unità di massa moltiplicata per una lunghezza). D'altra parte nel range inerziale si dispone solo di  $\epsilon$  per poter soddisfare requisiti dimensionali per cui ponendo  $[E(k)] = C[\epsilon^\alpha k^\beta] = [U^2 L]$  si ricava  $\alpha = 2/3$  e  $\beta = -5/3$ .

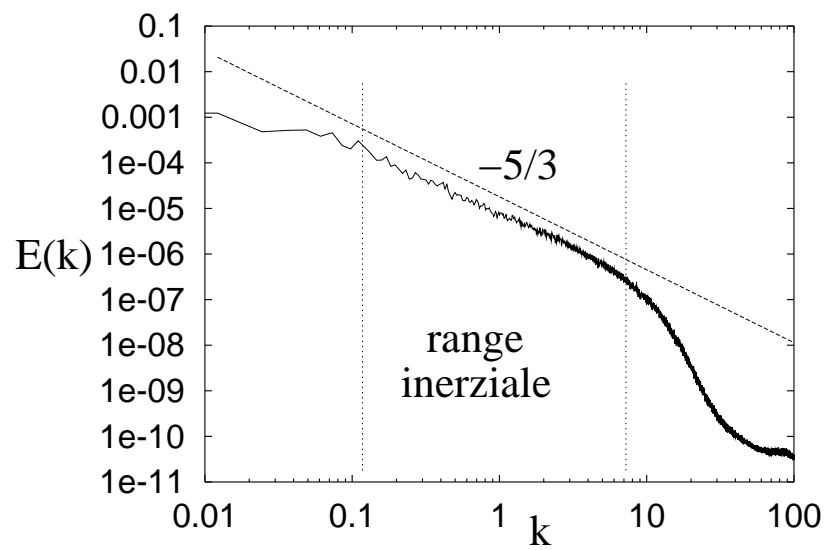


Figura 10.13: Spettro della turbolenza omogenea ed isotropa. La linea è la legge di potenza  $k^{-5/3}$  riportata per confronto.



# Capitolo 11

## Forze fluidodinamiche e similitudini

Da un punto di vista ingegneristico, le grandezze di maggior interesse in uno studio fluidodinamico sono le forze che il fluido esercita sul corpo, sia localmente che integrate su tutta la struttura. Per esempio un aereo in volo si sostiene grazie alle forze di pressione che il fluido esercita sui pannelli di rivestimento dell'ala; la determinazione delle forze locali sarà importante per dimensionare lo spessore dei pannelli di rivestimento ed il tipo di rivettatura mentre l'entità della forza integrata sezione per sezione servirà per il dimensionamento della trave alare (longherone) (figura 11.1).

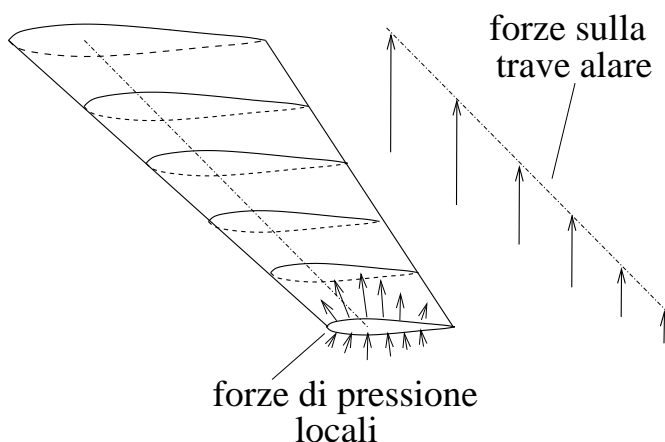


Figura 11.1: Schema di forze locali ed integrate su un'ala tridimensionale.

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, la soluzione per via analitica di problemi fluidodinamici è relegata a casi estremamente semplici e di scarsissima applicabilità pratica per cui di regola si ricorre all'analisi sperimentale. In questo caso, tuttavia, ci si scontra immediatamente con problemi pratici che risulteranno immediatamente evidenti con un esempio pratico.

Immaginiamo di voler determinare la forza di resistenza  $R$  alla quale è sottoposto un cilindro infinitamente lungo investito da un flusso ortogonale all'asse.

Identifichiamo le grandezze significative per studiare il problema in:

$$U, D, a, \rho, \mu$$

con  $U$  velocità del flusso indisturbato,  $D$  diametro del cilindro,  $\rho$  densità del fluido,  $\mu$  viscosità dinamica del fluido ed  $a$  velocità del suono.

Individuate le grandezze che influiscono sulla resistenza  $R$  si tratta quindi di determinare una funzione  $f$  tale che

$$R = f(U, D, a, \rho, \mu), \quad (11.1)$$

funzione che non possiamo definire teoricamente, ma solo tramite una prova sperimentale.

Volendo procedere in modo sistematico, per valutare l'influenza di ogni parametro sulla resistenza  $R$ , bisogna fissarne quattro e variare il rimanente per un numero discreto di valori; per esempio, fissati  $D, a, \rho$  e  $\mu$ , eseguiamo le prove facendo variare la velocità  $U$ . I dati che si ottengono formeranno una curva che sarà tanto più continua quanto più i valori di velocità per cui si sono effettuate le prove sono numerosi (figura 11.2).

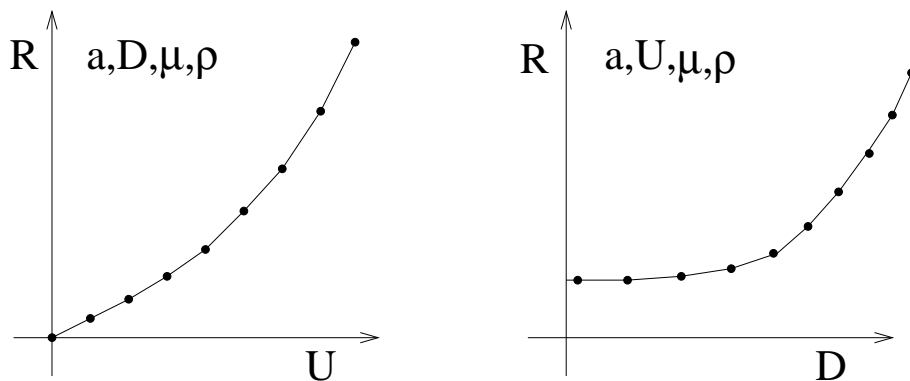


Figura 11.2: Variazione della resistenza con la velocità ed il diametro lasciando invariati gli altri parametri.

Per ogni serie di prove si otterrebbero quindi dei grafici come quelli di figura 11.2 applicabili sono per il set di valori fissati. Appare allora chiaro che se volessimo esplorare la dipendenza di  $R$  da  $U$  in modo completo dovremmo ripetere delle prove come quelle riportate in figura 11.2 per tutti i possibili valori dei parametri.

Si arriva quindi facilmente alla conclusione che in un problema così semplice, accontentandoci di avere ogni curva interpolata su dieci punti, bisogna effettuare  $10^5$  prove sperimentali per conoscere la dipendenza di  $R$  dai parametri selezionati <sup>1</sup>.

A parte l'impossibilità pratica di effettuare un così elevato numero di prove, sorge immediatamente il problema della fruibilità dei dati ottenuti: se immaginiamo infatti di organizzare i risultati come in figura 11.2 otterremmo  $10^4$  grafici la cui consultabilità sarebbe sicuramente problematica. C'è inoltre il problema dei costi del modello in quanto

<sup>1</sup>In realtà le prove sono molte di più in quanto oogni caso andrebbe ripetuto più volte per poter calcolare un valore medio della resistenza e poter stimare l'errore di misura. Lasciemo comunque queste considerazioni al di fuori della presente trattazione.



far variare  $D$  implica effettuare prove con cilindri di dimensioni diverse. Se invece del cilindro si immagina di dover fare delle prove su un modello in scala di un aereo, di un'automobile o di una nave (i cui modelli possono costare alcune decine di milioni) si capisce immediatamente che c'è un solo modello a disposizione e da quello bisogna estrarre tutta l'informazione necessaria.

Evidentemente c'è un metodo sperimentale più semplice che permette effettuare un ridotto numero di prove ed organizzare l'informazione in modo razionale; questo metodo si basa sulla teoria della similitudine dinamica che poggia le sue fondamenta sul teorema di Buckingham.

La similitudine dinamica permette anche di rispondere ad un'altra domanda che ci si deve porre quando si effettua un esperimento: se si effettuano le prove sperimentali su un modello in scala, come si utilizzano le informazioni ottenute sul fenomeno di dimensioni reali? Sebbene il quesito potrebbe sembrare banale, la risposta è stata trovata solo nel secolo scorso attraverso innumerevoli tentativi in diverse direzioni.

## 11.1 teorema di Buckingham ed analisi dimensionale

Il teorema di Buckingham si basa sull'assunzione che le relazioni utilizzate siano dimensionalmente omogenee, ossia che tutti i termini di un'equazione abbiano le stesse dimensioni. Se questa ipotesi è verificata si può affermare che se un fenomeno è governato da  $N$  parametri attraverso una relazione del tipo  $f(P_1, P_2, \dots, P_N) = 0$ , e questi  $N$  parametri possono essere descritti da  $K$  dimensioni fondamentali ( $K$  numero minimo), è allora possibile studiare il fenomeno tramite  $N - K$  gruppi adimensionali  $\Pi_j$  con una relazione del tipo  $g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-K}) = 0$ .

Per passare dalla funzione  $f$  alla funzione  $g$  si deve individuare una base di  $K$  variabili  $P_i$  che vengono utilizzate per adimensionalizzare le rimanenti e le  $K$  variabili devono avere le seguenti caratteristiche:

1. contengano tutte le  $K$  dimensioni fondamentali;
2. siano tra loro indipendenti, cioè non devono da sole costituire un gruppo adimensionale.

Riconsideriamo ora il precedente esempio del cilindro e vediamo come procedere praticamente:

Per prima cosa scriviamo le dimensioni relative alle grandezze che descrivono il fenomeno, indicando con  $L$  la lunghezza,  $M$  la massa e  $T$  il tempo

$$[R] = [MLT^2]$$

$$[U] = [LT^{-1}]$$

$$[\rho] = [ML^{-3}]$$

$$[\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

$$[D] = [L]$$

$$[a] = [LT^{-1}]$$

da cui osserviamo che risulta  $K = 3$  (  $M, L, T$  ) e  $N = 6$  (  $R, U, a, \rho, \mu$  ) con  $N - K = 3$  si ha pertanto:

$$R = f(U, D, a, \rho, \mu) \iff \Pi_1 = g(\Pi_2, \Pi_3).$$

Per trovare i gruppi adimensionali  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , utilizziamo il metodo delle variabili ripetute che consiste nell'isolare i  $K$  parametri in modo da far comparire tutte le dimensioni fondamentali. Per esempio la terna (  $U, D, a$  ) non è accettabile poiché in queste variabili manca la dimensione  $M$ , mentre la terna (  $U, D, \rho$  ) va bene perché contiene tutte le dimensioni fondamentali  $M, L, T$ .

Consideriamo come  $K$  variabili  $D, U, \rho$ , assicurandoci che i parametri scelti siano tra loro indipendenti, cioè la seguente equazione deve ammettere come unica soluzione quella banale,

$$[D]^\alpha [U]^\beta [\rho]^\gamma = M^0 L^0 T^0,$$

che equivalentemente si può scrivere:

$$L^\alpha L^\beta T^{-\beta} M^\gamma L^{-3\gamma} = M^0 L^0 T^0,$$

ed esplicitando i termini si ha:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ -\beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Il sistema, avendo determinante non nullo, ha come unica soluzione  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  e quindi la base è indipendente; inoltre se la base non soddisfacesse la condizione 1, la matrice del sistema conterrebbe una colonna nulla e quindi non avrebbe rango massimo; di conseguenza la condizione 1 è condizione necessaria per soddisfare la condizione 2.

Determiniamo i parametri adimensionali imponendo le seguenti condizioni:

$$\Pi_1 = U^\alpha D^\beta \rho^\gamma \mu, \quad \Pi_2 = U^\alpha D^\beta \rho^\gamma a, \quad \Pi_3 = U^\alpha D^\beta \rho^\gamma R \quad (11.2)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  costanti incognite, tali da rendere adimensionali i gruppi  $\Pi_j$ , con  $j=1, 2, 3$ , costruiti affiancando al gruppo  $U^\alpha D^\beta \rho^\gamma$  le variabili che non formano la base prese una alla volta. Imponendo l'adimensionalità dei gruppi formati si ottiene:

$$[M^0 L^0 T^0] = [ML^{-1}T^{-1}L^\alpha T^{-\alpha}L^\beta M^\gamma L^{-3\gamma}] = [M^{(1+\gamma)}L^{(-1+\alpha+\beta-3\gamma)}T^{(-1-\alpha)}],$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [LT^{-1}L^\alpha T^{-\alpha}L^\beta M^\gamma L^{-3\gamma}] = [M^\gamma L^{(1+\alpha+\beta-3\gamma)}T^{(-1-\alpha)}],$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [MLT^{-2}L^\alpha T^{-\alpha}L^\beta M^\gamma L^{-3\gamma}] = [M^{(\gamma-1)}L^{(1+\alpha+\beta-3\gamma)}T^{(-2-\alpha)}],$$

da cui, ponendo l'uguaglianza fra gli esponenti dei termini omologhi si ottengono i seguenti gruppi adimensionali:

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{UD\rho}, \quad \Pi_2 = \frac{a}{U}, \quad \Pi_3 = \frac{R}{\rho U^2 D^2}. \quad (11.3)$$

Con questi gruppi adimensionali si giunge quindi ad una relazione del tipo

$$\frac{R}{\rho U^2 D^2} = g\left(\frac{\mu}{UD\rho}, \frac{a}{U}\right), \quad (11.4)$$

che è il risultato del teorema di Buckingham.

Bisogna notare che la determinazione della funzione  $g$  richiede ancora delle prove sperimentali ma con evidente vantaggio rispetto alla relazione originale (11.1). Imponendo infatti le stesse richieste sulla sperimentazione, cioè avere informazioni su curve ricavate interpolando dieci punti, occorrono  $10^2$  esperimenti usando la funzione “g” contro i  $10^5$  necessari per determinare la funzione “f”. Analizzando l'espressione (11.4) scopriamo che la forza del teorema di Buckingham consiste nel riunire le variabili in gruppi adimensionali ed escludere tutte quelle prove che danno lo stesso numero adimensionale. Per esempio nella relazione (11.1) avremmo variato separatamente  $\mu$ ,  $U$ ,  $D$  e  $\rho$  ognuno indipendentemente dall'altro mentre al contrario l'espressione (11.4) ci dice che questi parametri agiscono in modo combinato quindi qualunque set di valori di  $\mu$ ,  $U$ ,  $D$  e  $\rho$  che fornisca lo stesso valore per il gruppo  $\mu/(UD\rho)$  darà lo stesso risultato in  $g$ .

A patto di soddisfare le ipotesi di completezza dimensionale ed indipendenza, qualunque set di  $K$  variabili è corretto per la determinazione dei gruppi adimensionali. Nel caso precedente, ad esempio, le terne  $(a, D, \rho)$  o  $(\mu, \rho, U)$  potevano essere ugualmente utilizzate giungendo chiaramente ad una relazione finale diversa dalla (11.4) e contenente differenti gruppi adimensionali. Sebbene in linea di principio non ci sia una funzione  $g$  migliore delle altre, praticamente è invalso l'uso di alcuni gruppi adimensionali per i quali è disponibile una maggiore esperienza sperimentale ed una letteratura più vasta.

L'operazione precedente alla determinazione della funzione  $g$ , quindi, è quella di rendere più ‘comoda’ la sua espressione, per cui solitamente si cerca di ottenere gruppi adimensionali noti. Notiamo a tal fine che da un punto di vista dimensionale un parametro si può moltiplicare per un fattore numerico, oppure usarne l'inverso o sostituire un suo termine con uno dimensionalmente equivalente senza alterarne il significato. Chiaramente la funzione  $g$  assumerà una forma completamente differente ma ciò non costituisce un problema visto che è ancora da determinare sperimentalmente. Riferendoci sempre

all'esempio considerato osserviamo che i seguenti gruppi adimensionali sono largamente usati in fluidodinamica

$$Re = \frac{UD\rho}{\mu}, \quad M = \frac{U}{a}, \quad c_D = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}, \quad (11.5)$$

dove  $S$  è la superficie frontale del cilindro esposta alla corrente fluida,  $Re$  è il numero di Reynolds,  $M$  è il numero di Mach e  $c_D$  è il coefficiente di resistenza.

La relazione (11.4) è quindi equivalente alla seguente

$$c_D = h(Re, M), \quad (11.6)$$

per la quale sono disponibili molti risultati in letteratura.

La trasformazione di parametri adimensionali in una forma nota nasconde talvolta delle insidie alle quali bisogna fare attenzione analizzando fisicamente le operazioni compiute. Per esempio la sostituzione del primo membro della (11.4) con il termine  $c_D$  implica la moltiplicazione per un fattore 2 e la sostituzione di  $D^2$  con  $S$ . Se con  $S$  si intende la superficie frontale del cilindro per unità di lunghezza allora l'operazione è lecita ma se, al contrario,  $S = Dl$  è la superficie frontale allora si è introdotto involontariamente un altro parametro che è la lunghezza assiale del cilindro  $l$  e questo non è ammesso a meno che non si introduca a secondo membro il nuovo gruppo adimensionale  $l/D$ .

La sostituzione di  $S$  con  $Dl$  non è ammessa in quanto nella (11.1) non era stata inizialmente contemplata la lunghezza del cilindro  $l$  tra le variabili del fenomeno. Questa osservazione pone in risalto il fatto che la selezione iniziale delle variabili è la fase più delicata di tutto il processo di analisi. La mancata inclusione di un parametro fondamentale porterebbe infatti ad una relazione finale priva degli effetti fisici più rilevanti. Al contrario, considerare dei parametri influenti produrrebbe delle relazioni finali inutilmente complicate che renderebbero troppo costosa o impossibile la sperimentazione.

## 11.2 similitudine dinamica

La relazione (11.6) dà la risposta ad una delle prime domande di questo capitolo cioè: come utilizzare i risultati ottenuti su un modello per il fenomeno in dimensioni reali? Osserviamo infatti che nella (11.6) compaiono solo gruppi adimensionali e non c'è riferimento esplicito alle dimensioni del modello, questo implica che la funzione  $h$  si applica ugualmente al fenomeno reale ed a quello in scala ed i dati ottenuti per un caso possono essere applicati all'altro. La relazione (11.6) dice in particolare che se sono uguali i gruppi adimensionali per fenomeno reale e fenomeno in scala allora saranno uguali anche i coefficienti di forza ossia i due fenomeni avvengono in condizioni di *similitudine dinamica*. Se osserviamo poi che anche le equazioni della fluidodinamica possono essere espresse in forma adimensionale allora si vede che i campi di moto saranno cinematicamente simili ossia i valori *adimensionali* di velocità pressione densità etc. saranno gli stessi in punti corrispondenti.

Per riassumere possiamo dire che se due fenomeni sono geometricamente simili ed hanno i gruppi adimensionali uguali allora avranno gli stessi coefficienti di forza ed un campo di moto cinematicamente simile permettendo di trasferire informazioni da un caso all'altro.

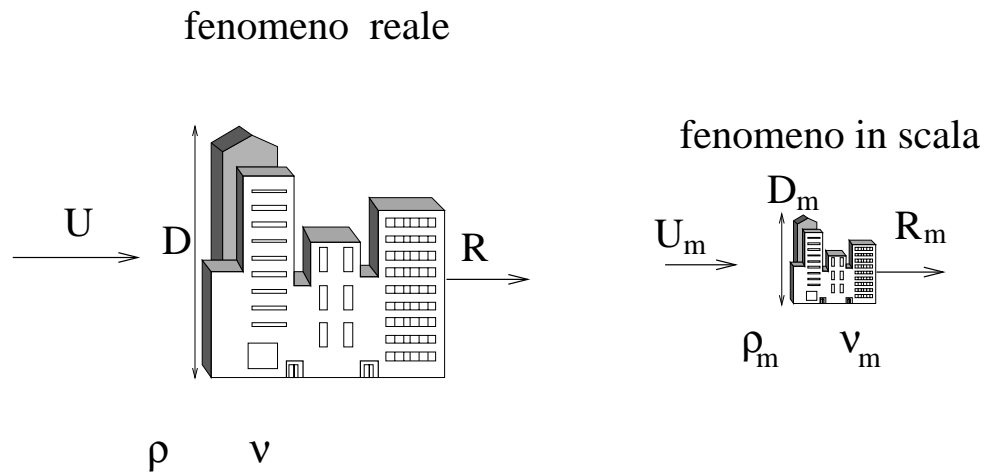


Figura 11.3: Esempio di similitudine dinamica per un edificio investito dal vento.

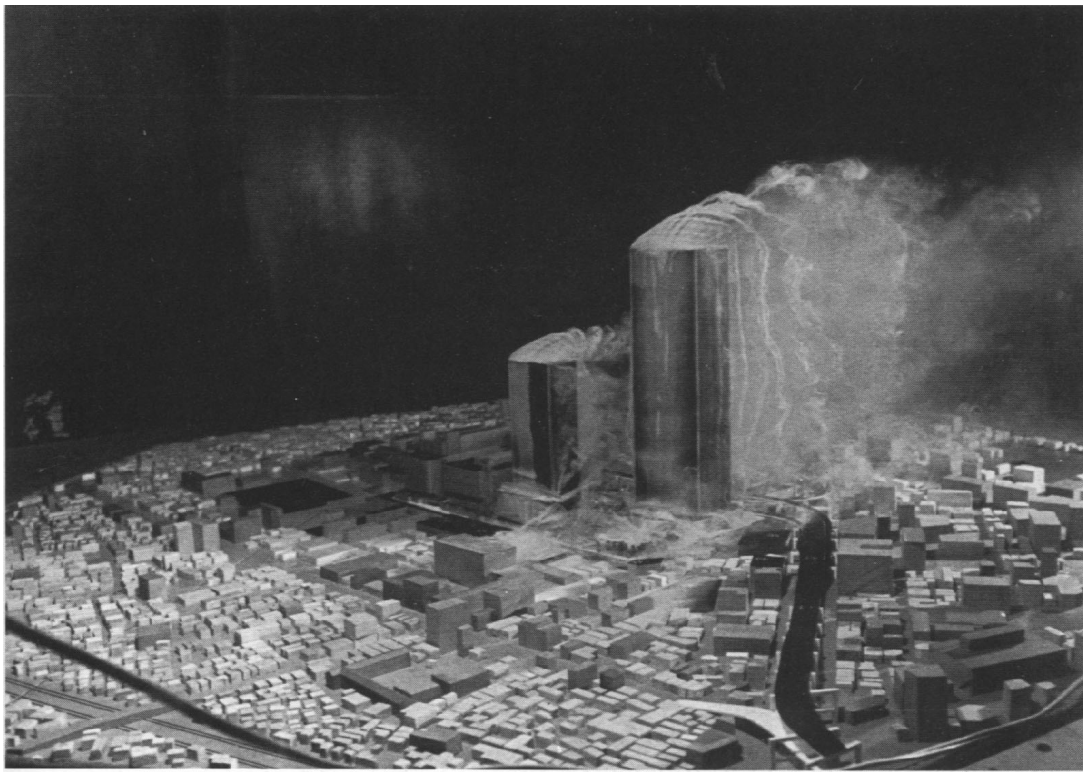


Figura 11.4: Prova in galleria del vento di un modello di edificio e della sua interazione con il centro abitativo circostante in determinate condizioni di vento.

Riferendoci sempre all'esempio del cilindro immaginiamo che il fenomeno reale si svolga in aria a  $Re = 10^5$ , per un cilindro di diametro  $D = 1\text{m}$  e lunghezza  $l = 2\text{m}$  mentre per modello in scala  $1 : 20$  in acqua in condizioni di similitudine dinamica viene misurata una resistenza  $R_m = 8\text{N}$ . Vogliamo calcolare quale sarà la forza di resistenza sul prototipo. Come primo passo calcoliamo il coefficiente di resistenza del modello  $c_D = 2R_m/(\rho_m U_m^2 S_m)$ , per il quale ci serve la velocità. Questa possiamo ricavarla dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds  $Re = Re_m = 10^5$ , da cui, nota la viscosità cinematica dell'acqua si ricava  $U_m = 2\text{m/s}$ . Dal calcolo del coefficiente di resistenza si ottiene facilmente  $c_D = 0.8$  per cui per il cilindro di dimensioni reali si avrà  $R = \rho U^2 S c_D / 2 = 1\text{N}$ .

---

### ESEMPIO

---

In un fenomeno di fluidodinamica geofisica in aria, si stima che l'energia dissipata  $E$  è funzione della velocità di rotazione  $\Omega$  del sistema, della velocità del fluido  $U$ , della sua densità  $\rho$ , dell'accelerazione di gravità  $g$  e delle dimensioni caratteristiche del fenomeno  $l$ . In un laboratorio si riproduce il fenomeno in acqua in scala  $f_s$  e si misura un'energia dissipata  $E_m$ . Calcolare l'energia dissipata nel fenomeno reale. Se la velocità in laboratorio è  $U_m$  quanto vale la  $U$  del fenomeno reale?

$$f_s = 1 : 10^5 \quad E_m = 2.04 \text{ J} \quad U_m = 0.003 \text{ m/s}$$

#### Soluzione

La relazione è del tipo  $E = f(\Omega, U, l, g, \rho)$  che, risultando  $N = 6$  e  $K = 3$ , può essere scritta con 3 parametri adimensionali  $\Pi_3 = F(\Pi_1, \Pi_2)$ . Dal metodo delle variabili ripetute si ricava  $\Pi_1 = U/(\Omega l)$ ,  $\Pi_2 = g/(\Omega^2 l)$  e  $\Pi_3 = E/(\Omega^2 l^5 \rho)$ .

Dall'uguaglianza dei parametri adimensionali tra esperimento e fenomeno reale si ottiene:  $E = E_m \rho / (\rho_m f_s^4) = 2.5297 \cdot 10^{17} \text{ J}$  e  $U = U_m / \sqrt{f_s} = 0.9486 \text{ m/s}$ , essendo  $f_s = l_m / l$ .

---

---

**ESEMPIO**


---

Lo scambio termico  $C$  di un dispositivo viene misurato dal rapporto tra la potenza termica smaltita e la differenza di temperatura ( $[C] = W/K$ ). Da un'analisi preliminare risulta che  $C = f(U, \rho, k, \Delta T, L)$  in cui  $U$  è la velocità,  $\rho$  la densità e  $k$  la diffusività termica del fluido.  $\Delta T$  è la differenza di temperatura applicata ed  $L$  una dimensione del dispositivo. Se l'unica grandezza che varia è  $U$  e per un modello di dimensione  $L_m$  lo scambio termico vale  $C_m$ , quanto vale  $C$  per un dispositivo di dimensione  $L$ ?

$$L_m = 0.4 \text{ m} \quad C_m = 80 \text{ W/K} \quad L = 2 \text{ m}$$

**Soluzione**

In base al teorema di Buckingham essendoci  $N = 6$  variabili e  $K = 4$  dimensioni fondamentali il fenomeno può essere descritto mediante  $N - K = 2$  parametri adimensionali. Utilizzando il metodo delle variabili ripetute si ha una delle possibili soluzioni:

$$\frac{C\Delta T}{U^3\rho L^2} = g\left(\frac{k}{UL}\right).$$

In condizioni di similitudine dovranno risultare uguali i gruppi adimensionali ed essendo  $U$  l'unica grandezza che varia (oltre naturalmente ad  $L$  e  $C$ ) si ottiene

$$\frac{k}{UL} = \frac{k}{U_m L_m} \implies U = U_m \frac{L_m}{L}, \quad \frac{C\Delta T}{U^3\rho L^2} = \frac{C_m\Delta T}{U_m^3\rho L_m^2} \implies C = C_m \frac{U^3 L^2}{U_m^3 L_m^2}$$

da cui  $C = C_m L_m / L = 16 \text{ W/K}$ .

---

---

**ESEMPIO**


---

Il calore  $C$  che smaltisce un particolare dispositivo in aria a  $15\text{ }^\circ\text{C}$  è espresso dalla relazione  $C = f(g, \Delta T, \alpha, H, \nu, \rho)$  con  $g$  accelerazione di gravità,  $\Delta T$  differenza di temperatura,  $\alpha$  coefficiente di espansione termica,  $H$  dimensione principale,  $\nu$  viscosità cinematica e  $\rho$  densità del fluido. Se un modello in scala  $f_S$  funzionante in acqua alla temperatura di  $20\text{ }^\circ\text{C}$  per un dato  $\Delta T_m$  smaltisce il calore  $C_m$ , quale sarà il  $\Delta T$  di funzionamento ed il calore smaltito dal dispositivo reale in condizioni di similitudine dinamica?

$$f_S = 1 : 7 \quad \Delta T_m = 1.8\text{ }^\circ\text{C} \quad C_m = 280\text{ J}$$

**Soluzione**

Dal teorema di Buckingham, risultando  $N = 7$  e  $K = 4$  si ha che la relazione si può esprimere tramite 3 parametri adimensionali. Prendendo come variabili ripetute  $\Delta T$ ,  $H$ ,  $\nu$  e  $\rho$  si ottiene

$$\frac{C}{H\rho\nu^2} = F\left(\frac{gH^3}{\nu^2}, \alpha\Delta T\right),$$

da cui si ricava facilmente  $\Delta T = \Delta T_m \alpha_m / \alpha = 0.108\text{ K}$  e  $C = C_m (H/H_m)(\rho/\rho_m)(\nu/\nu_m)^2 = 435.93\text{ J}$  (con i valori per  $\alpha = 3.48 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$  per l'aria e  $\alpha_m = 2.10 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$  per l'acqua).

---

### 11.3 similitudine distorta

Nell'esempio del paragrafo precedente è stato in realtà commesso un 'errore' che costituisce praticamente la regola in campo sperimentale. Ricordiamo, infatti, che la condizione di similitudine dinamica prevede che *tutti* i gruppi adimensionali che governano il fenomeno debbano essere gli stessi per poter applicare i risultati della similitudine dinamica. Considerando che la velocità del suono in acqua è di circa  $1500\text{ m/s}$  si ha che se calcoliamo il numero di Mach di esperimento e fenomeno reale si ha, rispettivamente  $M_m = U_m/a_m = 0.0013$ ,  $M = U/a = 0.0044$ ; poiché risulta  $M \neq M_m$  verrebbe da concludere che la similitudine dinamica non è rispettata!

Prima di tirare delle conclusioni, vediamo mediante un esempio con parametri leggermente differenti se è possibile mantenere la similitudine dinamica in qualche altro modo. Si consideri il problema del cilindro in cui siano assegnati i seguenti dati:

$$D = 1.5\text{ m}, \quad U = 50\text{ m/s}, \quad D_m = 30\text{ cm}$$

Abbiamo per i parametri adimensionali:

$$Re = \frac{Ud}{\nu} = \frac{Ud\rho}{\mu}; \quad Re_m = \frac{\rho_m U_m D_m}{\mu}$$



$$M = \frac{U}{a}; \quad M_m = \frac{U_m}{a_m}$$

Un primo modo per avere lo stesso numero di Reynolds è quello di aumentare di cinque volte la velocità del flusso lasciando invariate le altre grandezze. In questo modo si ottiene lo stesso numero di Reynolds, ma diverso numero di Mach

$$M = 0.147, \quad M_m = 0.7.$$

Proviamo allora a cambiare il fluido, considerando l'acqua al posto dell'aria, e utilizziamo una velocità per il modello tale da conservare la similitudine dinamica del numero di Reynolds:

$$Re = Re_m \Rightarrow \frac{Ud}{\nu_{aria}} = \frac{U_m D_m}{\nu_{acqua}}$$

$$U_m = \frac{\nu_{acqua} d}{\nu_{aria} D_m} U$$

$$U_m = 5 \frac{1}{10} 50 = 25 \text{ m/s}$$

Anche se la similitudine del numero di Reynolds è rispettata, non lo è quella del numero di Mach; infatti

$$M = 0.147$$

$$M_m = \frac{U_m}{a_m} = \frac{25}{1500} = 0.016$$

Sembrerebbe che non ci sia via di uscita perché qualunque accorgimento si cerchi di adottare nasconde comunque degli inconvenienti dovuti al fatto che non si riescono a fissare i parametri in conformità con le regole dell'analisi dimensionale <sup>2</sup>.

In realtà sebbene le due soluzioni proposte sembrano essere equivalenti in quanto portano entrambe ad un differenza nel numero di Mach da un punto di vista fluidodinamico sono profondamente differenti e mentre la prima risulta inaccettabile, la seconda costituisce la procedura effettivamente adottata nei laboratori. È infatti noto nella fluidodinamica

---

<sup>2</sup>Una possibilità estrema è usare lo stesso fluido ma aumentarne la densità nell'esperimento  $\rho_M = 5\rho$ , mantenendo la velocità del modello pari a quella del prototipo e conservando l'uguaglianza del numero di Mach. L'aumento della densità del fluido può essere ottenuta, per esempio, aumentandone la pressione e contemporaneamente diminuendone la temperatura (per evitare l'aumento della velocità del suono) anche se questa soluzione risulta estremamente costosa e pericolosa per la presenza di gas in pressione. In aggiunta questo stratagemma diventa tanto più oneroso quanto più diventa grande la scala del modello e produce delle forze estremamente elevate sui modelli a causa della crescita con  $\rho_m$  della pressione dinamica.

che gli effetti della comprimibilità in un flusso divengono apprezzabili solo per numeri di Mach  $> 0.3$  mentre al di sotto di questo valore di soglia il flusso si comporta come incomprimibile. Questo implica che per  $M \leq 0.3$  il numero di Mach non è un parametro che governa il flusso e quindi può essere trascurato. Alla luce di questo risultato appare allora chiaro che la prima soluzione che dà  $M_m = 0.7$  non fornirà dati in similitudine dinamica in quanto il flusso sarà influenzato da effetti di comprimibilità che sono assenti nel fenomeno reale. Al contrario la seconda soluzione con  $M_m = 0.016$  fornirà dei risultati in perfetta similitudine dinamica nonostante la differenza tra i numeri di Mach. In questa categoria di flussi ricade anche l'esempio della sezione precedente i cui risultati sono quindi corretti.

Questi esempi di similitudine vengono chiamati di *similitudine distorta* per distinguerli dalla similitudine esatta in cui tutti i parametri adimensionali sono uguali. In questo campo non ci sono delle regole fisse ma ci si affida piuttosto alla sensibilità ed esperienza dello sperimentatore che conosce quali parametri può trascurare e quali invece deve preservare fedelmente per ottenere risultati utilizzabili in pratica.

## 11.4 Studio di flussi particolari

In questa sezione mostreremo attraverso degli esempi tipici come si applica l'analisi dimensionale a problemi applicativi. Rimane inteso che i seguenti esempi sono solo alcuni tra i problemi più comuni mentre, in generale, bisogna ricorrere alla teoria per trovare i gruppi adimensionali di interesse.

### 11.4.1 Flusso intorno a corpi immersi

In questa categoria ricadono tutti i flussi in cui uno stesso fluido 'bagna' completamente uno o più corpi e non sono presenti fenomeni di superficie libera. Un vento in atmosfera che investe un palazzo, un'automobile che corre in autostrada, un aereo in volo di crociera o un sottomarino in immersione profonda sono tutti flussi intorno a corpi immersi. Al contrario, una nave in mare aperto o persino un sottomarino con il periscopio in emersione (ossia con lo scafo immerso di qualche metro) non possono essere analizzati nell'ambito di questa schematizzazione in quanto i fenomeni di deformazione della superficie libera non vengono contemplati nella scelta dei parametri di interesse.

Indicando con  $q$  una generica grandezza da determinare la relazione che si utilizza per questa tipologia di problemi è la seguente:

$$q = f(L, l, \epsilon, \rho, \mu, U, a)$$

in cui  $L$  è la dimensione caratteristica del corpo,  $l$  tiene in conto le altre dimensioni (eventualmente  $l$  può essere del tipo  $l_i$   $i = 1, \dots, M$  per corpi di geometria complessa),  $\epsilon$  caratterizza la rugosità superficiale,  $\rho$  è la densità del fluido,  $\mu$  la sua viscosità dinamica,  $U$  la velocità della corrente indisturbata ed  $a$  la velocità del suono. Un'ispezione delle dimensioni dei parametri elencati rivela immediatamente  $K = 3$  per cui se  $q$  non introduce

dimensioni aggiuntive la relazione di sopra si può mettere nella forma

$$\Pi_q = g \left( \frac{l}{L}, \frac{\epsilon}{L}, \frac{\rho U D}{\mu}, \frac{U}{a} \right).$$

Il primo parametro dà le dimensioni dell'oggetto in forma adimensionale, il secondo è la rugosità relativa, il terzo il numero di Reynolds ed il quarto il numero di Mach. Dalla relazione di sopra si può osservare che, dando per scontata la similitudine geometrica (il che include anche la condizione sulla rugosità superficiale), il parametro  $\Pi_q$  dipende solo dal numero di Reynolds  $Re$  e dal numero di Mach  $Ma$ .

Prendiamo come esempio un aereo la cui velocità di crociera sia  $U = 400\text{Km/h}$  ed un suo modello in scala 1 : 10 e proviamo a calcolare il rapporto tra le forze di resistenza  $D$ . Supponendo rispettati i rapporti  $l/L$  ed  $\epsilon/L$ , imponiamo preliminarmente la similitudine sul numero di Reynolds assumendo di utilizzare lo stesso fluido per cui  $\mu = \mu_m$ . Osserviamo immediatamente che se pensassimo di aumentare la velocità del modello di un fattore 10 per compensare il fattore di scala geometrico otterremmo una velocità  $U_m = 4000\text{Km/h} \simeq 1100\text{m/s}$  che è chiaramente inaccettabile in quanto in regime ampiamente supersonico e quindi non renderebbe possibile nemmeno la similitudine distorta.

Se decidiamo allora di lasciare invariata la velocità della prova  $U = U_M$  l'unica possibilità che ci rimane è aumentare la densità del fluido del modello di dieci volte rispetto a quella del prototipo, preservando così tanto la similitudine in  $Re$  quanto quella in  $Ma$ . Ricordando ora che il coefficiente di resistenza è uguale per il modello e per il prototipo, possiamo scrivere per le forze:

$$c_D = c_{Dm}$$

$$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2} = \frac{D_m}{\frac{1}{2}\rho_m U_m^2 L_m^2}$$

$$D_m = \frac{\rho_m}{\rho} \frac{L_m^2}{L^2} D$$

$$D_m = \frac{1}{10} D$$

con  $D$  e  $D_m$  forza di resistenza rispettivamente sul prototipo e sul modello.

Un modo sicuramente più semplice per effettuare questa prova, consiste nel cambiare tipo di fluido ed utilizzarne uno con viscosità minore di quella dell'aria. In questo caso si deve quasi sicuramente rinunciare alla similitudine in Mach, tuttavia essendo il Mach del prototipo  $Ma \simeq 0.32$  si è giusto al limite per poter trascurare gli effetti della comprimibilità ed un qualunque esperimento con un Mach minore del valore trovato darebbe risultati simili.

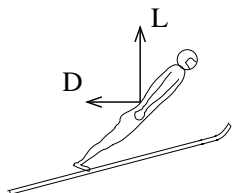
Viene lasciato al lettore, come facile esercizio, lo studio della similitudine con un fluido differente.

---

**ESEMPIO**


---

In una galleria del vento viene posto un modello di sciatore durante un salto (sci nordico) con una dimensione caratteristica di 40 cm ed investito da una velocità di 67.5 Km/h in una corrente d'acqua. Sapendo che la resistenza e la portanza misurate sul modello sono rispettivamente 4500 N e 5400 N, calcolare le forze corrispondenti avvertite da uno sciatore con dimensione caratteristica di 2 m in condizioni di similitudine dinamica. Perché l'esperimento non è stato fatto in aria?

**Soluzione**

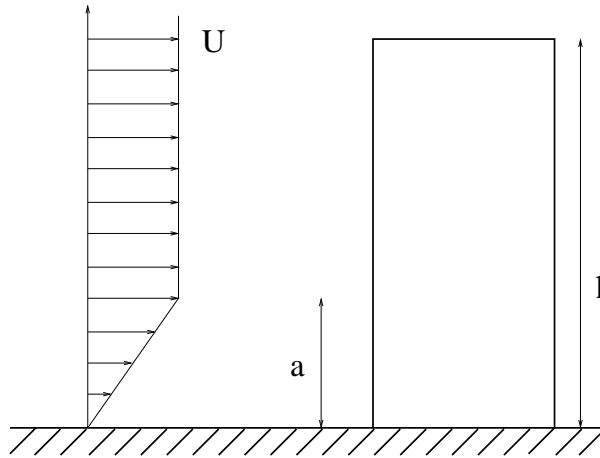
In condizioni di similitudine dinamica modello e sciatore devono avere lo stesso Reynolds  $U_m L_m / \nu_m = UL / \nu$ ,  $U = \nu / \nu_m \cdot L_m / L \cdot U_m = 50$  m/s. I coefficienti di forza devono essere gli stessi risultando:  $c_L = 2L_m / (\rho_m U_m^2 S_m)$  e quindi  $L = \rho U^2 S c_L = 1190.4$  N (avendo usato la relazione  $S / S_m = L^2 / L_m^2$ ). Procedendo analogamente per la resistenza si ha  $D = 992$  N.

Se l'esperimento fosse stato fatto in aria, per mantenere la similitudine sul numero di Reynolds sarebbe stata necessaria una velocità  $U_m = 281.2$  m/s sconfinando così nel campo dei flussi comprimibili.

---

## ESEMPIO

Un grattacielo alto  $h$  con una pianta quadrata di superficie  $S$  deve essere costruito in una zona dove mediamente si hanno venti di velocità massima  $U$  con un profilo come in figura. Facendo le prove su un modello in scala  $f_S$  in condizioni di similitudine dinamica si ottiene un coefficiente di resistenza pari a  $C_D$  (basato sul valore di velocità media). Calcolare il valore della resistenza del grattacielo e le condizioni per un esperimento in acqua.



$h = 150 \text{ m}$      $C_D = 0.85$      $a = h/3$   
 $S = 900 \text{ m}^2$      $U = 15 \text{ m/s}$      $f_S = 1 : 75$   
 Per il calcolo della resistenza utilizzare la superficie frontale del grattacielo.

## Soluzione

La velocità media è data da:

$$\bar{U} = \frac{1}{h} \int_0^h U dy = \frac{1}{h} \left( \int_0^a \frac{Uy}{a} dy + \int_a^h U dy \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{Ua}{2} + U(h-a) \right) = 12.5 \text{ m/s.}$$

Per la resistenza  $D = \rho \bar{U}^2 S_F C_D = 3.705 \cdot 10^5 \text{ N}$  (essendo  $S_F$  la superficie frontale del grattacielo pari a  $S_F = 30 \cdot 150 = 4500 \text{ m}^2$ ).

Per l'esperimento, dovendo uguagliare i numeri di Reynolds si avrà  $\bar{U}L/\nu = \bar{U}_m L_m / \nu_m$   $\bar{U}_m = \bar{U} \cdot L / L_m \cdot \nu_m / \nu = 62.5 \text{ m/s}$ .

---

**ESEMPIO**


---

Per determinare la portanza di un aereo al decollo in atmosfera standard viene effettuato un esperimento in galleria del vento su un modello in scala  $f_S$  e per mantenere la similitudine dinamica viene pressurizzata la galleria del vento. Calcolare la pressione di esercizio dell'esperimento sapendo che il rapporto tra la velocità del prototipo e quella del modello è  $U/U_m$ . Sapendo inoltre che sul modello viene misurata una portanza  $L_m$  calcolare la portanza sul prototipo.

*Ipotizzare uguali le temperature dell'aria nell'esperimento e nel fenomeno reale.*

$$f_s = 1 : 20 \quad U/U_m = 1/3$$

$$L_m = 90500 \text{ N}$$
**Soluzione**

Un aereo al decollo ha velocità ancora contenute, il parametro fondamentale di similitudine sarà quindi il numero di Reynolds.  $Re = Re_m$  implica che  $\rho_m/\rho = \mu_m UL/(\mu U_m L_m) = 1 \cdot U/U_m \cdot 1/f_S = 6.66$  ossia, essendo i due fenomeni alla stessa temperatura ( $p\rho = \text{const.}$ )  $p_m = 6.66p_0 = 6.66 \text{ atm}$ .

Dall'uguaglianza tra i coefficienti di portanza  $L = L_m \cdot \rho/\rho_m (U/U_m)^2 \cdot S/S_m = 603340 \text{ N}$ .

---

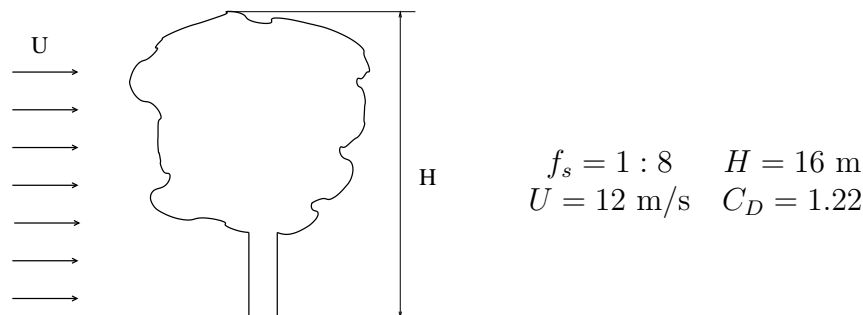


---

**ESEMPIO**


---

Misurando il coefficiente di resistenza di un albero mediante un modello in galleria del vento in scala  $f_s$  si ottiene un valore  $C_D$ . Sapendo che l'albero viene investito da un vento di velocità  $U$  calcolare le condizioni sperimentali per realizzare la similitudine. Se la superficie frontale dell'albero può essere stimata come  $S = 0.55H^2$  calcolare le forze di resistenza sull'albero e sul modello.

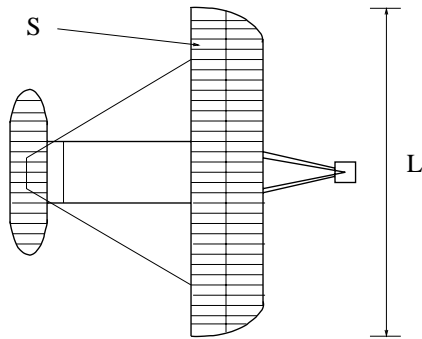
**Soluzione**

Affinché valga la similitudine dinamica ci deve essere l'uguaglianza tra i numeri di Reynolds per l'albero e per il modello in galleria del vento  $Re = Re_m$ , ossia  $UL/\nu = U_m L_m/\nu_m$ . Trattandosi per entrambi i casi di aria a pressione ambiente si ha  $\nu = \nu_m$  e quindi  $U_m = UL/L_m = U/f_S = 96 \text{ m/s}$  (notare che non è importante definire la grandezza  $L$  in quanto alla fine entra in gioco solo il fattore di scala  $f_S$ ). Quindi dalla definizione di resistenza:  $D = \rho U^2 (0.55H^2) C_D / 2 = 15138 \text{ N}$  e  $D_m = \rho_m U_m^2 (0.55H_m^2) C_D / 2 = 15138 \text{ N}$ .

---

## ESEMPIO

Nel primo tentativo di volo con esito positivo (1903) i fratelli Wright usarono un aereo con superficie alare  $S$ , apertura alare  $L$  che, utilizzando una potenza  $P$ , volò per alcune decine di secondi ad una velocità  $U$ . Calcolare il coefficiente di resistenza dell'aereo. Sapendo che la galleria del vento dei fratelli Wright non poteva contenere modelli più grandi di  $L_m$ , dire se questi furono in grado di effettuare esperimenti in similitudine dinamica.



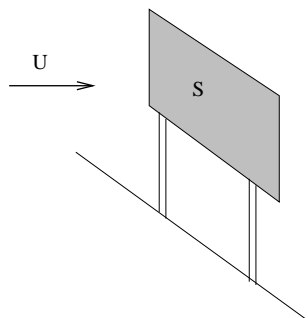
$$\begin{aligned} S &= 57 \text{ m}^2 & L &= 13.44 \text{ m} \\ U &= 60 \text{ Km/h} & P &= 5100 \text{ W} \\ L_m &= 40 \text{ cm} \end{aligned}$$

## Soluzione

Dalla relazione  $P = DU$  (con  $D$  la forza di resistenza) si può scrivere  $P = \rho U^3 SC_D/2$  da cui  $C_D = 2P/(\rho U^3 S) = 0.0311$ . Per avere la similitudine dinamica modello e prototipo devono avere lo stesso numero di Reynolds (per queste basse velocità di volo), ne consegue che  $U_m L_m/\nu_m = UL/\nu$  ossia  $U_m = UL/L_m = 560 \text{ m/s}$ . Questa velocità purtroppo a temperatura ambiente darebbe un valore del numero di Mach pari a  $Ma = 1.64$  il che invaliderebbe completamente i risultati dell'esperimento. *(A parte il fatto che la galleria del vento dei fratelli Wright non era in grado di raggiungere velocità così elevate, a quei tempi non erano nemmeno noti gli effetti del numero di Reynolds sui coefficienti di portanza e resistenza. Infatti i fratelli Wright effettuarono le prove in galleria a numeri di Reynolds considerevolmente più bassi di quelli di volo ottenendo dei risultati solamente indicativi per le prestazioni del prototipo.)*

## ESEMPIO

Un cartellone pubblicitario di superficie  $S$  viene investito da un vento costante di velocità  $U$  e necessita di due pali di sostegno per contrastare l'azione della corrente. Se un cartellone geometricamente simile (anche nella lunghezza dei pali) di superficie tripla venisse investito da una corrente a velocità doppia di quanti pali (identici ai precedenti tranne che per la lunghezza) si avrebbe bisogno per mantenere i pali in posizione?



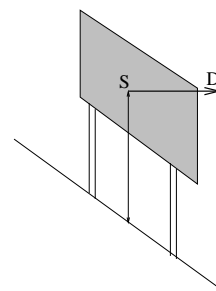
Suggerimento: considerare in entrambi i casi il flusso in regime di turbolenza sviluppata ed approssimare il numero dei pali all'intero più vicino.

**Soluzione**

Sul cartellone agirà una resistenza  $D = \rho U^2 S C_D / 2$  che genererà un momento alla base dei pali  $2M_l = M = D l$ , con  $M_l$  il momento sopportato da ogni singolo palo. Per il cartellone in scala si avrà  $M_m = D_m l_m = \rho U_m^2 S_m C_D / 2 l_m$ , dove si è tenuto conto che il  $C_D$  è lo stesso in entrambi i casi in quanto il flusso è in regime di turbolenza sviluppata. Ponendo  $M_m = n M_l$  e ricavando il  $C_D$  dall'espressione di  $M$  si ottiene

$$n = \left( \frac{U_m}{U} \right)^2 \frac{S_m l_m}{S l} 2 = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \approx 42,$$

avendo approssimato il risultato all'intero più prossimo.

**11.4.2 Flussi con superficie libera**

Quando un corpo si muove tra due fluidi immiscibili o, in modo equivalente uno dei due fluidi si muove in presenza o meno di un corpo, si ha inevitabilmente la deformazione dell'interfaccia tra i fluidi con la generazione di onde o comunque di fenomeni che coinvolgono scambi tra energia cinetica e potenziale. Due esempi tipici di questi flussi sono una nave che produce delle onde durante la sua navigazione oppure dell'acqua che passa da un bacino idrico ad un fiume attraverso una diga. Su una scala più piccola questi fenomeni si possono osservare anche in un bicchiere, mettendo sul fondo uno strato d'acqua ed in



superficie uno d'olio. Agitando il bicchiere si osserva la formazione di 'onde interne' la cui dinamica è appunto regolata da fenomeni di superficie libera.

Per questi flussi una qualunque quantità incognita  $q$  sarà esprimibile tramite una relazione del tipo:

$$q = f(\mu, \rho, U, g, \sigma, \epsilon, L, l)$$

in cui  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $\sigma$  la tensione superficiale. In base al teorema di Buckingham, questa espressione è equivalente alla seguente forma:

$$\Pi_q = h \left( \frac{l}{L}, \frac{\epsilon}{L}, \frac{U}{\sqrt{gL}}, \frac{UL\rho}{\mu}, \frac{\rho LU^2}{\sigma} \right) \quad (11.7)$$

in cui compaiono i nuovi parametri

$$We = \frac{\rho LU^2}{\sigma} \quad \text{e} \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}},$$

che sono rispettivamente il numero di Weber ed il numero di Froude. Il primo tiene in conto tutti i fenomeni relativi alla tensione superficiale e sarà importante per descrivere la dinamica su piccola scala. Il numero di Froude, al contrario, esprime il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle di gravità ed è un parametro rilevante per tutti i fenomeni che coinvolgono bilanci di energia potenziale.

I parametri  $l/L$  ed  $\epsilon/L$  sono gli stessi discussi nella sezione precedente e coinvolgono la similitudine geometrica. Questi di solito si suppongono simili anche se mantenere la similitudine sulla rugosità relativa può alle volte risultare di difficile realizzazione sperimentale.

Il numero di Reynolds esprime al solito il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosi e la sua influenza sul fenomeno va valutata caso per caso. Nei flussi intorno a carene di navi o dighe, il numero di Reynolds è solitamente dell'ordine delle centinaia di milioni o miliardi indicando che il flusso si trova in regime di turbolenza sviluppata. In questo caso la dipendenza del flusso dal numero di Reynolds diventa trascurabile rispetto agli effetti degli altri parametri e può essere semplificato dalla relazione (11.7). Questa operazione, tuttavia, nasconde un'insidia in quanto l'eliminazione di  $Re$  dalla (11.7) non implica che nel fenomeno non ci sono effetti viscosi ma solo che la loro entità non dipende dal valore del numero di Reynolds; ciò implica che quando si realizza l'esperimento in scala si deve essere sicuri che questo avvenga in regime di turbolenza sviluppata così come nel fenomeno reale.

Consideriamo come esempio il caso di una diga con dimensione caratteristica  $L = 20\text{m}$  e portata pari a  $Q = 125\text{m}^3/\text{s}$ , il cui modello è in scala  $1 : 15$  da cui risulta che  $L_m = L/15 = 1.33\text{m}$ .

La scala di velocità nella diga reale sarà  $U = Q/cL^2x$  con  $c$  costante che dipende dalla geometria della diga e la portata del modello è quindi

$$Q_m = cU_m L_m^2.$$

Poiché in questo caso né il numero di Weber né quello di Reynolds contano, imponiamo la similitudine sul numero di Froude:

$$\frac{U_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{U}{\sqrt{gL}},$$

$$U_m = \left(\frac{g_m}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{L_m}{L}\right)^{1/2} \frac{Q}{cL^2},$$

essendo  $g = g_M$ . Dai calcoli fatti sulla scala delle velocità del prototipo e sulla portata smaltita dal modello, risulta:

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{Q}{cL^2},$$

$$Q_m = c \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{Q}{cL^2} L_m^2 = 0.143 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vediamo cosa accade alla scala dei tempi:

$$\frac{TU}{L} = \frac{T_m U_m}{L_m},$$

$$T_m = \frac{UL_m}{U_m L} T = \frac{\frac{Q}{cL^2} L_m}{\frac{Q_m}{cL_m^2}} \frac{L_m}{L} T,$$

$$T_m = \frac{Q}{Q_m} \left(\frac{L_m}{L}\right)^3 T = 0.258T.$$

Il risultato ottenuto indica che l'analisi dimensionale permette di costruire modelli nei quali il fenomeno si sviluppa più velocemente. Quindi se il fenomeno impiega 24 ore per svilupparsi nella diga, nel modello impiega solo 6 ore, per cui è possibile, per esempio, prevedere tempestivamente l'evoluzione di un incidente con una sperimentazione in laboratorio.

---

**ESEMPIO**


---

Per un prototipo di nave lungo 200 m, del peso di  $10^5$  tonnellate e con velocità di crociera di 18 nodi, viene realizzato un modello in scala  $f_S = 1 : 30$ . Calcolare le condizioni sperimentali per una prova sul modello in similitudine dinamica. Quale dovrà essere il peso del modello? Citare gli accorgimenti che dovranno essere presi per gli eventuali parametri non in similitudine (similitudine distorta).

**Soluzione**

In questo problema, avendo la superficie libera un ruolo fondamentale bisogna mantenere la similitudine in Froude  $U/\sqrt{gL} = U_m/\sqrt{g_m L_m}$ , ed essendo le accelerazioni di gravità identiche si ha  $U_m = U\sqrt{L_m/L} = U\sqrt{f_S} = 3.286$  nodi = 1.69 m/s.

Se il rapporto di scala tra le dimensioni lineari è  $f_S$ , il rapporto tra i volumi sarà  $f_S^3$  e lo stesso dovrà risultare per le forze peso. Quindi  $P_m = P/f_S^3 = 3703$  Kg. Per il numero di Reynolds, se si usa lo stesso fluido ( $\nu = \nu_m$ ) si avrà:  $Re_m = U_m L_m / \nu_m = U\sqrt{f_S} \cdot L f_S \cdot 1/\nu = Re \cdot f_S^{3/2}$ . Essendo i numeri di Reynolds diversi (similitudine distorta) si dovrà essere sicuri che entrambi i flussi siano nello stesso regime (turbolento).

---



---

**ESEMPIO**


---

Per studiare le caratteristiche di una diga ne viene realizzato un modello in scala  $F_S$ . Se la portata che smaltisce il modello è  $Q_m$ , quale sarà la portata smaltita dalla diga reale? Commentare le ipotesi fatte ed il tipo di similitudine ottenuta (esatta o distorta).

*ricorda: dimensionalmente una por-*

*tata in volume è data da una velocità  $f_s = 1 : 200$   $Q_m = 90$  l/m*

*per una superficie.*

**Soluzione**

Essendo un fenomeno con superficie libera bisogna preservare la similitudine in Froude.  $U/\sqrt{gL} = U_M/\sqrt{gL_M}$  da cui  $U = U_M\sqrt{L/L_M} = U_M\sqrt{1/f_S}$ .

La portata sarà  $Q = US = U_M\sqrt{1/f_S} \cdot S_M/f_S^2 = Q_M/F_S^{5/2} = 5.09 \cdot 10^7$  l/min (848.5m<sup>3</sup>/s).

---

**11.4.3 Flusso nelle macchine rotanti**

Rispetto agli esempi precedentemente elencati, nelle macchine rotanti entra come parametro fondamentale la velocità di rotazione. Una qualunque grandezza  $q$  si può quindi esprimere dalla relazione

$$q = f(L, l, \epsilon, Q, \mu, \rho, \Omega)$$

essendo  $Q$  la portata smaltita dalla macchina ed  $\Omega$  la sua velocità di rotazione. Si noterà che non è stata inserita una scala di velocità  $U$  in quanto questa è ricavabile sia dal

rapporto tra portata  $Q$  ed una superficie caratteristica ( $S \sim L^2$ ) sia dalla velocità di rotazione attraverso  $U = \Omega L$ . Ricorrendo al teorema di Buckingham la relazione appena scritta si riduce a:

$$\Pi_q = g \left( \frac{l}{L}, \frac{\epsilon}{L}, \frac{Q}{\Omega L^3}, \frac{\Omega L^2 \rho}{\mu}, \frac{\Omega L}{a} \right).$$

I parametri  $l/L$  e  $\epsilon/L$  sono fissati dalla similitudine geometrica mentre il numero di Reynolds  $Re = \Omega L^2 \rho / \mu$  può essere trascurato se il regime di flusso tra prototipo e modello è lo stesso. Per il numero di Mach  $M = \Omega L / a$  valgono le considerazioni fatte nei precedenti esempi, quindi si può trascurare se prototipo e modello lavorano entrambi nel regime  $M \leq 0.3$  altrimenti sarà un parametro di similitudine da rispettare. Il rapporto  $Q / (\Omega L^2)$  è il coefficiente di flusso  $c_Q$  ed è un parametro fondamentale per la similitudine.

Nelle macchine rotanti il parametro  $\Pi_q$  può essere il rendimento “ $\eta$ ”, il coefficiente di prevalenza “ $c_H$ ” oppure il coefficiente di potenza “ $c_P$ ”, definiti come segue:

$$\eta = \frac{P_U}{P_1}, \quad c_H = \frac{gh}{\Omega^2 L^2}, \quad c_P = \frac{P_1}{\rho \Omega^2 L^2},$$

con  $P_1$  potenza immessa,  $P_U$  potenza utile ed  $h$  la prevalenza cioè l'altezza della colonna fluida equivalente alla differenza di pressione che la macchina può creare (nel caso si tratti di una pompa).

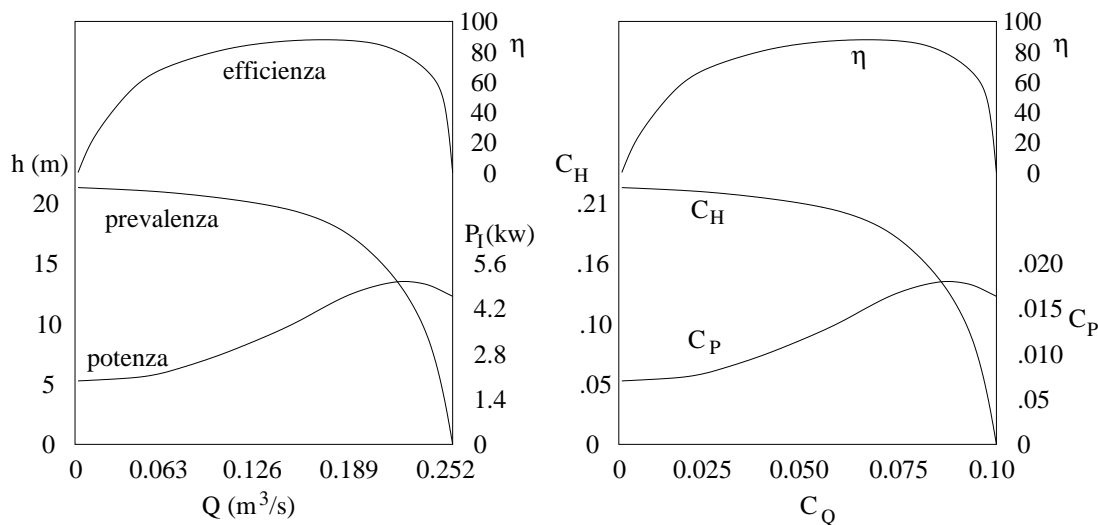


Figura 11.5: Curve caratteristiche di un pompa (curve dimensionali ed adimensionali).

Supponiamo di volere determinare le caratteristiche di una pompa che abbia dimensione  $L = 8$ inch, ed  $\Omega = 1200$ rpm operante nelle condizioni di massima efficienza, note le caratteristiche di una pompa geometricamente simile con dimensione caratteristica di  $L_M = 12$ inch funzionante alla velocità di rotazione  $\Omega_M = 1000$ rpm.

Dalle curve caratteristiche con le quantità dimensionali si ricavano delle curve analoghe per i parametri adimensionali come è mostrato in figura 11.5. Dal grafico ( $\eta, c_Q$ ) si ricava

per le condizioni di massima efficienza  $c_Q = 0.0625$ , e dalla sua definizione il valore della portata  $Q = c_Q L^3 \Omega = 0.176 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Conoscendo il valore di “ $c_Q$ ”, determiniamo dal grafico ( $c_P, c_Q$ ) il valore del coefficiente di potenza pari a 0.015 e, ricordando che il fluido è acqua, calcoliamo la “ $P_I$ ” dalla seguente relazione:

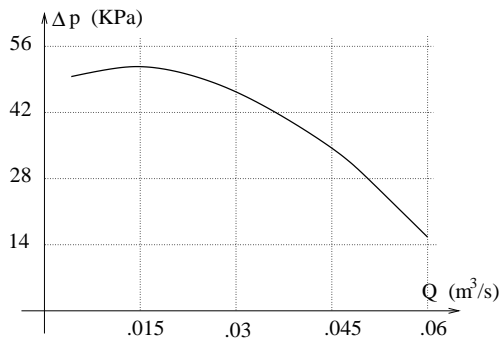
$$P_I = c_P \rho \Omega^3 L^3 = 405 \text{ KW}$$

Infine dal grafico ( $c_H, c_Q$ ) calcoliamo il valore di  $c_H$  e, di conseguenza, quello di  $h$  come segue:

$$h = (c_H L^2 \Omega^2) / g = 18.34 \text{ m}$$

### ESEMPIO

Il salto di pressione attraverso una pompa di forma assegnata è  $\Delta p = f(D, \Omega, \rho, Q)$  essendo  $D$  una dimensione caratteristica,  $\Omega$  la velocità di rotazione,  $\rho$  la densità del fluido e  $Q$  la sua portata. Un modello funzionante in acqua di diametro  $D_m$ , alla velocità angolare  $\Omega_m$  fornisce una curva come in figura. Stimare il  $\Delta p$  per una pompa geometricamente simile di dimensione  $D$  operante in acqua alla velocità angolare  $\Omega$ .



$$\begin{aligned} \Omega_m &= 40\pi \text{ rad/s} & D_m &= 25 \text{ cm} \\ \Omega &= 60\pi \text{ rad/s} & D &= 32 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Soluzione

Dalle relazioni fornite si nota che ci sono  $N = 5$  grandezze in gioco descritte dimensionalmente da  $K = 3$  dimensioni fondamentali. In base al teorema di Buckingham si ha che lo stesso fenomeno può essere descritto da  $N - K = 2$  parametri adimensionali. L'applicazione del metodo della variabili ripetute (scegliendo come terna fondamentale  $D, \Omega$  e  $\rho$ ) fornisce  $\Pi_1 = \Delta p / (\rho D^2 \Omega^2)$  e  $\Pi_2 = Q / (\Omega D^3)$ . Noti quindi  $D$  ed  $\Omega$  di modello e prototipo è possibile riscalarne la curva in figura ed ottenere il  $\Delta p$  per la pompa simile.

---

**ESEMPIO**


---

Si supponga che la prevalenza  $H$  di una pompa sia esprimibile tramite la relazione  $H = f(W, \Omega, \rho, l, \nu)$  in cui  $W$  è la potenza assorbita,  $\Omega$  la velocità di rotazione,  $\rho$  e  $\nu$  la densità e la viscosità cinematica del fluido di lavoro ed  $l$  una dimensione caratteristica. Sapendo che un modello di dimensione  $l_m$  con fluido acqua assorbe una potenza  $W_m$  ed ha una prevalenza  $H_m$ , calcolare  $W$  ed  $H$  per una pompa geometricamente simile in scala  $f = 2.3 : 1$  (ossia il prototipo è 2.3 volte più grande del modello) che lavora in olio in similitudine dinamica.

$$\begin{aligned} l_m &= 16 \text{ cm} & H_m &= 21 \text{ m} & W_m &= 6.1 \text{ kW} \\ f &= 2.3 : 1 & \nu_{\text{olio}} &= 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} & \rho_{\text{olio}} &= 850 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

**Soluzione**

Applicando il teorema di Buckingham risulta  $N = 6$  e  $K = 3$  per cui si può esprimere la relazione con 3 parametri adimensionali.

$$\frac{H}{l} = g\left(\frac{W}{\rho\Omega^3 l^5}, \frac{\nu}{l^2\Omega}\right).$$

Uguagliando i parametri adimensionali si ottiene quindi  $H = H_m l / l_m = H_m f = 48.3 \text{ m}$ .

$$\Omega = \Omega_m \left(\frac{l_m}{l}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right), \quad W = W_m \frac{\rho}{\rho_m} \left(\frac{l}{l_m}\right)^5 \left(\frac{\Omega}{\Omega_m}\right)^3 = W_m \frac{\rho}{\rho_m} \frac{l_m}{l} \left(\frac{\nu}{\nu_m}\right)^3 = 1.604 \text{ Mw}.$$


---

## 11.5 Flusso in circuiti chiusi

Nella classe dei flussi in circuiti chiusi rientrano tutti quei flussi in cui un fluido scorre all'interno di un sistema tubi, contemplando anche eventuali variazioni di sezione, gomiti, valvole, rubinetti etc., come in figura 11.6. Bisogna notare che l'aggettivo chiuso del circuito non si riferisce al fatto che il circuito si chiuda su se stesso ma all'assenza di superfici libere che vanno trattate come mostrato precedentemente.

In questa categoria di flussi, detta  $q$  la generica quantità da determinare possiamo scrivere

$$q = h(l, D, \epsilon, \rho, \mu, U),$$

che, applicando il teorema di Buckingham, può essere ridotta alla forma

$$\Pi_q = g\left(\frac{l}{D}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\rho U D}{\mu}\right). \quad (11.8)$$

In questa relazione, al solito, il rapporto  $l/D$  descrive la geometria del sistema, la rugosità

relativa  $\epsilon/D$  esprime la natura della superficie dell'oggetto, mentre il numero di Reynolds  $\rho U D / \mu$  esprime il regime di moto del flusso nel condotto.

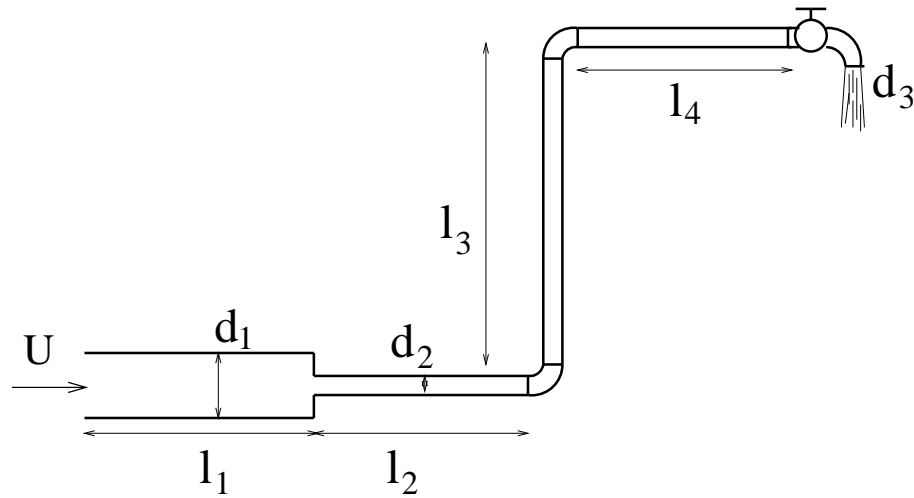


Figura 11.6: Esempio di flusso in circuiti chiusi.

Come esempio consideriamo una valvola con una dimensione caratteristica  $D = 60\text{cm}$  e supponiamo che smaltisca una portata  $Q = 0.1\text{ m}^3/\text{s}$ . Ci chiediamo quale deve essere la portata di un modello in scala con dimensione  $D_m = 7.5\text{cm}$ .

Osserviamo che, essendo un problema in scala, sono rispettati i rapporti  $l/D$  e  $\epsilon/D$ , per cui rimane da verificare la similitudine sul numero di Reynolds.

Dalla portata della valvola, possiamo calcolare una scala di velocità per il prototipo  $U = Q/D^2$

quindi, imponendo l'uguaglianza del numero di Reynolds:

$$\frac{UD}{\nu} = \frac{U_m D_m}{\nu_m}, \implies U_m = \frac{D \nu_m}{D_m \nu} U,$$

ed assumendo di utilizzare lo stesso fluido nell'esperimento e nel fenomeno reale ( $\nu = \nu_m$ ),

$$U_m = \frac{0.60 \cdot 0.1}{0.075 \cdot 0.36} \cdot 1 = 2.22\text{ m/s}.$$

Con questa velocità e con il diametro del modello siamo quindi in grado di calcolare la portata richiesta

$$Q_m = U_m D_m^2 = 0.0125\text{ m}^3/\text{s}.$$

## 11.6 Legge di Darcy-Weisbach

Sebbene la trattazione di questi flusso rientri a tutti gli effetti nell'ambito dell'analisi dimensionale, la rilevanza pratica di circuiti per il trasporto di fluidi ha dato origine a delle formule empiriche di grande utilità nelle applicazioni pratiche.

Consideriamo un tubo a sezione circolare di lunghezza  $l$  e diametro costante  $D$  attraverso cui passa una portata  $Q$  di un fluido viscoso; assumendo il flusso incomprimibile possiamo mettere in relazione la velocità media nel tubo con la portata attraverso

$$Q = \frac{(\pi U D^2)}{4}.$$

Per questo flusso, essendo gli effetti viscosi non trascurabili, non sarebbe possibile applicare l'equazione di Bernoulli, tuttavia, aggiungendo un termine correttivo  $h$  che tenga conto degli effetti viscosi si può porre:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_2 + gh. \quad (11.9)$$

Dalla conservazione della massa si deduce che, essendo il diametro costante, le velocità nelle due sezioni sono uguali e quindi l'equazione di Bernoulli diventa:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + gh, \quad (11.10)$$

e, se si suppone inoltre nulla la variazione di quota delle sezioni del condotto, si ha

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + gh, \implies h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}. \quad (11.11)$$

L'interpretazione fisica di questa relazione è che l'effetto dei termini viscosi è equivalente ad una sezione di uscita posta ad una quota più alta di  $h$  rispetto alla sezione di entrata oppure, in base alla (11.10), a parità di  $\Delta p$  la presenza dei termini viscosi diminuisce di  $h$  la quota massima raggiungibile

$$z_2 = \frac{\Delta p}{\rho g} + z_1 - h.$$

Esplicitando invece la relazione precedente rispetto a  $z_1$  si nota che partendo dalla quota  $z_2$ , ed arrivando alla quota  $z_1 < z_2$ , (mantenendo una portata  $Q$ ) si genera una differenza di pressione minore rispetto al caso non viscoso

$$\rho g z_1 = \rho g z_2 - \Delta p + \rho g h.$$

In definitiva sia per portare in quota il fluido che per farlo tornare indietro occorre sempre una differenza di pressione più grande del caso non viscoso e ciò esprime la dissipatività del termine  $h$  in contrasto con la reversibilità della trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica nel caso ideale.

Per mettere ora in relazione le perdite dovute agli effetti viscosi con le grandezze adimensionali osserviamo che possiamo esprimere la differenza di pressione alle estremità del tubo come

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \phi \left( \frac{l}{D}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{UD\rho}{\mu} \right).$$



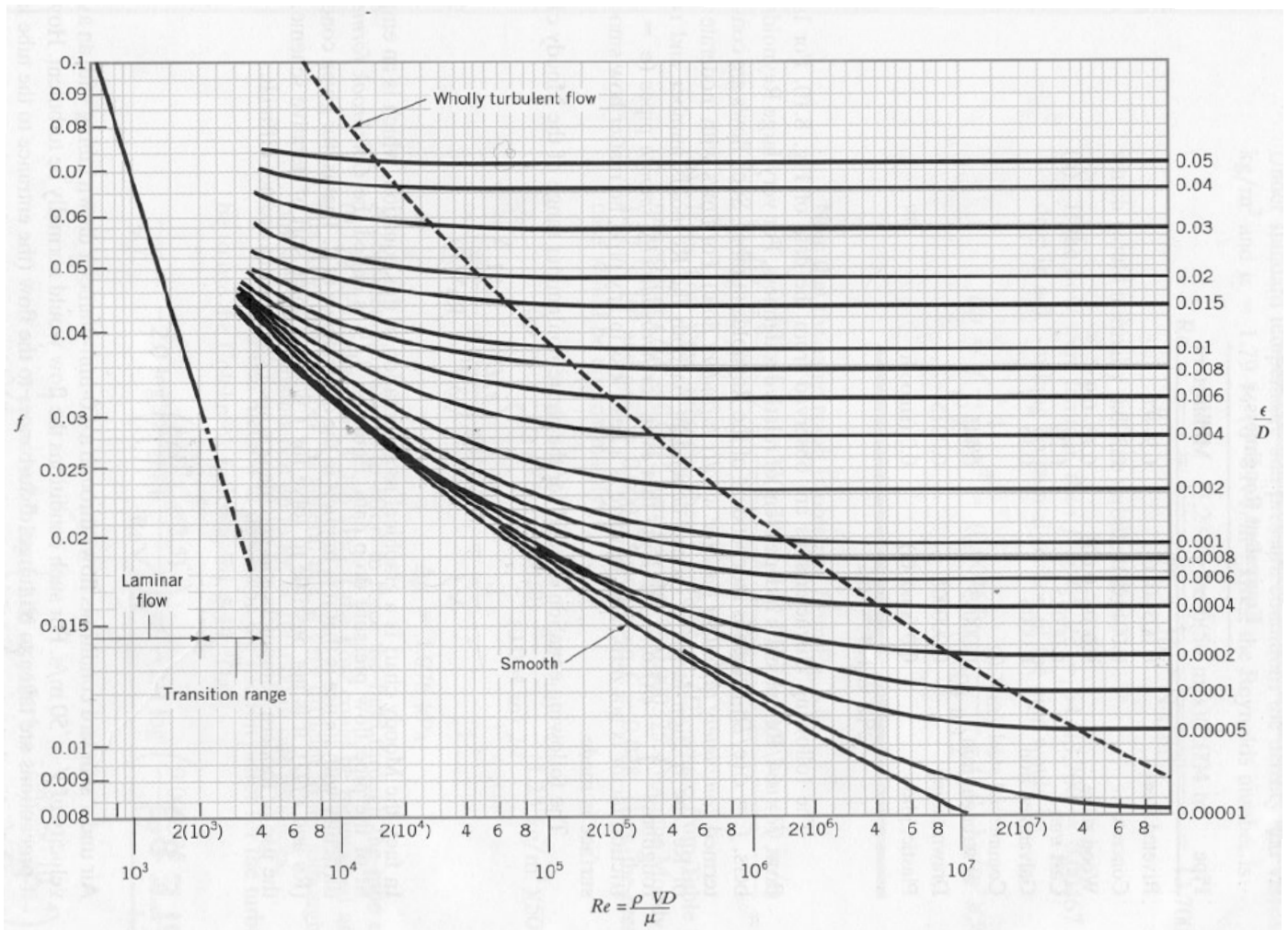


Figura 11.7: Diagramma di Moody.

In base ad innumerevoli osservazioni sperimentali è stato visto che l'effetto del parametro  $l/D$  interviene linearmente nella funzione  $\phi$  il che implica fisicamente che le perdite per attrito in un tubo di lunghezza  $2l$  saranno doppie rispetto ad un tubo identico ma di metà lunghezza (nel caso in cui il flusso all'interno del tubo sia in regime di turbolenza sviluppata)<sup>3</sup>. Questo risultato implica

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{l}{D} \Phi \left( \frac{\epsilon}{D}, \frac{UD\rho}{\mu} \right)$$

<sup>3</sup>Notiamo che ciò non si verifica nel regime laminare in quanto in uno strato limite la forza di resistenza cresce come  $\sqrt{l}$  e quindi una lastra di lunghezza  $2l$  avrà perdite per attrito che sono solo  $\sqrt{2}$  volte più grandi di una di lunghezza  $l$

per cui definendo il fattore d'attrito  $f$

$$f = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{D}{l} = \Phi \left( \frac{\epsilon}{D}, \frac{UD\rho}{\mu} \right)$$

si ottiene

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{l}{D} f.$$

Ricordando infine dalla (11.11) che  $h = \Delta p/\rho g$  si giunge alla legge di Darcy-Weisbach:

$$h = \frac{1}{2} \frac{U^2}{g} \frac{l}{D} f, \quad (11.12)$$

che consente di calcolare le perdite per effetti viscosi nota la geometria del condotto ( $l/D$ ), la velocità media del flusso ( $U$ ) ed il fattore d'attrito  $f$ .

Osservando criticamente la relazione (11.12) dovremmo concludere che non abbiamo fatto alcun passo in avanti in quanto abbiamo espresso una quantità incognita  $h$  in funzione del fattore d'attrito  $f$  che non è noto a priori. In realtà il fattore d'attrito si determina facilmente dal diagramma di Moody (figura 11.7) che consente, noto il valore di  $\epsilon/D$  ed il numero di Reynolds del tubo, di determinare  $f$ . Questo diagramma è stato molto utilizzato nel passato in quanto l'assenza di calcolatori elettronici rendeva problematico l'utilizzo di formule implicite non lineari. Attualmente queste formule possono essere agevolmente impiegate anche con l'ausilio di una calcolatrice programmabile rendendo più rapido il calcolo di  $f$ . Una di tali formule è quella di Colenbrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right), \quad (11.13)$$

che è stata ottenuta come fit empirico del grafico del diagramma di Moody.

### 11.6.1 tubi a sezione non circolare

In molte applicazioni pratiche i circuiti per il trasporto del fluido hanno sezione non circolare (per esempio negli impianti di condizionamento dove i condotti hanno una sezione quadrata) ed in questi casi il diagramma di Moody non può essere utilizzato nella forma descritta nella precedente sezione.

Evidentemente, si potrebbe ripetere una campagna di misure, così come è stato fatto per i tubi a sezione circolare per ottenere un diagramma, analogo a quello di Moody, ma specifico per la particolare geometria di interesse. Data tuttavia la grande varietà di geometrie possibili questa procedura non viene seguita e si preferisce ricavare delle informazioni, seppur approssimate, direttamente dal grafico di figura 11.7 anche se il tubo non è circolare. A tal fine si definisce il *diametro idraulico*  $D_h$  come il rapporto tra l'area della sezione trasversale del tubo  $S$  divisa per un quarto del perimetro bagnato

$P/4$ ; in questo modo per un condotto a sezione quadrata il diametro idraulico è proprio pari al lato, mentre per una sezione rettangolare  $D_h$  è il prodotto dei lati diviso per la loro media.

Dopo aver calcolato  $D_h$  per una data geometria, questo viene usato per valutare il numero di Reynolds  $Re = UD_h/\nu$ , la rugosità relativa  $\epsilon/D_h$  da cui si ricava il fattore d'attrito  $f$  dal grafico 11.7 e quindi la perdita di carico  $h_f = f(l/D_h)U^2/(2g)$ ; la velocità media  $U$  viene calcolata dividendo la portata in volume  $Q$  di fluido che transita nel condotto per la sua sezione  $S$ .

Questo tipo di approssimazione, permette di risolvere agevolmente problemi per i quali non esiste un diagramma specifico per le perdite di carico oppure flussi in cui si hanno tubi di geometria diversa in uno stesso circuito. Normalmente, per condizioni di flusso turbolento completamente sviluppato l'errore rimane contenuto intorno a valori del 15%; per quei problemi nei quali è richiesta un'accuratezza maggiore bisogna allora ricorrere a diagrammi specifici o prove sperimentali *ad hoc*.

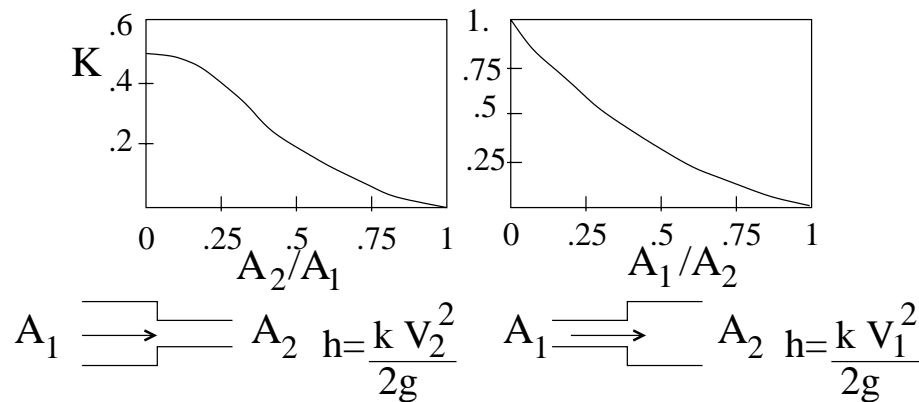


Figura 11.8: Esempio di grafico per la determinazione delle perdite concentrate per variazioni di sezione repentine.

### 11.6.2 perdite concentrate

L'assunzione che gli effetti viscosi siano proporzionali alla lunghezza  $l$  del condotto funziona nel caso di condotti a sezione uniforme in cui il flusso sia in un regime di turbolenza completamente sviluppata. Riferendoci alla figura 11.6 appare evidente come ci siano dei componenti, come i gomiti, il rubinetto e la variazione di sezione, in cui tale condizione non è assolutamente verificata. L'analisi sperimentale mostra comunque che in corrispondenza di tali tratti del circuito si verificano delle perdite di energia la cui entità può superare quella nei tratti rettilinei. Chiaramente, l'entità delle perdite viscosive dipende dalla forma dei componenti, dal modo in cui sono accoppiati con i tratti rettilinei di tubo oltre che dalla portata che li attraversa. Queste perdite vengono dette perdite concentrate ( $h_c$ ) e vengono quantificate attraverso dei coefficienti empirici  $K_c$ .

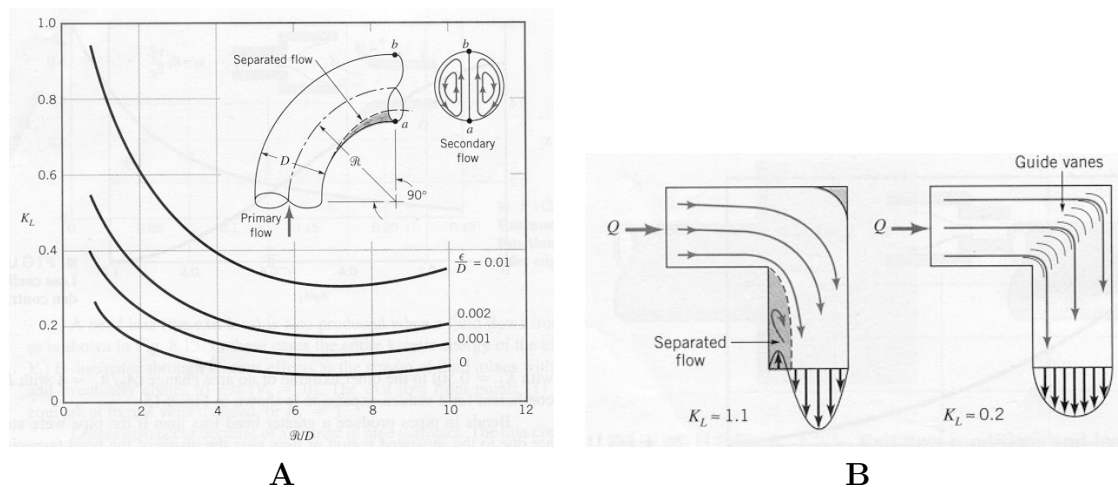


Figura 11.9: **A**: coefficiente di perdita  $K_c$  in un gomito a  $90^\circ$  in funzione del raggio di curvatura e della finitura superficiale; **B**: perdite associate ad una variazione di direzione del flusso con angoli retti (a) flusso senza 'guide', (b) flusso con guide.

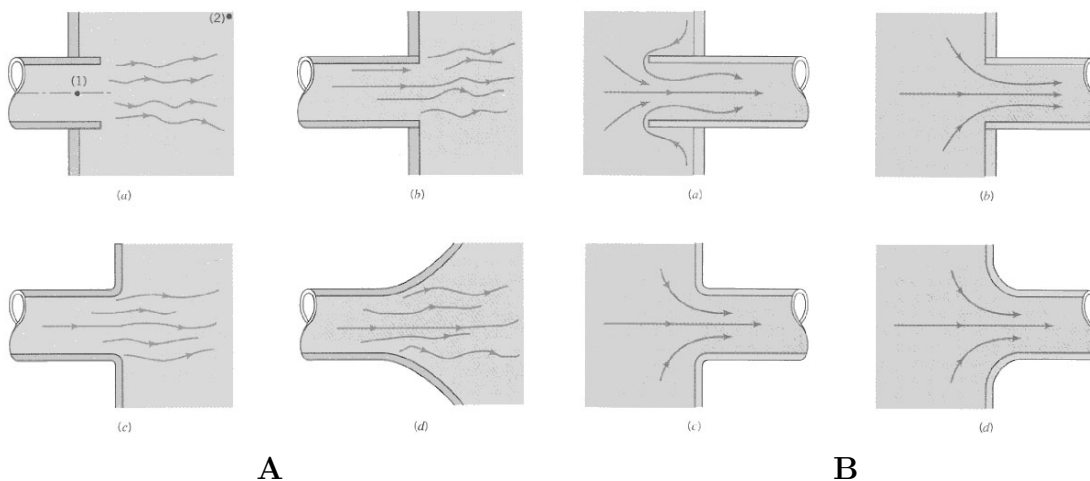


Figura 11.10: **A**: coefficiente di perdita  $K_c$  per differenti modalità di uscita del flusso: (a)  $K_c = 1$ , (b)  $K_c = 1$ , (c)  $K_c = 1$ , (d)  $K_c = 1$ . **B**: coefficiente di perdita  $K_c$  per differenti modalità di ingresso del flusso: (a)  $K_c = 0.8$ , (b)  $K_c = 0.5$ , (c)  $K_c = 0.2$ , (d)  $K_c = 0.04$ .

$$h_c = K_c \frac{U^2}{2g}$$

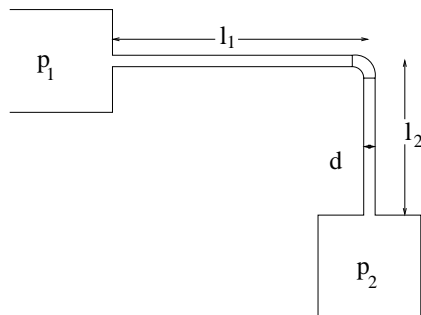
L'effetto di ognuno di questi componenti è quindi assimilabile ad una perdita concentrata equivalente ad una quota parte dell'energia cinetica del flusso.

I valori numerici di  $K_c$  possono essere trovati sia in forma di tabella in cui è specificata la forma del componente, il materiale con cui è costruito ed il modo in cui è collegato con

i tubi rettilinei oppure in forma di grafico come gli esempi forniti nelle figure 11.8, 11.9, 11.10.

### ESEMPIO

Data la presente configurazione determinare la portata in massa di olio che attraversa il condotto.



$$\begin{aligned}
 p_1 - p_2 &= 10^6 \text{ Pa} & d &= 0.3 \text{ inch} \\
 l_1 &= 10 \text{ m} & l_2 &= 6 \text{ m} \\
 \rho_{olio} &= 840 \text{ Kg/m}^3 & \mu_{olio} &= 0.01 \text{ Ns/m}^2 \\
 & \text{tubi commerciali} & & \text{gomito avvitato}
 \end{aligned}$$

Stimare le perdite concentrate (assumendo valori opportuni dei  $K_j$ ), giustificando le assunzioni fatte.

### Soluzione

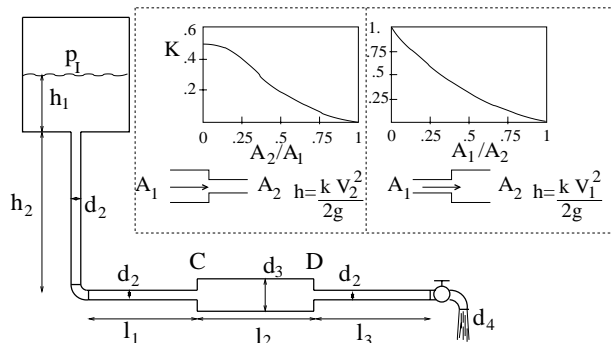
Dall'equazione di Bernoulli generalizzata scriviamo  $p_1 + \rho U_1^2/2 + \rho g h_1 = p_2 + \rho U_2^2/2 + \rho g h_2 + f(l_1 + l_2)U^2\rho/(2d) + \sum_j K_j \rho U^2/2$ , essendo  $U$  la velocità nel condotto e risultando  $U_1 = 0$ ,  $U_2 = U$ . Osservando che  $h_1 - h_2 = l_2$  si ricava per  $U$ :

$$U^2 = \frac{2}{\rho} \frac{(p_1 - p_2) + \rho g l_2}{1 + f(l_1 + l_2)/d + \sum_j K_j},$$

dove  $\sum_j K_j = K_1 + K_2 + K_3 = 0.5 + 1.5 + 1. = 3$ . ottenute da tabelle per la strozzatura in ingresso, per il gomito e per la sezione di uscita. Dalle tabelle per tubi commerciali ricaviamo  $\epsilon/d = 0.0059$  da cui iterando sul diagramma di Moody tra  $f$  e  $Re = Ud/\nu$  si ottiene  $U \simeq 4.78 \text{ m/s}$  (ricordiamo che per la procedura iterativa conviene partire da un valore di tentativo di  $f$  nella parte piatta del diagramma di Moody che per  $\epsilon/d = 0.0059$  fornisce  $f \simeq 0.032$ ). La portata in massa nel condotto sarà quindi  $\dot{m} = \rho U \pi d^2/4 = 0.183 \text{ Kg/s}$ .

## ESEMPIO

Dato il circuito in figura, calcolare la pressione  $p_I$  nel serbatoio per avere una portata  $Q$  uscente dal rubinetto.



$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \text{ m} & h_2 &= 4 \text{ m} \\ l_1 &= l_2 = l_3 = 3 \text{ m} & d_2 &= 5 \text{ cm} \\ d_3 &= 15 \text{ cm} & d_4 &= 2.5 \text{ cm} \\ Q &= 500 \text{ l/min} \\ \text{Fluido:} &\text{acqua} \end{aligned}$$

Tubi commerciali a sezione circolare.

Rubinetto con  $k = 2$  basato sulla velocità nel tubo (in  $d_2$ ).

Trascurare le perdite distribuite nel serbatoio.

Raccordo serbatoio-tubo  $k = 0.5$  basato sulla velocità nel tubo.

Per le variazioni di sezione in  $C$  e  $D$  vedi tabelle. Gomito avvitato.

## Soluzione

Prendendo i due peli liberi dei serbatoi come sezioni  $A$  e  $B$  e scrivendo l'equazione di Bernoulli generalizzata si ottiene:  $p_A = p_I$ ,  $u_A = 0$ ,  $p_B = p_0$  e  $u_B = 4Q/(\pi d_4^2) = 16.976 \text{ m/s}$ ,  $h_A - h_B = h_1 + h_2$  e quindi:

$$p_I = p_0 - \rho g(h_1 + h_2) + \rho \frac{u_B^2}{2} + \rho g \left( \sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{u_i^2}{2g} + \sum_j k_j \frac{u_j^2}{2g} \right).$$

Dalla costanza della portata si ha  $u_2 = 4Q/(\pi d_2^2) = 4.244 \text{ m/s}$  e  $u_3 = 4Q/(\pi d_3^2) = 0.4715 \text{ m/s}$ . Dal diagramma di Moody con  $Re_2 = u_2 d_2 / \nu = 212206$ ,  $\epsilon/d_2 = 0.0009$  e  $Re_3 = u_3 d_3 / \nu = 70570$ ,  $\epsilon/d_3 = 0.0003$  si ottiene rispettivamente  $f_2 = 0.021$  ed  $f_3 = 0.026$  con cui si possono calcolare le perdite di carico distribuite. D'altra parte, noti i valori di  $k_j$  si possono calcolare anche le perdite concentrate ottenendo:

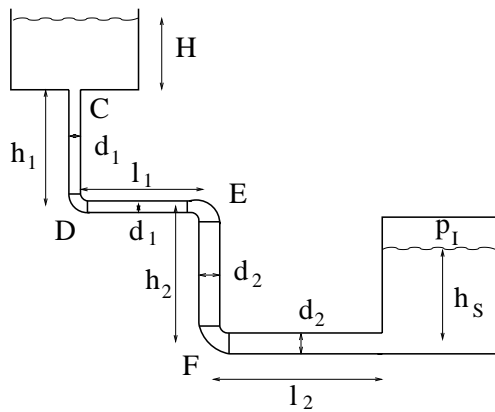
$$\sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{u_i^2}{2g} = f_2 \frac{h_2 + l_1 + l_3}{d_2} \frac{u_2^2}{2g} + f_3 \frac{l_2}{d_3} \frac{u_3^2}{2g} = 3.861 \text{ m},$$

$$\sum_j k_j \frac{u_j^2}{2g} = (0.5 + 1.5 + 2 + 0.8 + 0.5) \frac{u_2^2}{2g} = 4.82 \text{ m}.$$

Note le perdite si calcola infine  $p_I$  ottenendo  $p_I = 271666 \text{ Pa}$ .

## ESEMPIO

Dato il circuito in figura, quale deve essere il livello dell'acqua  $H$  nel serbatoio per avere una portata  $Q$ ?



$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \text{ m} & h_2 &= 2.5 \text{ m} \\ l_1 &= 2.2 \text{ m} & l_2 &= 3 \text{ m} \\ d_1 &= 1.5 \text{ cm} & d_2 &= 3 \text{ cm} \\ h_S &= 1 \text{ m} & Q &= 100 \text{ l/min} \\ \epsilon &= 0.15 \text{ mm} & p_I &= 150000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Tubi circolari in cemento

Trascurare le perdite nei due serbatoi

$D$  ed  $F$  gomiti avvitati

Gomito in  $E$  con  $k = 1.8$  basato sulla velocità in  $d_1$ . Raccordo in  $C$  con  $k = 0.5$  basato sulla velocità in  $d_1$

Attenzione:  $H$  viene molto grande ( $> 20\text{m}$ ) ed il disegno non è in scala.

## Soluzione

Prendendo i due peli liberi dei serbatoi come sezioni  $A$  e  $B$  e scrivendo l'equazione di Bernoulli generalizzata si ottiene:  $p_A = p_0$ ,  $u_A = 0$ ,  $p_B = p_I$  e  $u_B = 0$ ,  $h_A - h_B = H + h_1 + h_2 - h_S$  e quindi:

$$H = h_S - h_1 - h_2 + \frac{p_I - p_0}{\rho g} + \sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{u_i^2}{2g} + \sum_j k_j \frac{u_j^2}{2g}.$$

Dalla costanza della portata si ha  $u_1 = 4Q/(\pi d_1^2) = 9.431\text{m/s}$  e  $u_2 = 4Q/(\pi d_2^2) = 2.358\text{m/s}$ . Dal diagramma di Moody con  $Re_1 = u_1 d_1 / \nu = 141471$ ,  $\epsilon/d_1 = 0.0066$  e  $Re_2 = u_2 d_2 / \nu = 70735$ ,  $\epsilon/d_2 = 0.0033$  si ottiene rispettivamente  $f_1 = 0.034$  ed  $f_2 = 0.029$  con cui si possono calcolare le perdite di carico distribuite. D'altra parte, noti i valori di  $k_j$  si possono calcolare anche le perdite concentrate ottenendo:

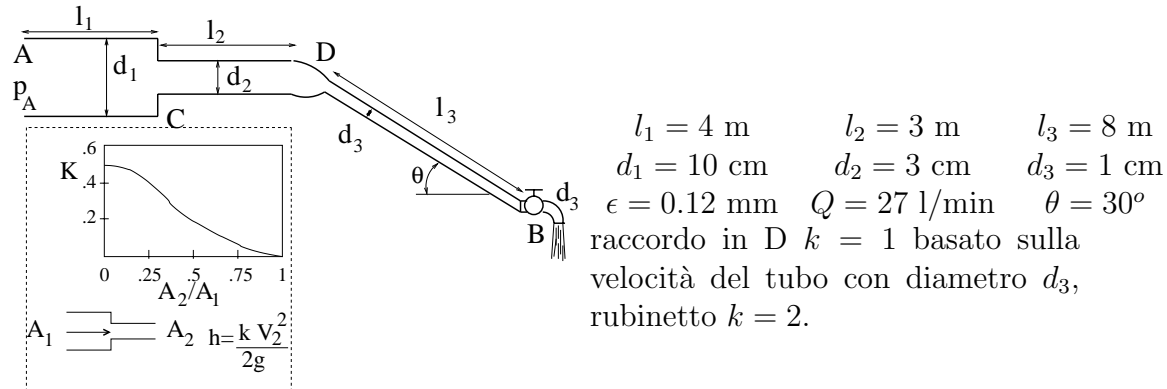
$$\sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{u_i^2}{2g} = f_1 \frac{h_1 + l_1}{d_1} \frac{u_1^2}{2g} + f_2 \frac{h_2 + l_2}{d_2} \frac{u_2^2}{2g} = 44.94 \text{ m},$$

$$\sum_j k_j \frac{u_j^2}{2g} = (k_C + k_D + k_E) \frac{u_1^2}{2g} + k_F \frac{u_2^2}{2g} = 17.67 \text{ m}.$$

Note le perdite si calcola infine  $H$  ottenendo  $H = 64.08 \text{ m}$ .

## ESEMPIO

Nel dispositivo in figura transita una portata  $Q$ , calcolare il valore della pressione  $p_A$  necessaria a mantenere il sistema in condizioni stazionarie.



## Soluzione

Scrivendo l'equazione di Bernoulli generalizzata tra  $A$  e  $B$  si ha

$$\frac{U_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gh_A = \frac{U_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + gh_B + \sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{U_i^2}{2} + \sum_j k_j \frac{U_j^2}{2},$$

risultando:  $U_A = 4Q/(\pi d_1^2) = 0.0573 \text{ m/s}$ ,  $U_B = 4Q/(\pi d_3^2) = 5.7295 \text{ m/s}$ ,  $p_B = p_0$  e  $h_B - h_A = -l_3 \sin \theta = -4 \text{ m}$ . Per i tre tratti si ha, rispettivamente,  $\epsilon/d_1 = 0.0012$  e  $Re_1 = 5116$ ,  $\epsilon/d_2 = 0.004$  e  $Re_2 = 17051$  e  $\epsilon/d_3 = 0.012$  e  $Re_3 = 47746$  per cui dal diagramma di Moody si ottiene  $f_1 = 0.038$ ,  $f_2 = 0.034$  e  $f_3 = 0.04$ . Per le perdite concentrate e distribuite risulta quindi

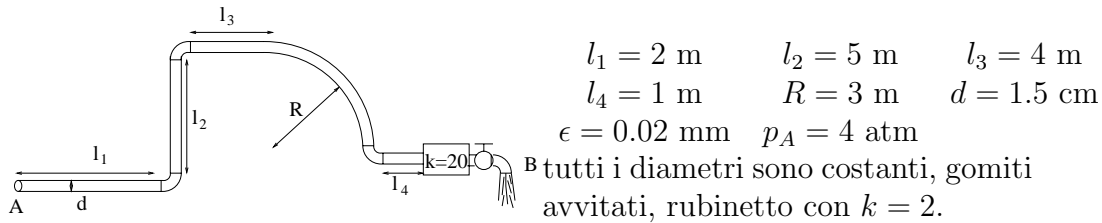
$$\sum_j k_j \frac{U_j^2}{2} = 0.5 \frac{U_2^2}{2} (1 + 2) \frac{U_3^2}{2} = 49.342 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad \sum_i f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{U_i^2}{2} = 525.92 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Dalla prima espressione si ricava quindi  $p_A = 653734 \text{ Pa}$ .



## ESEMPIO

Il dispositivo in figura rappresenta un circuito di raffreddamento in cui entra acqua alla pressione  $p_A$  a sinistra ed esce nell'ambiente dal rubinetto in  $B$  dopo aver attraversato il dispositivo da raffreddare schematizzato con una perdita di carico concentrata con  $K = 20$ . Con i dati a disposizione, calcolare la portata d'acqua che smaltisce il circuito.



## Soluzione

Dall'equazione di Bernoulli generalizzata scritta tra  $A$  e  $B$ , risultando  $U_A = U_B = U$ ,  $p_B = p_0$  ed  $h_A - h_B = R - l_2$ , si ottiene

$$U^2 = \frac{2[(p_A - p_0)/\rho + g(R - l_2)]}{f \sum_i (l_i/d) + \sum_j k_j}$$

ossia in termini numerici

$$U = \left( \frac{568.56}{1218.88f + 26.5} \right)^{1/2}$$

Dal valore di rugosità relativa  $\epsilon/d = 0.0013$  si ipotizza dal diagramma di Moody un valore per il fattore d'attrito  $f = 0.02$  di primo tentativo e, iterando nell'espressione sopra si ottiene  $U = 3.125$  m/s da qui si ricava la portata  $Q = U\pi d^2/4 = 5.522 \cdot 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s = 0.552 l/s.

*Il valore  $f = 0.02$  è stato ottenuto dalla parte piatta della curva del diagramma di Moody. Dal valore  $f_1 = 0.002$  si è ottenuto rispettivamente  $U_1 = 3.343$  m/s e  $Re_1 = 44772$ . All'iterazione successiva con questi dati risultava  $f_2 = 0.026$ ,  $U_2 = 3.125$  m/s e  $Re_2 = 41852$ . L'iterazione è stata a questo punto fermata non potendo apprezzare, manualmente e su un grafico logaritmico, variazioni del numero di Reynolds più piccole di alcune centinaia.*

## 11.7 forze aerodinamiche

Nella prima parte di questo capitolo abbiamo visto come la similitudine dinamica permetta di determinare delle grandezze di interesse per un problema mediante un esperimento in scala ridotta. Questa tecnica, anche se estremamente potente da un punto di vista quantitativo, non dà alcuna informazione sui meccanismi fisici presenti nel flusso e quindi

non permette di migliorare la comprensione fluidodinamica di un fenomeno. Ciò è particolarmente importante quando si voglia progettare un dispositivo con certe caratteristiche fluidodinamiche (per esempio un'automobile con basso coefficiente di resistenza) piuttosto che valutare il comportamento di un sistema già esistente.

Tra le varie quantità fluidodinamiche le forze occupano un posto di particolare rilievo in quanto da esse dipende sia il dimensionamento della struttura che il suo comportamento dinamico. Per esempio, nella progettazione di un ponte sopra un fiume si deve tener conto sia della forza che la corrente del fiume esercita sui piloni, sia della forza che eventuali raffiche di vento esercitano sulla struttura sovrastante. In aggiunta, essendo queste forze non stazionarie bisogna anche evitare che le frequenze proprie del ponte siano vicine alle frequenze delle forze in quanto l'instaurarsi di fenomeni di risonanza può portare al collasso della struttura anche per forze di modesta entità.

In generale preso un corpo di forma qualunque ed isolato un suo elemento di superficie si avrà che la forza sarà generata dall'azione della pressione che agisce normalmente alla superficie e dagli sforzi viscosi che invece agiscono tangenzialmente (figura 11.11).

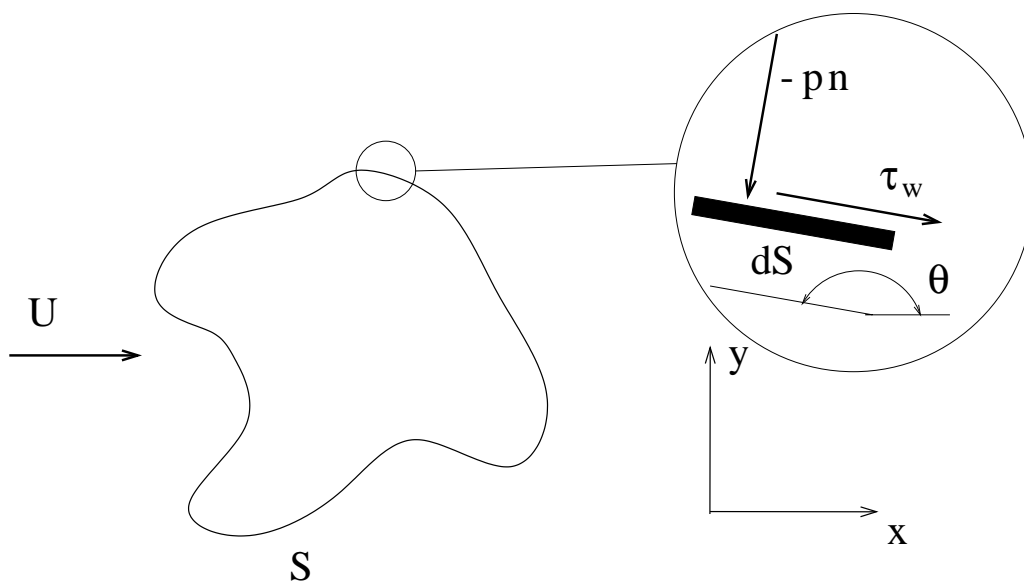


Figura 11.11: Schema di forze locali di pressione e viscosi.

Dallo schema di figura appare chiaro che se  $dS$  è l'elemento infinitesimo di superficie del corpo risulterà  $d\mathbf{F} = (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_w)dS$  da cui per integrazione si ottiene

$$\mathbf{F} = \int_S (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_w)dS \quad (11.14)$$

che è la forza cercata. A dispetto della sua semplicità l'espressione (11.14) non è praticamente mai calcolabile per via analitica in quanto la conoscenza della funzione integranda presuppone la determinazione dei campi di pressione e velocità nell'intorno del corpo che a loro volta sono governati dalle equazioni di Navier–Stokes.

Data l'impossibilità di valutare esplicitamente la (11.14) consideriamo allora come semplice esempio il flusso intorno ad un cilindro circolare e cerchiamo almeno di vedere in che modo agiscono i due termini della funzione integranda ed in quali casi uno diventa preponderante rispetto all'altro.

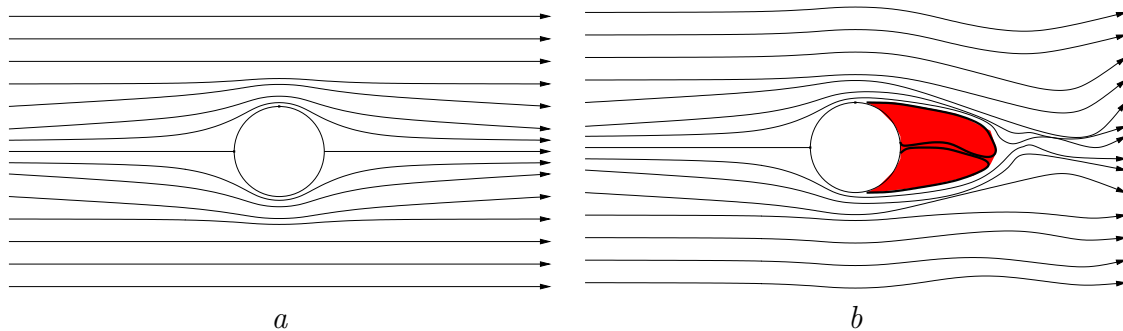


Figura 11.12: Linee di corrente per il flusso intorno ad un cilindro: (a) flusso potenziale, (b) flusso viscoso. (La zona marcata in rosso indica una bolla di ricircolazione con il flusso separato).

Iniziamo con il ricordare che nel caso di flusso potenziale le linee di corrente sono come in figura 11.12a e che a causa della loro simmetria tra la parte frontale e quella posteriore del cilindro danno una risultante nulla delle forze di pressione. In aggiunta, nelle ipotesi di flusso potenziale le azioni tangenziali sono identicamente nulle da cui si conclude che il flusso esercita un sistema di forze a risultante nulla sul corpo (paradosso di d'Alembert). Nel caso reale le cose vanno in modo ben diverso come è schematizzato nella figura 11.12b. Si osserva infatti che già per numeri di Reynolds  $\mathcal{O}(50)$  lo strato limite separa immediatamente a valle della sezione massima generando una scia vorticoso e non stazionaria.

È intuitivo che un primo effetto della viscosità è quello di generare degli sforzi viscosi sulla superficie del cilindro che indurranno delle forze assenti nel caso potenziale. Il confronto tra le figure 11.12a e 11.12b mostra tuttavia che la viscosità produce un evidente fenomeno di separazione il cui effetto non si può confinare ad un sottile strato di fluido adiacente al corpo. La separazione dello strato limite si spiega facilmente ricordando che la velocità tangenziale sul contorno del corpo calcolata secondo la teoria potenziale è  $u_\theta = 2U \sin \theta$  in cui  $U$  è la velocità della corrente all' $\infty$  e  $\theta$  la coordinata azimutale misurata a partire dal punto di ristagno anteriore. Questa espressione ci dice che il flusso esterno accelera tra  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$  mentre deve decelerare tra  $\theta = \pi/2$  e  $\theta = \pi$ . In base all'equazione di Bernoulli si ha quindi una pressione decrescente (gradiente di pressione favorevole) per  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  ed una pressione crescente (gradiente di pressione sfavorevole) per  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ . Lo strato limite si troverà quindi di separare nella seconda metà del cilindro e poiché parte dell'energia cinetica è stata dissipata per effetti viscosi già nella prima metà del cilindro la separazione si verifica inevitabilmente per numeri di Reynolds maggiori di circa 50. La maggiore conseguenza di questa separazione è il mancato recupero della pressione a valle del cilindro che induce quindi una dissimmetria

tra monte e valle come mostrato in figura 11.13. Evidentemente, questa dissimmetria produrrà una forza di pressione la cui risultante è diretta come il flusso ed è quindi una forza di resistenza; per il cilindro, e più in generale per tutti i corpi tozzi, il termine di pressione nella (11.14) risulta dominante rispetto a quello viscoso che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati diventa trascurabile.

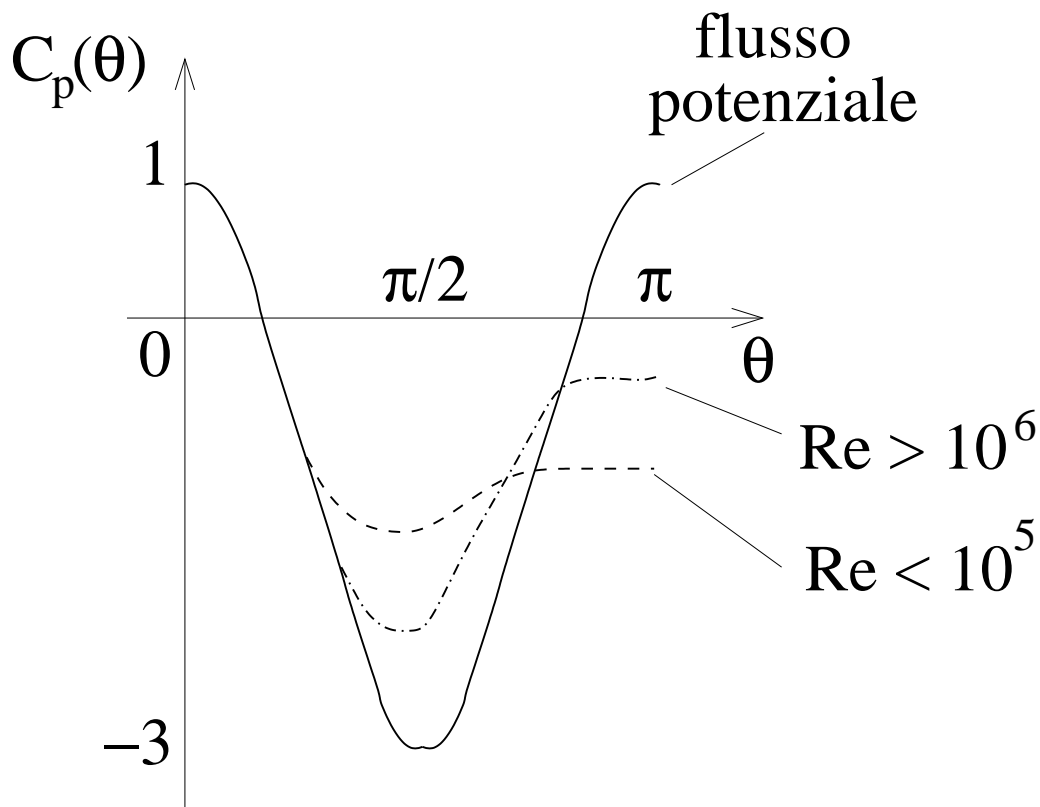


Figura 11.13: Coefficiente di pressione per un cilindro bidimensionale: confronto tra flusso potenziale e flusso viscoso.

Osservando la figura 11.13 potrebbe sembrare singolare il fatto che si ha un recupero di pressione maggiore nel flusso a  $Re > 10^6$  rispetto al quello a  $Re < 10^5$ . Questo comportamento è dovuto alla transizione dello strato limite da laminare a turbolento; in quest'ultimo caso, infatti, la diffusione di quantità di moto dal flusso esterno all'interno dello strato limite risulta molto più efficiente del caso laminare e, con una maggiore energia cinetica, lo strato limite riesce a risalire più a lungo la zona con gradiente avverso di pressione prima di separare <sup>4</sup> (figura 11.14).

Una realizzazione di laboratorio della fenomenologia appena descritta è riportata in

<sup>4</sup>Questo fenomeno è ben noto ai costruttori di palle da golf i quali provocano artificialmente la transizione alla turbolenza dello strato limite mediante delle irregolarità della superficie (dimples). In questo modo si riesce a diminuire la resistenza della palla che può quindi percorrere uno spazio maggiore, rispetto ad una con superficie liscia, a parità di quantità di moto iniziale.

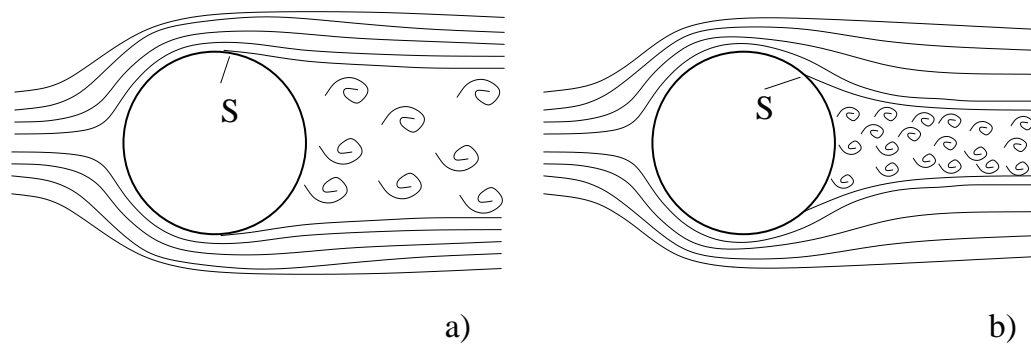


Figura 11.14: Schema di scia a valle di un cilindro bidimensionale: *a)* flusso laminare, *b)* flusso turbolento.

figura 11.15 dove si può notare le minore estensione della zona di separazione nel flusso in regime turbolento rispetto al caso laminare.

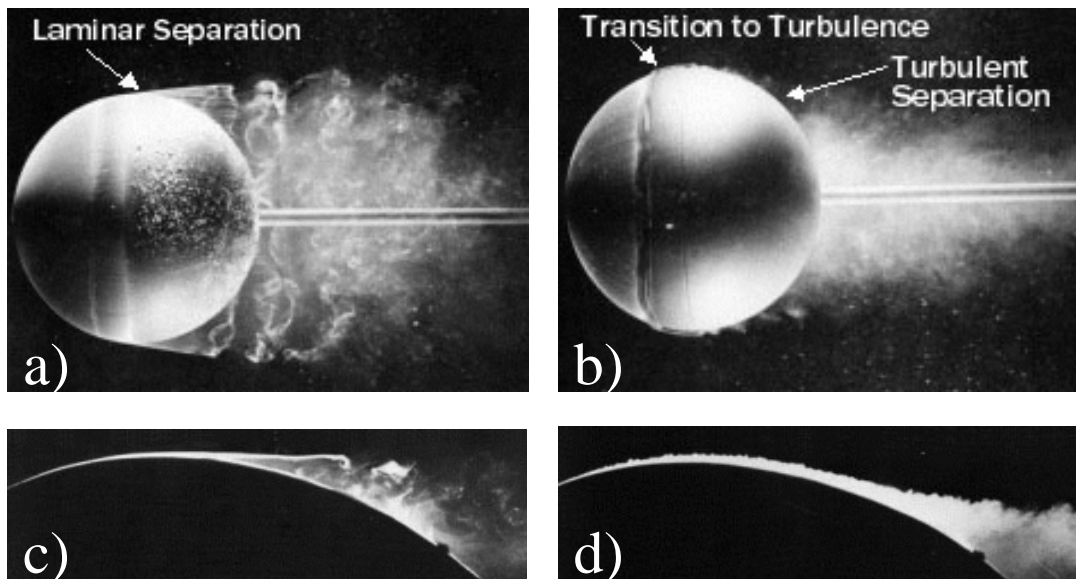


Figura 11.15: Visualizzazione sperimentale del flusso intorno ad una sfera *a)* flusso laminare, *b)* flusso turbolento. I pannelli *c)* e *d)* riportano degli ingrandimenti delle zone, rispettivamente, di separazione e di transizione.

L'evoluzione con il numero di Reynolds di tutti i fenomeni descritti viene riassunta nella figura 11.16 in cui è riportato l'andamento del coefficiente di resistenza  $C_D$  in funzione di  $Re$ . Ricordiamo che il coefficiente di resistenza è definito come

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 S} \quad (11.15)$$

dove  $D$  è il modulo della forza di resistenza ed  $S$  è la superficie frontale del cilindro.

Nel primo tratto, per  $Re < 1$  si ha il coefficiente di resistenza che diminuisce come  $Re^{-1}$  ( $C_D \simeq 16\pi/Re$ ) e quindi la resistenza  $D$  cresce linearmente con la velocità. Questo

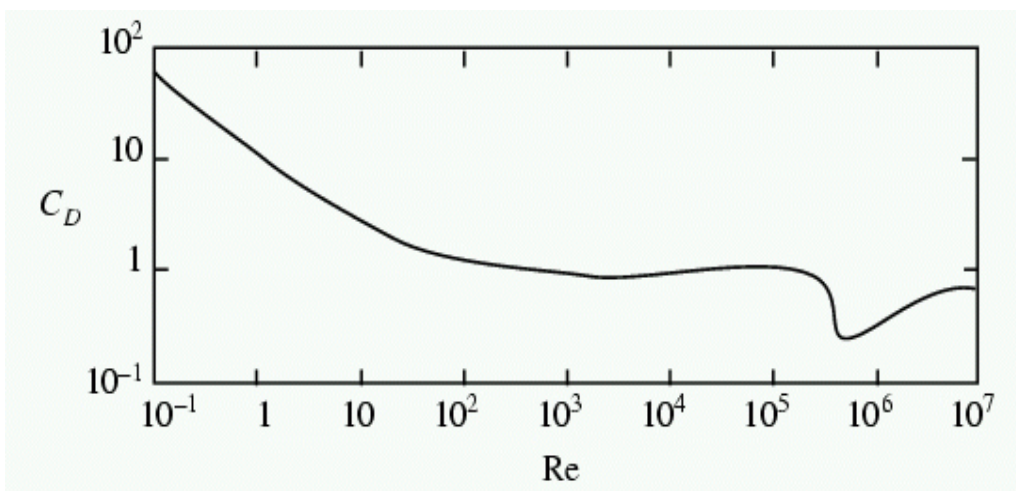


Figura 11.16: Coefficiente di resistenza per un cilindro bidimensionale.

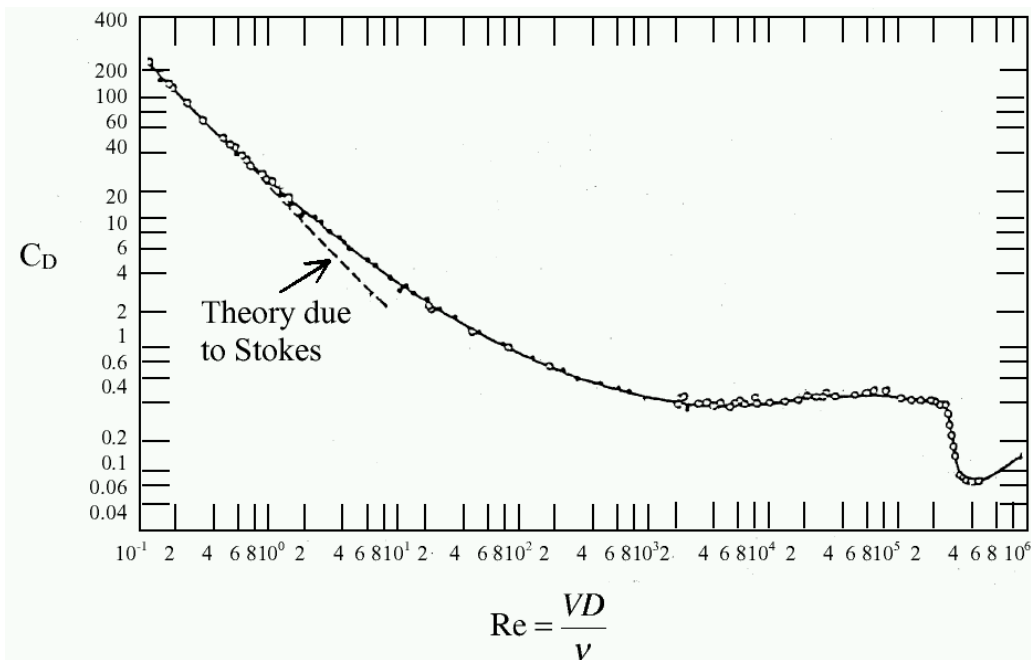


Figura 11.17: Coefficiente di resistenza per una sfera.

comportamento è tipico di tutti i flussi a numeri di Reynolds estremamente bassi e deriva dal poter trascurare i termini inerziali nelle equazioni di Navier–Stokes; in questo regime (regime di Stokes) si ha quindi un semplice bilanciamento tra forze di pressione e forze viscose e la resistenza è generata oltre che dalle azioni tangenziali anche dalla deformazione del fluido intorno al corpo (che per bassi  $Re$  non è più limitato ad uno strato sottile adiacente alla superficie stessa).

Da un punto di vista teorico questo comportamento può essere facilmente compreso ricorrendo all’analisi dimensionale. Per velocità del flusso estremamente ridotte, infatti,

non solo gli effetti della comprimibilità ma anche quelli inerziali sono ininfluenti e per la resistenza  $D$  del cilindro si può porre  $D = f(U, d, \mu)$ . Il teorema di Buckingham ci dice che questa relazione deve essere governata da un solo parametro adimensionale, ossia

$$\frac{D}{\mu d U} = C,$$

o, in termini di coefficiente di resistenza  $C_D$ ,

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = \frac{2C\mu d U}{\rho U^2 S} = \frac{2C}{Re}, \quad (11.16)$$

essendo  $S = Ad^2$  (con  $A$  costante dipendente dal particolare corpo) e  $C = C/A$ : questa relazione rispetta l'andamento trovato nel primo tratto della curva in figura 11.16. Bisogna notare che il valore specifico di  $C$  dipende dal corpo considerato (per esempio per un cilindro si ha  $C_D \simeq 16\pi/Re$  e quindi  $C \simeq 8\pi$  mentre per una sfera risulta  $C_D = 24/Re$  ossia  $C = 12$ ) al contrario l'andamento  $C_D \sim 1/Re$  è caratteristico di tutti i flussi a numeri di Reynolds minori o uguali all'unità (flussi di Stokes).

Tornando alla figura 11.16, un secondo tratto interessante è quello in cui il numero di Reynolds è compreso tra  $2 \cdot 10^4$  e  $3 \cdot 10^5$  dove il  $C_D$  è costante e vale circa 1.2. In questo tratto i fenomeni di separazione sono ormai completi e la resistenza di pressione dà il contributo dominante alla resistenza totale; consistentemente il  $C_D$  rimane costante anche se con l'aumentare del numero di Reynolds aumentano gli sforzi viscosi alla parete. In base alla definizione (11.15) un coefficiente di resistenza costante implica una resistenza che cresce con  $U^2$  e quindi molto più rapidamente che nel caso precedente.

Per  $5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 10^6$  si verifica una brusca diminuzione del coefficiente di resistenza dovuto alla transizione da regime laminare a turbolento precedentemente discussa. Vale la pena di notare che durante la transizione si ha una così brusca diminuzione del  $C_D$  che persino la resistenza  $D$  diminuisce lievemente. Per  $Re > 10^6$  tuttavia, il coefficiente di resistenza si attesta nuovamente ad un valore costante ( $C_D \simeq 0.6$ ) e la resistenza ricomincia a crescere come  $U^2$ . Purtroppo, a parte pochissime eccezioni, tutte le applicazioni pratiche si trovano in questa condizione che implica un elevato dispendio di energia per mantenere lo stato di moto.

Nel flusso intorno ad un cilindro si può affermare che la forza di resistenza è generata essenzialmente dalla distribuzione di pressione sul corpo a sua volta determinata dai fenomeni di separazione dello strato limite. Questa caratteristica è comune a tutti i flussi intorno a corpi tozzi in cui si generano intensi gradienti sfavorevoli di pressione.

Il comportamento del cilindro bidimensionale è caratteristico di tutti i corpi tozzi per alcuni dei quali vengono riportati in tabella alcuni coefficienti di resistenza per il flusso in regime di turbolenza sviluppata (figure 11.18–11.20).

Se un corpo, al contrario, è affusolato i gradienti di pressione saranno più deboli ed i fenomeni di separazione possono essere generalmente evitati. Un tipico esempio di corpo affusolato è il profilo alare in cui la resistenza è quasi totalmente generata dagli sforzi viscosi; le forze prodotte da questi ultimi, tuttavia sono di entità più modesta rispetto

alle forze di pressione e, per fare un esempio, il profilo in figura con dimensione trasversale  $10d$  ha lo stesso coefficiente di resistenza di un cilindro circolare di diametro  $d$ .

La distribuzione di pressioni su un corpo, comunque, non genera solo forze di resistenza ma anche una forza ortogonale alla direzione della corrente detta portanza  $L$ . Questa forza viene prodotta quando la distribuzione di pressione sulla superficie del corpo non ha simmetria rispetto ad un piano orizzontale e può essere quindi prodotta da corpi asimmetrici oppure da corpi simmetrici disposti asimmetricamente rispetto alla direzione della corrente. Analogamente alla resistenza anche per la portanza si può definire un suo coefficiente

$$c_L = \frac{2L}{\rho U^2 S},$$

per il quale possono essere applicati tutti i risultati della similitudine dinamica.

È intuitivo immaginare che detto  $\alpha$  l'angolo di incidenza di un profilo rispetto alla corrente, al crescere di  $\alpha$  crescerà il coefficiente di portanza  $c_L$  (in quanto aumenta la dissimmetria delle pressioni tra le superfici superiore ed inferiore) ma aumenterà anche il coefficiente di resistenza  $c_D$  (perché aumenta la superficie frontale nella direzione ortogonale al flusso). Per i profili alari è usuale riportare in un unico grafico i coefficienti di resistenza e di portanza ponendo l'angolo di incidenza come parametro. L'andamento di figura 11.22 è caratteristico dei profili alari e, più in generale, dei corpi affusolati. In particolare si osserva che al crescere di  $\alpha$  non si ha un aumento indefinito del  $c_L$  ma dopo un valore limite dell'angolo di incidenza si ha un crollo improvviso del  $c_L$  ed un brusco aumento del  $c_D$ . Ciò si verifica quando si ha il distacco dello strato limite dal corpo che, in pratica, si comporta come un corpo tozzo (vedi figura 11.23). Questa condizione è detta di stallo ed è particolarmente indesiderata nei velivoli in quanto viene bruscamente a mancare la forza di sostentamento a fronte di un forte aumento di resistenza.



---

**ESEMPIO**

---

Una sfera d'acciaio di diametro  $d$  precipita in acqua alla velocità  $U$ . Con quale velocità 'precipiterebbe' la stessa sfera immersa nel mercurio?

$$\begin{aligned} \rho_{fe} &= 7800 \text{ Kg/m}^3 & \rho_{hg} &= 13600 \text{ Kg/m}^3 \\ d &= 15 \text{ cm} & U &= 5.775 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Soluzione**

Dal bilancio tra spinta di Archimede e forza peso in acqua si ha

$$\frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8}(\rho_{Fe} - \rho_{H_2O})g = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}U^2\pi\frac{d^2}{4}C_D, \implies C_D = 0.4.$$

Da una relazione analoga per il mercurio

$$U = -\sqrt{\frac{4dg(\rho_{Fe} - \rho_{Hg})}{3\rho_{Hg}C_D}} = -1.446 \text{ m/s},$$

(la sfera si muove verso l'alto). I numeri di Reynolds sono in entrambi i casi  $> 3 \cdot 10^5$  ed il  $C_D$  è approssimativamente indipendente dal Reynolds.

---

---

**ESEMPIO**


---

Una vettura procede in autostrada alla velocità  $U_1$  impiegando una potenza  $P_1$  con un consumo di carburante  $fc_1$ . Assumendo trascurabili tutti i fattori tranne quelli aerodinamici e che il consumo di carburante vari linearmente con la potenza, quale sarà il consumo di carburante alla velocità  $U_2$ ? Se il motore può erogare una potenza massima  $P_{max}$ , quale è la velocità massima raggiungibile dall'automobile?

$$\begin{aligned} P_{max} &= 9.5P_1 & fc_1 &= 4.41 \text{ l/h} \\ U_1 &= 75 \text{ Km/h} & U_2 &= 130 \text{ Km/h} \end{aligned}$$

**Soluzione**

Se la vettura procede a velocità costante, la spinta del motore bilancerà la resistenza aerodinamica (abbiamo supposto tutti gli altri fattori trascurabili) si avrà quindi per la resistenza  $D$  e la potenza  $P$ , rispettivamente,  $D = \frac{1}{2}\rho U^2 S c_D$ ,  $P = DU = \frac{1}{2}\rho U^3 S c_D$ . Avendo assunto il consumo di carburante linearmente dipendente dalla potenza si può porre  $fc = A \cdot P$ , essendo  $A$  una costante. Utilizzando tutte le relazioni precedenti per le velocità  $U_1$  ed  $U_2$  ed osservando che, in regime turbolento il coefficiente di resistenza diventa indipendente dal Reynolds si ottiene:  $P_1 = \frac{1}{2}\rho U_1^3 S c_D$ ,  $P_2 = \frac{1}{2}\rho U_2^3 S c_D = P_1 \frac{U_2^3}{U_1^3}$ , e  $fc_1 = A \cdot P_1$ ,  $fc_2 = A \cdot P_2 = fc_1 \frac{P_2}{P_1} = fc_1 \frac{U_2^3}{U_1^3} = 22.96 \text{ l/h}$ . Per la velocità massima infine

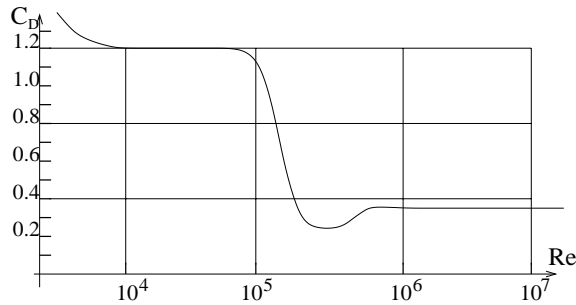
$$P_{max} = \frac{1}{2}\rho U_{max}^3 S c_D = P_1 \frac{U_{max}^3}{U_1^3} \implies U_{max} = U_1 \left( \frac{P_{max}}{P_1} \right)^{\frac{1}{3}} = 159 \text{ Km/h.}$$

orza aggiuntiva verso il basso sarà  $F_y = -588.273 \text{ N}$ .

---

## ESEMPIO

Un corpo ha un andamento del coefficiente di resistenza con il numero di Reynolds come riportato in figura. Il corpo ha una dimensione caratteristica  $L$  e, quando viene investito da una corrente a velocità  $U_1$ , fornisce un valore di resistenza  $D_1$ . Sapendo che il fluido ha viscosità  $\nu$ , calcolare il valore della resistenza quando la velocità del fluido è  $U_2$ .



$$\begin{aligned} L &= 0.25 \text{ m} & U_1 &= 3 \text{ m/s} \\ D_1 &= 1.35 \text{ N} & \nu &= 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \\ U_2 &= 90 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## Soluzione

Noti  $U_1$ ,  $L$  e  $\nu$  si ricava  $Re_1 = 50000$  per cui dal grafico si ha  $c_{D1} = 1.2$  e dall'espressione  $D_1 = \rho U_1^2 S c_{D1} / 2$  si ricava  $\rho S = 0.25 \text{ Kg/m}$ . Dal valore di  $U_2$  si calcola quindi  $Re_2 = 1.5 \cdot 10^6$  e dal grafico  $c_{D2} = 0.35$ . Il valore di  $D_2$  risulta quindi  $D_2 = \rho U_2^2 S c_{D2} / 2 = 354.375 \text{ N}$ .

---

**ESEMPIO**


---

La formazione dei chicchi di grandine è dovuta a correnti ascensionali all'interno delle nubi che consentono il continuo accumulo di ghiaccio intorno ad un nucleo fino a quando il peso proprio del singolo chicco diventa troppo grande e cade al suolo. Per un vento ascensionale di 130 Km/h, quanto può valere il diametro di un chicco di grandine? Fare tutte le assunzioni ritenute necessarie e giustificarle.

**Soluzione**

L'andamento del coefficiente di resistenza  $C_D$  per una sfera in funzione del numero di Reynolds presenta due "plateau": il primo  $C_{D1} \simeq 0.4$  per  $10^3 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$  ed il secondo  $C_{D2} \simeq 0.2$  per  $Re > 5 \cdot 10^5$ .

D'altra parte, dal bilancio tra resistenza, peso e spinta di Archimede, per un chicco di grandine supposto sferico risulta

$$\frac{1}{2}\rho_a U^2 S C_D = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_g - \rho_a)$$

con  $\rho_a$  la densità dell'aria,  $\rho_g = 920 \text{ Kg/m}^3$  la densità del ghiaccio  $S = \pi R^2$  ed  $R$  il raggio della sfera. Dall'espressione sopra si ricava

$$R = \frac{3\rho_a U^2 C_D}{8g(\rho_g - \rho_a)}$$

che, per  $C_{D1} = 0.2$  fornisce  $R_1 = 1.35 \text{ cm}$  mentre per  $C_{D2} = 0.4$  risulta  $R_2 = 2.7 \text{ cm}$ . Per i numeri di Reynolds risulta invece  $Re_1 = 64800$  e  $Re_2 = 129600$  la seconda soluzione, quindi,  $R_2 = 2.7 \text{ cm}$  è quella giusta.

---

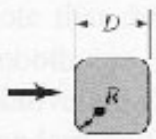
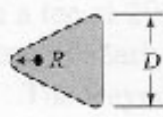
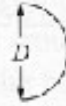
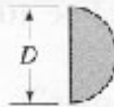

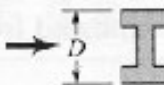
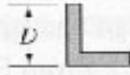
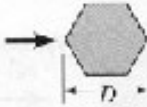
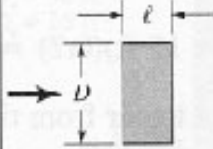
Shape	Reference area $A$ ( $b$ = length)	Drag coefficient $C_D = \frac{C_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$	Reynold number $Re = \rho V D / \mu$																	
 <p>Square rod with rounded corners</p>	$A = bD$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>R/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2.2</td></tr> <tr><td>0.02</td><td>2.0</td></tr> <tr><td>0.17</td><td>1.2</td></tr> <tr><td>0.33</td><td>1.0</td></tr> </tbody> </table>	$R/D$	$C_D$	0	2.2	0.02	2.0	0.17	1.2	0.33	1.0	$Re = 10^5$							
$R/D$	$C_D$																			
0	2.2																			
0.02	2.0																			
0.17	1.2																			
0.33	1.0																			
 <p>Rounded equilateral triangle</p>	$A = bD$	<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>R/D</math></th> <th colspan="2"><math>C_D</math></th> </tr> <tr> <th>→</th> <th>←</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1.4</td><td>2.1</td></tr> <tr><td>0.02</td><td>1.2</td><td>2.0</td></tr> <tr><td>0.08</td><td>1.3</td><td>1.9</td></tr> <tr><td>0.25</td><td>1.1</td><td>1.3</td></tr> </tbody> </table>	$R/D$	$C_D$		→	←	0	1.4	2.1	0.02	1.2	2.0	0.08	1.3	1.9	0.25	1.1	1.3	$Re = 10^5$
$R/D$	$C_D$																			
	→	←																		
0	1.4	2.1																		
0.02	1.2	2.0																		
0.08	1.3	1.9																		
0.25	1.1	1.3																		
 <p>Semicircular shell</p>	$A = bD$	<table border="1"> <tbody> <tr><td>→</td><td>2.3</td></tr> <tr><td>←</td><td>1.1</td></tr> </tbody> </table>	→	2.3	←	1.1	$Re = 2 \times 10^4$													
→	2.3																			
←	1.1																			
 <p>Semicircular cylinder</p>	$A = bD$	<table border="1"> <tbody> <tr><td>→</td><td>2.15</td></tr> <tr><td>←</td><td>1.15</td></tr> </tbody> </table>	→	2.15	←	1.15	$Re > 10^4$													
→	2.15																			
←	1.15																			
 <p>T beam</p>	$A = bD$	<table border="1"> <tbody> <tr><td>→</td><td>1.80</td></tr> <tr><td>←</td><td>1.65</td></tr> </tbody> </table>	→	1.80	←	1.65	$Re > 10^4$													
→	1.80																			
←	1.65																			
 <p>I-beam</p>	$A = bD$	2.05	$Re > 10^4$																	
 <p>Angle</p>	$A = bD$	<table border="1"> <tbody> <tr><td>→</td><td>1.98</td></tr> <tr><td>←</td><td>1.82</td></tr> </tbody> </table>	→	1.98	←	1.82	$Re > 10^4$													
→	1.98																			
←	1.82																			
 <p>Hexagon</p>	$A = bD$	1.0	$Re > 10^6$																	
 <p>Rectangle</p>	$A = bD$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>l/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><math>\leq 0.1</math></td><td>1.9</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>2.5</td></tr> <tr><td>0.65</td><td>2.9</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>2.2</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>1.6</td></tr> <tr><td>3.0</td><td>1.3</td></tr> </tbody> </table>	$l/D$	$C_D$	$\leq 0.1$	1.9	0.5	2.5	0.65	2.9	1.0	2.2	2.0	1.6	3.0	1.3	$Re = 10^5$			
$l/D$	$C_D$																			
$\leq 0.1$	1.9																			
0.5	2.5																			
0.65	2.9																			
1.0	2.2																			
2.0	1.6																			
3.0	1.3																			

Figura 11.18: Il coefficiente di resistenza per corpi di varia forma.








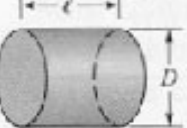
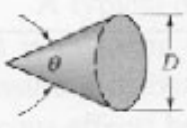
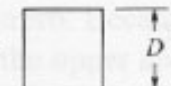

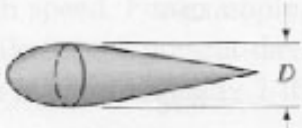
Shape	Reference area $A$	Drag coefficient $C_D$	Reynolds number $Re = \rho U D / \mu$										
 Solid hemisphere	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	 1.17  0.42	$Re > 10^4$										
 Hollow hemisphere	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	 1.42  0.38	$Re > 10^4$										
 Thin disk	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.1	$Re > 10^1$										
 Circular rod parallel to flow	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>l/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.5</td> <td>1.1</td> </tr> <tr> <td>1.0</td> <td>0.93</td> </tr> <tr> <td>2.0</td> <td>0.83</td> </tr> <tr> <td>4.0</td> <td>0.85</td> </tr> </tbody> </table>	$l/D$	$C_D$	0.5	1.1	1.0	0.93	2.0	0.83	4.0	0.85	$Re > 10^5$
$l/D$	$C_D$												
0.5	1.1												
1.0	0.93												
2.0	0.83												
4.0	0.85												
 Cone	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\theta</math>, degrees</th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10</td> <td>0.30</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>0.55</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>0.80</td> </tr> <tr> <td>90</td> <td>1.15</td> </tr> </tbody> </table>	$\theta$ , degrees	$C_D$	10	0.30	30	0.55	60	0.80	90	1.15	$Re > 10^4$
$\theta$ , degrees	$C_D$												
10	0.30												
30	0.55												
60	0.80												
90	1.15												
 Cube	$A = D^2$	1.05	$Re > 10^4$										
 Cube	$A = D^2$	0.80	$Re > 10^4$										
 Streamlined body	$A = \frac{\pi}{4} D^2$	0.04	$Re > 10^5$										

Figura 11.19: Il coefficiente di resistenza per corpi di varia forma.


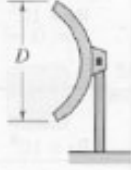

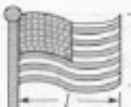







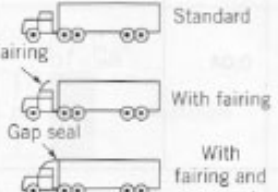
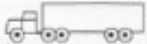
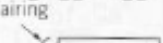
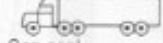



Shape	Reference area	Drag coefficient $C_D$												
 Parachute	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	1.4												
 Porous parabolic dish	Frontal area $A = \frac{\pi}{4} D^2$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Porosity</th> <th>0</th> <th>0.2</th> <th>0.5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>1.42</td> <td>1.20</td> <td>0.82</td> </tr> <tr> <td>←</td> <td>0.95</td> <td>0.90</td> <td>0.80</td> </tr> </tbody> </table> <p>Porosity = open area/total area</p>	Porosity	0	0.2	0.5	→	1.42	1.20	0.82	←	0.95	0.90	0.80
Porosity	0	0.2	0.5											
→	1.42	1.20	0.82											
←	0.95	0.90	0.80											
 Average person	Standing Sitting Crouching	$C_D A = 9 \text{ ft}^2$ $C_D A = 6 \text{ ft}^2$ $C_D A = 2.5 \text{ ft}^2$												
 Fluttering flag	$A = \ell D$	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\ell/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.07</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.12</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.15</td> </tr> </tbody> </table>	$\ell/D$	$C_D$	1	0.07	2	0.12	3	0.15				
$\ell/D$	$C_D$													
1	0.07													
2	0.12													
3	0.15													
 Empire State Building	Frontal area	1.4												
 Six-car passenger train	Frontal area	1.8												
 Bikes														
 Upright commuter	$A = 5.5 \text{ ft}^2$	1.1												
 Racing	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.88												
 Drafting	$A = 3.9 \text{ ft}^2$	0.50												
 Streamlined	$A = 5.0 \text{ ft}^2$	0.12												
 Tractor-trailer trucks														
 Standard	Frontal area	0.96												
 With fairing	Frontal area	0.76												
 With fairing and gap seal	Frontal area	0.70												
 Tree	Frontal area	$U = 10 \text{ m/s}$ 0.43 $U = 20 \text{ m/s}$ 0.26 $U = 30 \text{ m/s}$ 0.20												
 Dolphin	Wetted area	0.0036 at $Re = 6 \times 10^6$ (flat plate has $C_{Df} = 0.0031$ )												
 Large birds	Frontal area	0.40												

Figura 11.20: Il coefficiente di resistenza per corpi di varia forma.

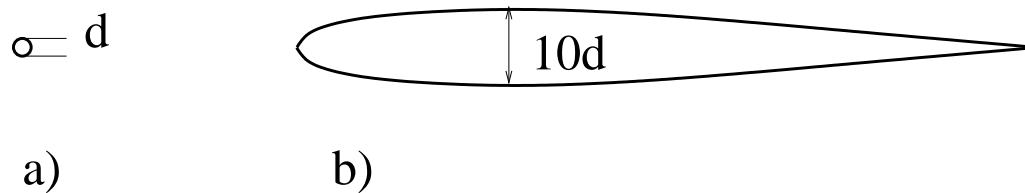


Figura 11.21: Il coefficiente di resistenza per un cilindro bidimensionale di diametro  $d$  e per un profilo alare di spessore  $10d$  sono circa uguali.

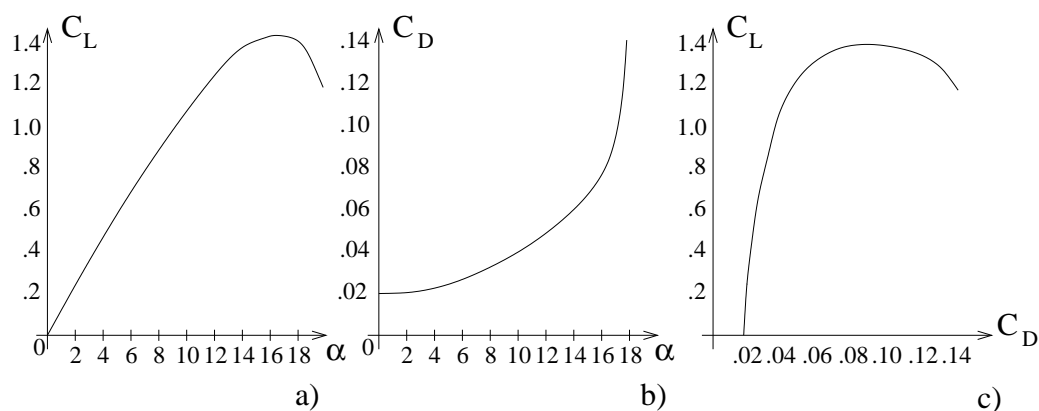


Figura 11.22: Esempi di portanza a) e resistenza b) in funzione dell'angolo di incidenza per un corpo affusolato, e polare del profilo c).

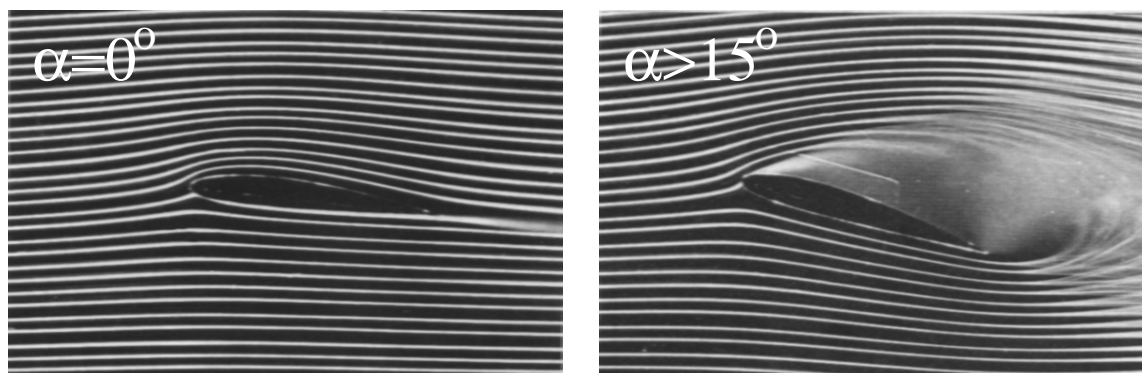


Figura 11.23: Visualizzazione sperimentale delle linee di corrente intorno ad un profilo alare bidimensionale (NACA 0012) a basso ed alto angolo di incidenza.



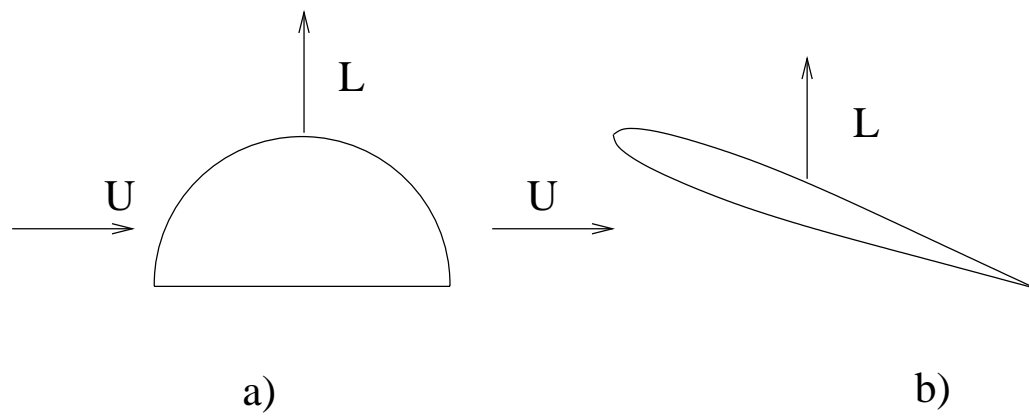


Figura 11.24: Esempi di corpi in grado di generare portanza: *a)* corpo asimmetrico, *b)* corpo simmetrico disposto asimmetricamente nella corrente.



# Capitolo 12

## \* Cenni sui flussi comprimibili

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che in molte applicazioni pratiche la dinamica dei flussi si può considerare incomprimibile anche se il fluido in questione è un gas. In particolare è stato accennato che se il numero di Mach è approssimativamente minore di 0.3 i fenomeni associati alla comprimibilità si possono trascurare; questa assunzione tuttavia cessa di essere valida per i flussi ad ‘alta velocità’ o più in generale quando si voglia tenere conto degli effetti di velocità di propagazione finita delle perturbazioni.

In questo capitolo verranno brevemente accennati alcuni di questi fenomeni lasciando l’analisi più approfondita ai testi specializzati di gasdinamica.

### 12.1 propagazione di piccole perturbazioni e velocità del suono

Per comprendere in modo più intuitivo il motivo per cui le perturbazioni si propagano nei fluidi con velocità finita conviene per un istante ricordare che una particella fluida è in realtà composta da un elevatissimo numero di molecole <sup>1</sup> in continua collisione tra loro in quanto animate da un moto di agitazione termica. Ciò implica che una perturbazione applicata in un punto di un fluido si propaga al suo interno a causa degli urti caotici tra le molecole e giunge in un altro punto solo dopo un tempo finito che dipende dalla frequenza delle collisioni tra molecole e quindi dalla temperatura del fluido stesso.

Se ora ritorniamo al nostro modello di fluido continuo, perdiamo l’identità delle singole molecole ma manteniamo il concetto di velocità finita di propagazione dei disturbi, quindi delle perturbazioni di temperatura, densità etc. non saranno avvertite istantaneamente ovunque ma viaggeranno con una velocità propria  $a$ .

Per calcolare tale velocità supponiamo di avere un condotto di lunghezza  $L$ , sezione  $S$ , con  $L \gg \sqrt{S}$ , nel quale è presente del fluido. Ad un’estremità del condotto è posto un

---

<sup>1</sup>Ricordiamo infatti che l’ipotesi di continuo si basa sul fatto che dei volumi di fluido di dimensioni ‘infinitesime’ rispetto alle dimensioni caratteristiche del flusso [ $\mathcal{O}(\mu m^3)$ ] contengono sempre un così elevato numero di molecole da poter definire velocità, densità, temperatura, etc. in modo statisticamente significativo.

pistone che al tempo  $t_1 = 0^+$  inizia a muoversi con una velocità infinitesima  $dU$  spostando il fluido adiacente alla parete del pistone nella direzione del moto (che supponiamo verso destra).

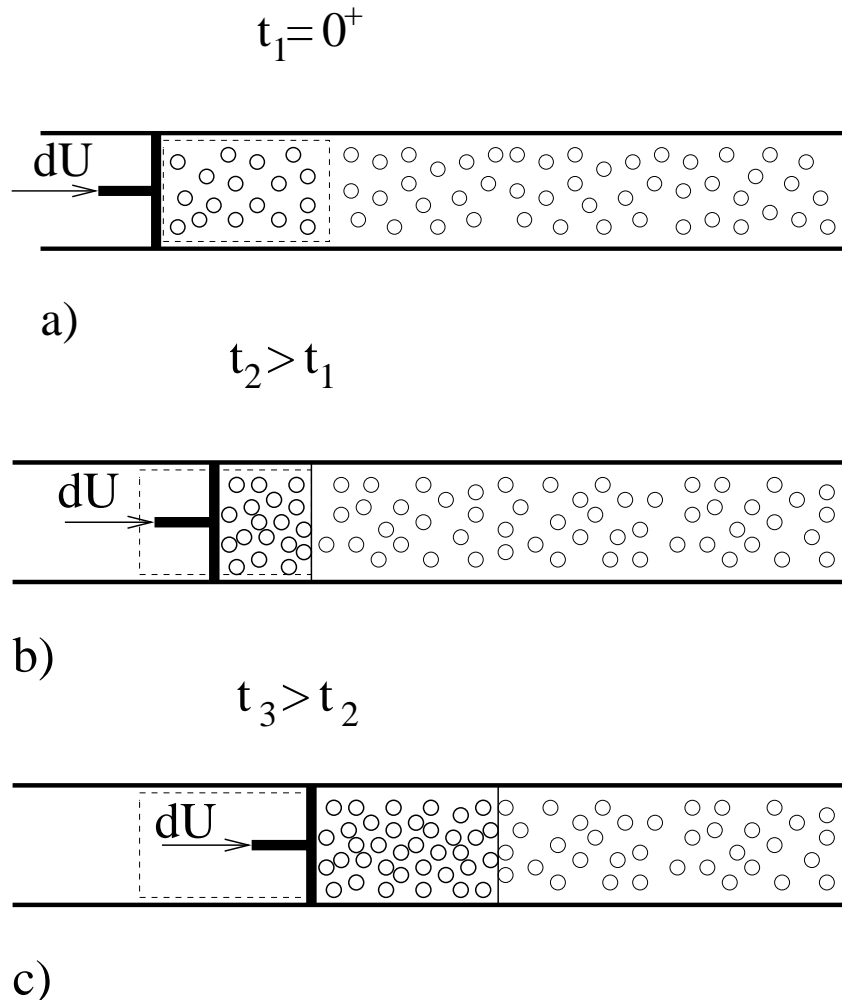


Figura 12.1: Moto del fluido all'interno di un tubo in conseguenza della partenza impulsiva di un pistone.

Dopo un tempo  $t_2 = t_1 + dt$  il pistone si sarà spostato trascinando nel suo moto le particelle fluide immediatamente adiacenti e modificandone le loro variabili di stato. Per esempio, riferendoci alla figura 12.1 si vede che nell'intervallo  $[t_1, t_2]$  le particelle inizialmente contenute nel volumetto di controllo tratteggiato sono ancora rimaste al suo interno (in quanto la perturbazione di velocità non si è ancora propagata oltre tale volumetto) mentre è diminuito lo spazio a loro disposizione. In tale volume si avrà quindi un aumento di densità, pressione e temperatura oltre che di velocità.

Per un tempo  $t_3 > t_2$  (figura 12.1c) il fronte della perturbazione si sarà spostato ulteriormente verso destra accrescendo la regione di fluido interessata dall'azione di compressione del pistone. Isolando una regione di fluido a cavallo dell'onda di compressione

si ha la situazione riportata in figura 12.2a, situazione chiaramente non stazionaria data la velocità di propagazione  $a$  dell'onda.

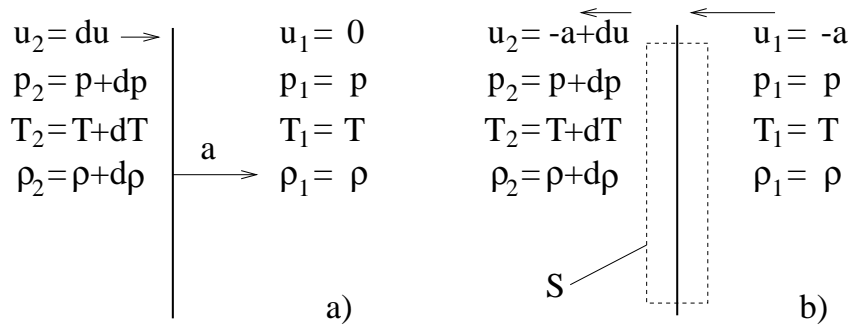


Figura 12.2: a) Stato del fluido a monte e valle dell'onda di compressione, b) la stessa situazione precedente in un riferimento solidale all'onda.

Se tuttavia si riconsidera la stessa configurazione in un riferimento solidale all'onda (ossia si somma al flusso una velocità pari ad  $a$  e diretta verso sinistra) si ottiene una situazione stazionaria che può essere facilmente analizzata utilizzando il volume di controllo indicato dalla linea tratteggiata in figura 12.2b.

Dall'equazione di conservazione della massa in forma integrale per flussi stazionari si ottiene:

$$\rho a S = (\rho + d\rho)(a - du) S, \quad (12.1)$$

che esplicitata e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo si scrive

$$a d\rho = \rho du.$$

Applicando quindi il bilancio della quantità di moto al volume di controllo risulta:

$$\rho a^2 S - (\rho + d\rho)(a - du)^2 S + p S - (p + dp) S = 0, \quad (12.2)$$

che, dopo aver sostituito dalla (12.1)  $\rho a = ((\rho + d\rho)(a - du))$ , diventa

$$\rho a du = dp, \quad (12.3)$$

e mettendo a sistema le equazioni (12.1) e (12.3) si ha:

$$\begin{cases} a d\rho = \rho du \\ \rho a du = dp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{a d\rho}{\rho} \\ \rho a du = dp \end{cases} \Rightarrow a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Osserviamo ora che, essendo la variazione di velocità del pistone infinitesima, si può considerare con buona approssimazione la trasformazione è isentropica. Pertanto risulta che la velocità del suono è calcolata dall'espressione:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$$

che è valida per qualsiasi fluido che subisce una trasformazione isentropica.

Introducendo il modulo elastico del fluido, definito dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{E}{\rho}$$

si ha quindi:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

I valori di  $E$  sono riportati nelle tabelle da cui si possono ricavare i valori di velocità di propagazione delle piccole perturbazioni; nella seguente tabella vengono riportati alcuni esempi.

Benzina	$E = 1.3 \cdot 10^9 N/m$	$\rho = 680 Kg/m^3$	$a = 1382 m/s$
Mercurio	$E = 2.85 \cdot 10^{10} N/m$	$\rho = 13600 Kg/m^3$	$a = 1447 m/s$
Acqua	$E = 2.15 \cdot 10^9 N/m$	$\rho = 1000 Kg/m^3$	$a = 1581 m/s$

Nel caso particolare in cui il fluido in questione sia un gas perfetto, si può ricavare dalle relazioni per una trasformazione isentropica e l'equazione di stato:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C, \quad \frac{p}{\rho} = RT,$$

la velocità del suono per gas perfetto:

$$\begin{cases} \frac{p}{\rho^\gamma} = C \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1} \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = C\rho^\gamma \frac{\gamma}{\rho} = \gamma RT \Rightarrow a = \sqrt{\gamma RT}.$$

Da questa espressione si nota che la velocità del suono in un gas dipende dalla natura del gas attraverso  $\gamma$  ed  $R$  e dalla sua temperatura; questa espressione conferma la descrizione intuitiva data all'inizio di questo capitolo secondo cui la propagazione di un disturbo in un gas è dovuto all'interazione successiva delle sue molecole attraverso le collisioni indotte dal moto di agitazione termica.

Nella seguente tabella si riportano a titolo di esempio le velocità del suono per alcuni gas e per differenti temperature.

Argon	$\gamma = 1.666$	$R = 207.85 J/(KgK)$	$T = 293K$	$a = 246.78 m/s$
Elio	$\gamma = 1.666$	$R = 2078.5 J/(KgK)$	$T = 293K$	$a = 1005.45 m/s$
Aria	$\gamma = 1.4$	$R = 277.13 J/(KgK)$	$T = 293K$	$a = 337.16 m/s$
Aria	$\gamma = 1.4$	$R = 277.13 J/(KgK)$	$T = 800K$	$a = 557.12 m/s$

Supponiamo ora che la velocità del pistone subisca più incrementi infinitesimi  $dU$  in successione. In base a quanto appena visto, ogni incremento di velocità darà luogo ad

un'onda di compressione la cui velocità dipende dalle condizioni termodinamiche del fluido in cui si propaga. Osservando che in ogni compressione il fluido subisce un incremento di temperatura, si ha che, dopo la prima, ogni onda si propaga in un fluido preriscaldato dall'onda che la precede e quindi con una velocità maggiore dell'onda che insegue e minore dell'onda che precede (figura 12.3). Ciò implica che, dopo un tempo finito la coda del treno di onde raggiungerà la testa dando luogo ad un'unica perturbazione che si muove con una velocità intermedia tra quella delle singole perturbazioni. Chiaramente la coalescenza di più perturbazioni di ampiezza infinitesima darà luogo ad un disturbo finito detto urto; è interessante notare che questo si propagherà con una velocità *maggiore* di quella del suono a quella temperatura un quanto la velocità dell'urto è maggiore di quella della prima onda di compressione.

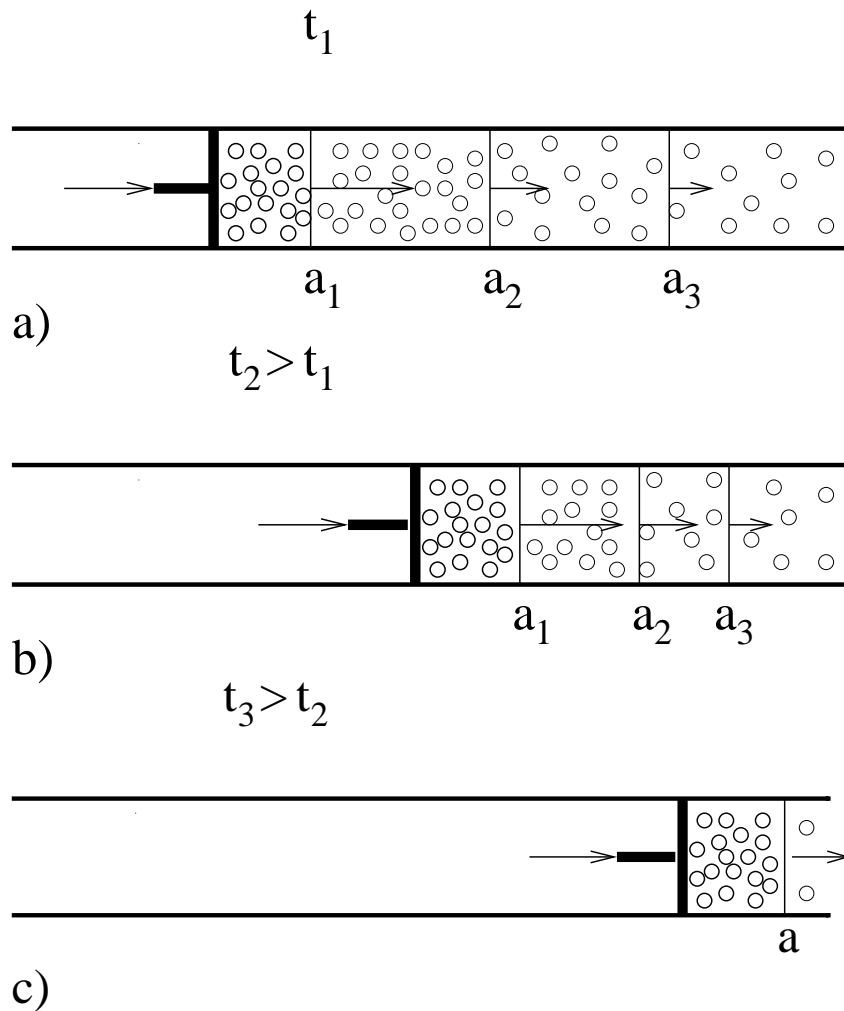


Figura 12.3: Coalescenza di onde di compressione generate ad istanti successivi.

Un altro fatto interessante è che la fenomenologia non è simmetrica per un moto del pistone verso sinistra. Se infatti il pistone si muovesse verso sinistra, inizierebbe la propagazione a destra di un'onda di espansione con velocità  $a_1 = \sqrt{\gamma RT}$ , essendo  $T$  la

temperatura del fluido indisturbato. Il passaggio di quest'onda lascerebbe a valle un fluido espanso e quindi più freddo a temperatura  $T_2 = T - dT$ ; un'onda di espansione successiva si dovrebbe quindi propagare in un fluido più freddo con una velocità  $a_2 = \sqrt{\gamma RT_2} < a_1$ . Ciò implica che un treno di onde di espansione inizialmente equispaziate tenderebbe sempre di più a distanziarsi in quanto la 'testa' si propaga a velocità maggiore rispetto alla 'coda' precludendo così la formazione di 'urti di espansione'. Questa eventualità è peraltro preclusa dal secondo principio della termodinamica in quanto un urto di espansione comporterebbe una variazione di entropia negativa; questi argomenti rientrano tuttavia nell'ambito della gasdinamica e vengono lasciati ai testi specializzati.

## 12.2 Flusso quasi unidimensionale

Dato un flusso all'interno di un condotto si avrà in generale che le sue variabili saranno funzione delle coordinate spaziali e del tempo. In qualche caso, tuttavia, è possibile che la dipendenza da alcune direzioni spaziali e dal tempo si possa trascurare semplificando notevolmente il problema. Per esempio, nella geometria a sezione variabile come quella di figura 12.4 la componente  $u$  di velocità lungo l'asse del condotto avrà un profilo come quello rappresentato con la linea tratteggiata; tale profilo soddisfa la condizione di aderenza alla parete mentre, fuori dallo strato limite, ha la distribuzione piatta caratteristica dei flussi turbolenti. Se il regime di flusso permane turbolento lungo tutto il condotto il profilo di velocità si può ragionevolmente assumere simile lungo tutta la lunghezza del condotto, rendendo sufficiente la sola conoscenza della velocità media per caratterizzare il flusso. In molte applicazioni, inoltre (specialmente quelle aeronautiche), la lunghezza di tali condotti è limitata, rendendo trascurabile tanto l'effetto dei termini viscosi quanto gli scambi di calore e permettendo quindi l'uso del modello di fluido perfetto.

Notiamo a margine che in un modello di flusso senza termini viscosi la condizione di aderenza non può essere soddisfatta alle pareti dove invece il vettore velocità è tangente al contorno. In un condotto a sezione variabile ciò comporta la generazione di una componente di velocità  $v$  ortogonale all'asse del condotto e se vogliamo che  $v$  risulti trascurabile rispetto ad  $u$  deve essere  $v = u \tan \alpha \approx u\alpha = udh/dx \ll u$  ossia  $dh/dx \ll 1$ . Questa condizione implica che il condotto abbia una sezione lentamente variabile ossia che le pareti formino un angolo piccolo con l'asse  $x$ .

Descriviamo quantitativamente il flusso quasi unidimensionale partendo dalle equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia scritte in forma differenziale.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathcal{E} \right) = -\mathbf{u} \nabla p + \mu \Phi + \rho q + \nabla \cdot (k \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}.$$



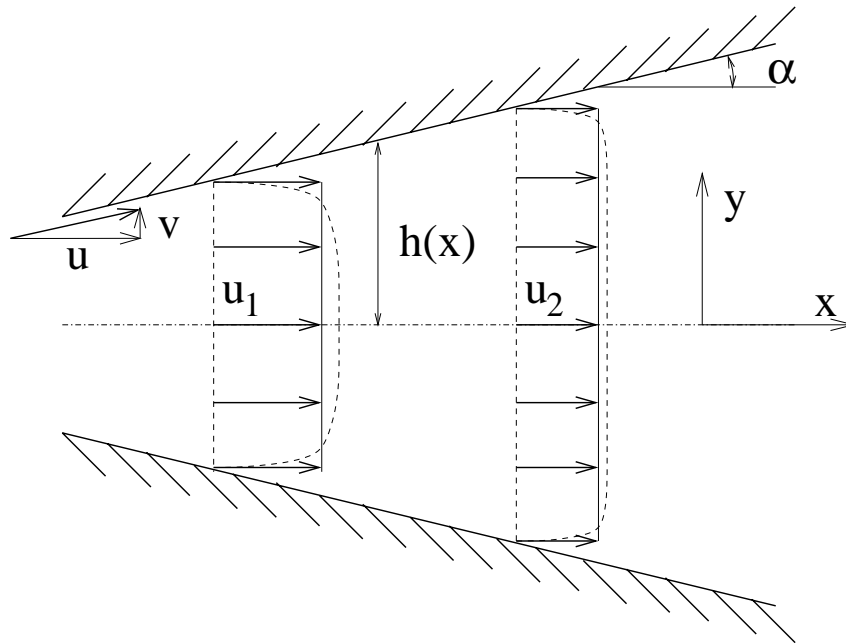


Figura 12.4: Schema di condotto a sezione variabile con un flusso quasi monodimensionale.

Se supponiamo che il flusso sia non viscoso:  $\mu = 0$  ed anche termicamente non conduttore  $\nabla \cdot (k\nabla T) = 0$ , che le forze di volume siano trascurabili  $\mathbf{f} = 0$ , e che la produzione interna di calore risulti nulla  $q = 0$  le equazioni di conservazione diventano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) &= -\nabla p \\ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathcal{E} \right) &= -\mathbf{u} \nabla p.\end{aligned}$$

In forma integrale, su un volume di controllo  $V$  di superficie  $S$ , (figura 12.4) la conservazione della massa assume la forma

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

ossia

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV &= - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_S \rho dS \right) dx &= - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} S dx &= - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$

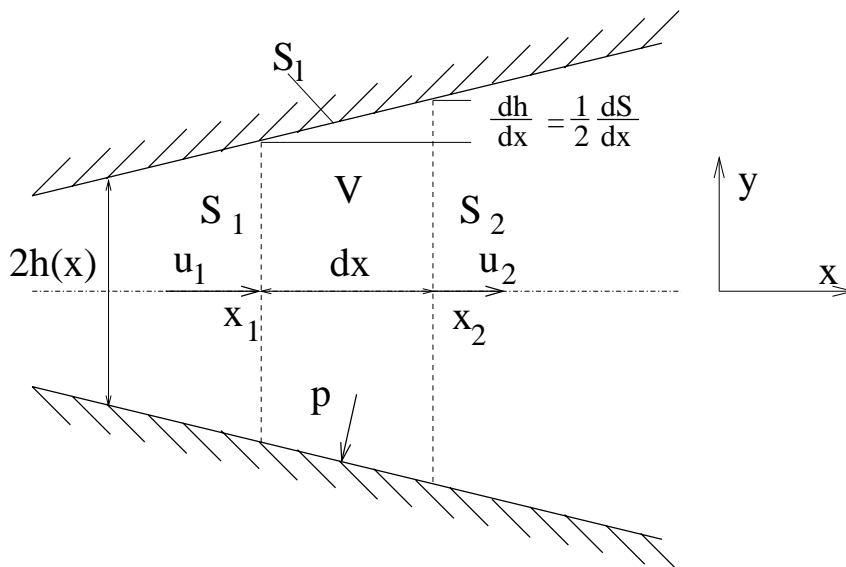


Figura 12.5: Bilancio su un volume di controllo in un condotto a sezione variabile.

essendo  $\bar{\rho} = \frac{1}{S} \int_S \rho dS$  la densità media sulla sezione.

Sia la densità che la velocità sono grandezze non costanti in  $y$  che possono essere scomposte nella somma di due contributi dei quali uno rappresenta il valore medio e l'altro ne rappresenta lo scostamento; in quest'ottica quindi il prodotto  $\rho \mathbf{u}$  diventa:

$$\rho \mathbf{u} = (\bar{\rho} + \delta\rho) (\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}) = \bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} + \delta\rho\delta\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}\delta\rho + \bar{\rho}\delta\mathbf{u}.$$

Se ora si suppone che gli scostamenti rispetto alla media siano notevolmente più piccoli della media stessa si può porre:

$$\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}$$

da cui ne consegue per la conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} S dx = - \int_S \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS$$

oppure, notando che  $\bar{u}$  è la componente lungo l'asse del condotto del vettore  $\bar{\mathbf{u}}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} S dx = - [(\bar{\rho} \cdot \bar{u} S)_2 - (\bar{\rho} \cdot \bar{u} S)_1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} S dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \cdot \bar{u} S) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \cdot \bar{u} S) \right] dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \cdot \bar{u} S) = 0.$$

Introducendo la derivata materiale  $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = \partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x$  (indicata con  $\mathcal{D}$  per distinguerla da quella con la velocità  $\mathbf{u}$ ) l'equazione di conservazione della massa si può scrivere come:

$$\frac{\mathcal{D}\bar{\rho}}{\mathcal{D}t} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{u}}{S} \frac{dS}{dx} = 0.$$

Procediamo ora in modo analogo per il bilancio della quantità di moto in forma integrale:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_{s_1}^{s_2} (bp \sin \alpha) ds$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_{x_1}^{x_2} (bp \sin \alpha) \frac{dx}{\cos \alpha}$$

in cui il termine a secondo membro è la reazione vincolare (di pressione) data dalla superficie laterale del condotto,  $b$  è la sua profondità nella direzione ortogonale al foglio. Notando inoltre che  $\alpha$  è piccolo si ha  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha = \alpha = \frac{dh}{dx}$  e considerando che  $S = 2hb$  risulta  $\frac{dh}{dx} = \frac{1}{2b} \frac{dS}{dx}$  da cui

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_{x_1}^{x_2} 2bp \left( -\frac{1}{2b} \frac{dS}{dx} \right) dx$$

ossia

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S \bar{u}) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S \bar{u}^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (p S) dx - \int_{x_1}^{x_2} \left( p \frac{\partial S}{\partial x} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S \bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} S) - \bar{p} \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} S \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{\rho} \cdot \bar{u}^2 + \bar{p}) S] - \bar{p} \frac{dS}{dx} = 0$$

che, tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa scritta come  $S \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \cdot \bar{u} S) = 0$ , diventa

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$$

In modo del tutto analogo si può trattare l'equazione dell'energia che diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) S \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{\rho} S \bar{u} \left( \bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right] = 0 \quad (12.4)$$

e, tenendo conto dell'equazione della conservazione della massa e quella della quantità di moto,

$$\bar{\rho} \frac{\mathcal{D} \bar{e}}{\mathcal{D} t} + \bar{p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{u} \cdot \bar{p}}{S} \frac{dS}{dx} = 0$$

Infine, calcolando il termine  $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$  dall'equazione della conservazione della massa scritta in forma di derivata materiale dall'equazione dell'energia si ottiene :

$$\frac{\mathcal{D} \bar{e}}{\mathcal{D} t} + \bar{p} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{D} \bar{s}}{\mathcal{D} t} = 0$$

Quest'ultima equazione indica che il flusso è isentropico cioè che l'entropia di ogni particella non cambia lungo la sua traiettoria.

Per alleggerire la notazione, da ora in poi ometteremo il simbolo  $\bar{\cdot}$  per denotare le quantità mediate; se facciamo l'ulteriore ipotesi che il flusso sia stazionario le equazioni di conservazione si semplificano in

$$\frac{d}{dx}(\rho Su) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho Su = \text{cost} \quad (12.5)$$

$$\frac{d}{dx}[(\rho u^2 + p)S] - p \frac{dS}{dx} = 0 \quad (12.6)$$

Se moltiplichiamo l'equazione (12.5) per  $u$  e la sottraiamo alla (12.6)

$$\rho Su \frac{du}{dx} + S \frac{dp}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (12.7)$$

quindi l'equazione della quantità di moto in forma differenziale si scrive:

$$u du + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (12.8)$$

Una forma utile dell'equazione di conservazione dell'energia si ottiene dalla (12.4) nell'ipotesi di stazionarietà dopo avere sottratto la (12.5) moltiplicata per  $\mathcal{E}$  e la (12.6) moltiplicata per  $u$

$$\frac{d}{dx} \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (12.9)$$

che sancisce la natura *omoenergetica* del flusso, ossia con energia costante ovunque e non solo lungo una linea di corrente.

Le relazioni appena trovate possono essere sfruttate in modo semplice per trovare l'andamento di grandezze fluidodinamiche e termodinamiche all'interno del condotto al variare della sua sezione.

Per flusso isentropico si ha  $p\rho^{-\gamma} = C$  e differenziando entrambi i membri si ha

$$\frac{dp}{\rho^\gamma} + p(-\gamma)\rho^{-\gamma-1}d\rho = 0 \quad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad dp = \frac{\gamma p}{\rho} d\rho$$

e, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti  $p/\rho = RT$  e la definizione di velocità del suono  $a^2 = \gamma RT$ ,

$$dp = \gamma RT d\rho \quad dp = a^2 d\rho \quad (12.10)$$

L'equazione di conservazione della massa è  $\rho u S = C$  e dalla differenziazione logaritmica si ottiene

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (12.11)$$

Mettendo a sistema la relazione (12.8) con la seconda delle (12.10) ricava una relazione differenziale tra la densità del fluido, la velocità del flusso ed il numero di Mach

$$\begin{cases} dp = a^2 d\rho \\ u du + \frac{dp}{\rho} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u}{a^2} du \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u}$$

Sostituendo l'ultima delle precedenti nella (12.11) si ottiene la relazione tra variazione di velocità e variazione di sezione il cui comportamento dipende dal numero di Mach. dal sistema dell'equazione precedentemente trovata con l'equazione di conservazione della massa ricaviamo l'equazione differenziale tra la velocità del flusso e la sezione sulla quale viene la velocità è calcolata ed il numero di Mach

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0 \end{cases} \Rightarrow (1 - M^2) \frac{du}{u} = -\frac{dS}{S}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dS}{S} \quad (12.12)$$

il legame tra densità e sezione sulla quale è calcolata e il numero di Mach si trova dal seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \\ \frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dS}{S} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

Differenziando l'equazione dell'isentropica abbiamo visto che  $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$  e dal seguente sistema troviamo la relazione tra pressione e sezione e numero di Mach.

$$\begin{cases} \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S} \end{cases} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\gamma \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

differenziando l'equazione di stato dei gas perfetti risulta che  $\frac{dp}{p} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T} = 0$  che accoppiata all'equazione differenziale dell'isentropica,  $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$ , fornisce la seguente relazione:

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u}$$

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

Ricapitolando le equazioni ricavate sono:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{du}{u} = (\gamma - 1) \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} = \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S} \quad (12.13)$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{du}{u} = \gamma \frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$$

Analizziamo la variazione delle grandezze termodinamiche al variare della sezione di un condotto attraversato da due tipi di flusso uno subsonico e l'altro supersonico.

$$M < 1 \Rightarrow \begin{cases} dS > 0 \rightarrow du < 0, dT > 0, d\rho > 0, dp > 0 \\ dS < 0 \rightarrow du > 0, dT < 0, d\rho < 0, dp < 0 \end{cases}$$

$$M > 1 \Rightarrow \begin{cases} dS > 0 \rightarrow du > 0, dT < 0, d\rho < 0, dp < 0 \\ dS < 0 \rightarrow du < 0, dT > 0, d\rho > 0, dp > 0 \end{cases}$$

Il fenomeno più interessante da notare è che in base all'equazione (12.12) la velocità di un flusso reagisce in modo opposto alle variazioni di sezione e seconda che il numero di Mach sia maggiore o minore di 1. In particolare se il flusso è subsonico ( $M < 1$ ) per una  $dS$  negativa si avrà una  $du$  positiva e viceversa, ossia il flusso accelera se la sezione del condotto diminuisce mentre decelera se la sezione si allarga. Al contrario, se il flusso è supersonico ( $M > 1$ ) variazioni di sezione e di velocità avranno segno concorde e quindi il flusso accelera se la sezione cresce in  $x$  e decelera se la sezione si riduce. Il motivo di tale comportamento è dovuto al fatto che velocità e densità si comportano in modo opposto rispetto alle variazioni di sezione (confronta le equazioni 12.12 e 12.13) e mentre per  $M < 1$  le variazioni di velocità superano quelle di densità nei flussi supersonici accade il fenomeno opposto.

Un'altra importante osservazione è che la transizione di un flusso da subsonico a supersonico o viceversa, in un condotto a sezione variabile può avvenire solo in corrispondenza di una gola dove  $dS = 0$ . Se infatti ciò non accadesse, in corrispondenza di  $M = 1$  si avrebbero variazioni infinite di tutte le quantità indicando l'impossibilità di far avvenire il fenomeno.

L'ultima questione che si vuole brevemente menzionare è la variazione di alcune grandezze lungo l'asse di un condotto a sezione variabile nel caso in cui valgano le equazioni (12.5), (12.7) e (12.9).

Ricordando che l'entalpia per un gas perfetto è  $h = e + p/\rho = c_p T$  con il calore specifico a pressione costante pari a  $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$  riscriviamo l'equazione di conservazione dell'energia tra due generiche sezioni del condotto ottenendo:

$$\left( c_p T + \frac{u^2}{2} \right)_2 = \left( c_p T + \frac{u^2}{2} \right)_1, \quad (12.14)$$

e, se in particolare si ha una sezione in cui la velocità è nulla si ottiene

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_0, \quad (12.15)$$

dove  $T_0$  è detta temperatura totale e misura l'energia totale del sistema. Bisogna notare che la relazione sopra costituisce anche una definizione della temperatura totale che può essere calcolata indipendentemente dal fatto che nel condotto si verifichi o meno la condizione  $u = 0$  in qualche sezione.

Con qualche trasformazione la relazione 12.15 assume la forma

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{u_1^2}{2c_p T_1} \\ \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1^2}{R\gamma T_1} \\ \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1^2}{a_1^2} \\ \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \end{aligned}$$

se il flusso è isentropico valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p_1} &= \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{\rho_0}{\rho_1} &= \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \end{aligned}$$

con le quali è possibile definire la pressione e densità totali del flusso.

In forma equivalente, utilizzando la definizione  $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$  ed introducendo la velocità del suono si può porre l'equazione di conservazione dell'energia nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \\ \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \\ a_1^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2} u_1^2 &= a_2^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2} u_2^2 \end{aligned}$$

e nuovamente è possibile definire la velocità del suono totale  $a_0$  ponendo in qualche sezione  $u = 0$ .

