

Capitolo 4

Dinamica dei fluidi

Dopo aver definito le proprietà fisiche, la statica e la cinematica dei fluidi, affronteremo ora il problema del moto dei fluidi come effetto di forze applicate, sia esternamente che generate all'interno del fluido stesso. Questo argomento costituisce la dinamica dei fluidi e comprende la derivazione delle equazioni di bilancio e conservazione (rispettivamente quantità di moto, massa ed energia) e la loro applicazione a volumi di fluido finiti (formulazione integrale) o infinitesimi (differenziale).

4.1 teorema del trasporto di Reynolds

Nel capitolo sulla cinematica dei fluidi abbiamo visto come nella descrizione di un fenomeno sia possibile scegliere due punti di vista, uno legato alle singole particelle fluide (descrizione lagrangiana) e l'altro a posizioni fisse nello spazio (descrizione euleriana); abbiamo anche visto come la derivata materiale permetta di valutare l'accelerazione di una particella fluida che ad un certo istante t passa in un punto fisso nello spazio. Se invece di considerare una singola particella fluida si prende un sistema fluido (ossia un insieme di particelle) ci si pone un problema identico al precedente ma per un sistema finito piuttosto che infinitesimo: il teorema del trasporto di Reynolds permette di legare le quantità calcolate per un sistema composto sempre dalle stesse particelle a quelle per un volume fisso nello spazio.

Prima di illustrare tale teorema daremo delle definizioni che ci permetteranno, in seguito, di procedere più speditamente.

volume materiale e volume di controllo

Immaginiamo in un istante t_1 di delimitare un volume $V(t_1)$ contenente delle particelle fluide che identifichiamo in qualche modo. Se fossimo in grado di seguire il moto di tutte le particelle fluide, ad un tempo $t_2 > t_1$ avremo che il volume avrà cambiato posizione e forma ($V(t_2)$) e lo stesso accadrà per un tempo successivo $t_3 > t_2$ (figura 4.1). Un volume così definito prende il nome di volume materiale (o sistema materiale o sistema fluido) ed ha la caratteristica di essere composto per qualunque tempo dalle particelle fluide che lo componevano inizialmente. Se al contrario si delimita un volume (fisso o mobile) V_0 questo

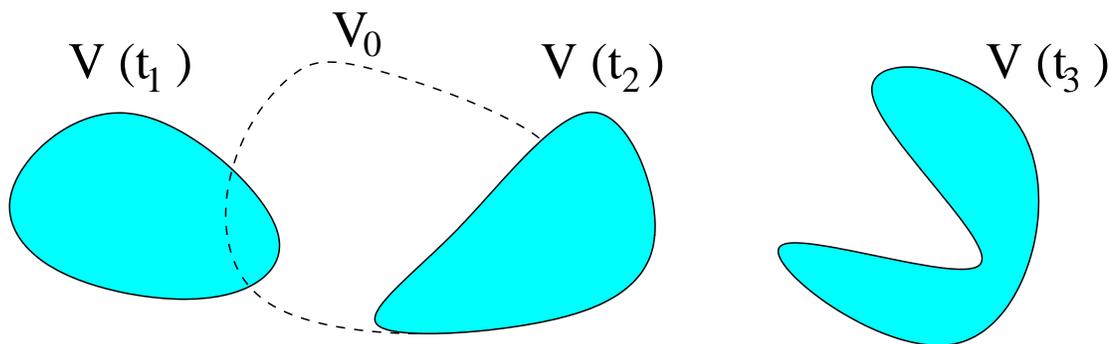


Figura 4.1: Evoluzione temporale di un volume materiale (disegnato in rosso) e posizione fissa di un volume di controllo.

potrà contenere o meno alcune delle particelle fluide del volume materiale, ma comunque nel tempo queste varieranno e si può verificare (in figura 4.1 per $t = t_3$) che il volume fisso non contenga alcuna particella del volume materiale. Il volume V_0 è chiamato volume di controllo e può essere scelto in modo del tutto arbitrario anche se, come si vedrà nelle applicazioni, una sua definizione in modo oculato semplifica notevolmente la soluzione dei problemi pratici.

grandezze intensive ed estensive

Definiamo grandezza estensiva B (scalare, vettoriale o tensoriale) una quantità il cui valore dipende dall'estensione del volume V considerato mentre una grandezza intensiva b è una quantità indipendente dal valore di V .

Per esempio se si misura la temperatura di 1, 2 o 100 metri cubi d'aria questa sarà sempre la stessa, quindi la temperatura è una grandezza intensiva. Al contrario se si misurasse la massa dei sistemi precedenti questa evidentemente crescerà linearmente con il volume del sistema stesso, risultando quindi la massa una grandezza estensiva.

In particolare, detta b una grandezza intensiva si può scrivere

$$B = \int_V \rho b dV, \quad (4.1)$$

essendo ρ la densità del fluido nel volume V , e si dirà che B è la grandezza estensiva coniugata a quella intensiva b . Per esempio la massa è la grandezza estensiva coniugata all'unità, la quantità di moto alla velocità. etc.

teorema del trasporto di Reynolds

Possiamo ora calcolare la variazione nel tempo di una grandezza estensiva B definita in (4.1). Consideriamo allo scopo un volume di controllo V_0 fisso che al tempo t viene preso coincidente con il volume materiale $V(t)$; dopo un tempo Δt il volume materiale si sarà mosso come disegnato nella figura 4.2.

$$V_0 = V(t) = V + V_1 \quad V(t + \Delta t) = V + V_2$$

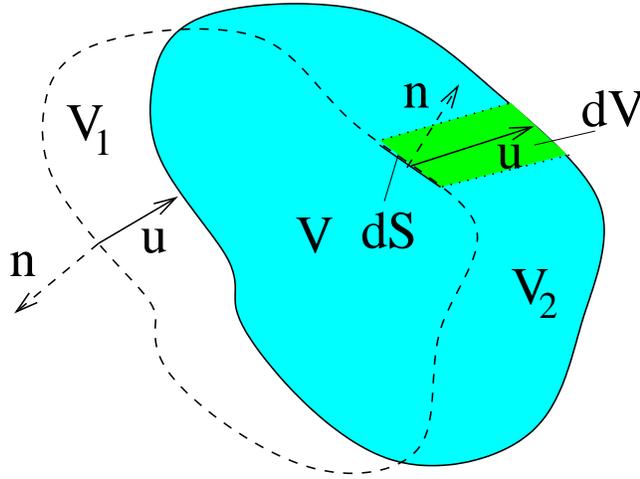


Figura 4.2: Moto relativo dopo un tempo Δt tra un volume di controllo fisso ed un volume materiale inizialmente coincidenti.

Per la variazione nel tempo di B possiamo scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho b dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} \rho b dV - \int_{V(t)} \rho b dV}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

In base alla figura 4.2 possiamo scrivere $V(t) = V + V_1$ e $V(t + \Delta t) = V + V_2$ da cui

$$\frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV + \int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t dV - \int_{V_1} (\rho b)_t dV}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

in cui tutte le funzioni integrande sono calcolate al tempo relativo al volume di appartenenza. Notiamo ora che il primo e terzo integrale dell'equazione (4.3) sono valutati sullo stesso dominio V ma gli integrandi sono calcolati in tempi differenti per cui si ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t dV}{\Delta t} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV, \quad (4.4)$$

avendo notato che per $t \rightarrow 0$, $V(t) \rightarrow V_0$.

Per gli altri due integrali osserviamo dalla figura 4.2 che, detto dS un elemento di superficie del volume V_0 , \mathbf{n} la sua normale ed \mathbf{u} la velocità di traslazione risulterà $dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS$ per il volume V_2 e $dV = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS$ per il volume V_1 . Il secondo e quarto integrale della (4.3) diventeranno allora

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_{V_1} (\rho b)_t dV}{\Delta t} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{S_2} (\rho b)_{t+\Delta t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_1} (\rho b)_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \right) = \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove si è indicata con S_i la parte di superficie di V_0 in comune con il volume V_i e si è utilizzato il fatto che per $t \rightarrow 0$, $S_1 + S_2 \rightarrow S_0$.

Se ora mettiamo insieme i risultati delle (4.4) e (4.5) possiamo scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho b \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.6)$$

con la quale abbiamo messo in relazione la grandezza B calcolata su un volume materiale con quantità calcolate su un volume di controllo e quindi di più facile valutazione.

La relazione (4.6) ci dice che le variazioni di B hanno due cause, una interna al sistema stesso e quindi dovuta a variazioni di b all'interno del volume V . L'altra possibilità è causata da scambi del sistema attraverso la sua superficie, ossia il flusso di b attraverso S .

Se la funzione $\rho b \mathbf{u}$ è continua e differenziabile allora il secondo integrale della (4.6) si può trasformare utilizzando il teorema della divergenza e scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho b \mathbf{u}) dV. \quad (4.7)$$

Un'ultima precisazione è necessaria circa il significato fisico di \mathbf{u} a seconda che V_0 sia fisso o in movimento. Nel primo caso, risultando nulla la velocità di S_0 (e di dS) non nascono dubbi e \mathbf{u} è la velocità con cui si muove il fluido nel punto considerato. Se, al contrario, V_0 è in movimento, dovendo valutare il flusso di ρb attraverso dS non saremo più interessati alla velocità assoluta del fluido ma piuttosto alla velocità *relativa* tra il fluido e la superficie S_0 . Indicata allora con \mathbf{v} la velocità del fluido e con \mathbf{u}_r quella di S_0 risulterà $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_r$ e quindi

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho b dV + \int_{S_0} \rho b (\mathbf{v} - \mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.8)$$

4.2 equazione di conservazione della massa

4.2.1 forma integrale

Avremo ora modo di apprezzare la potenza della relazione (4.6) (e le sue forme derivate) nella determinazione delle equazioni di bilancio e di conservazione. Iniziamo dall'equazione di conservazione della massa, prendendo un sistema materiale e avendo, dalla stessa definizione, che la sua massa M non varia nel tempo, ponendo quindi $B = M$ ne conseguirà dalla (4.1) che $b = 1$ da cui la conservazione della massa si esprimerà

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (4.9)$$

oppure in base al teorema del trasporto di Reynolds

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.10)$$

L'espressione (4.10) esprime la conservazione della massa in forma integrale e risulta particolarmente utile nelle applicazioni quando il fenomeno in esame è stazionario; in questo caso infatti il primo termine risulta identicamente nullo mentre il secondo fornisce semplicemente il flusso di massa attraverso la superficie del volume di controllo:

$$\int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.11)$$

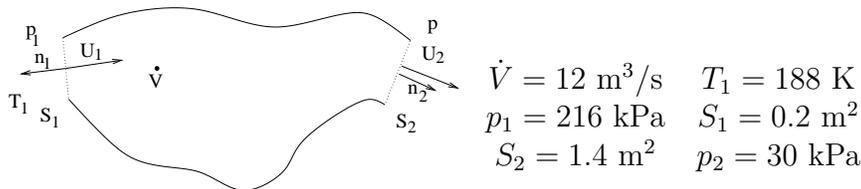
L'equazione (4.11) è particolarmente semplice da applicare nel caso in cui il volume di controllo selezionato abbia un numero finito di porzioni (N) attraverso le quali ci sia flusso di massa e su queste porzioni le caratteristiche del flusso (velocità e densità) possano essere considerate costanti. In tal caso, infatti, l'espressione (4.11) diviene

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i S_i = 0, \quad (4.12)$$

che permette, tramite semplici relazioni algebriche, di determinare un flusso incognito noti gli altri.

ESEMPIO

Una portata d'aria \dot{V} entra in un sistema alla pressione p_1 ed alla temperatura T_1 ed esce alla stessa temperatura ma alla pressione p_2 . Sapendo che le sezioni di ingresso ed uscita misurano S_1 ed S_2 calcolare le velocità di ingresso ed uscita del flusso.



Soluzione

Dall'equazione di stato applicata alla sezione di ingresso si ricava $\rho_1 = p_1/(RT_1) = 4.003 \text{ Kg/m}^3$ per cui risulta $\dot{m} = \rho_1 \dot{V} = 48.039 \text{ Kg/s}$ ed $U_1 = \dot{V}/S_1 = 240.19 \text{ m/s}$. Dalla conservazione della massa deve risultare $-\rho_1 U_1 S_1 + \rho_2 U_2 S_2 = 0$ (in quanto $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -U_1$ mentre $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = U_2$) da cui si ricava $U_2 = \rho_1 U_1 S_1 / (\rho_2 S_2) = 61.714 \text{ m/s}$.

4.2.2 forma differenziale

Se il volume di controllo è fisso e sussistono le condizioni per l'applicazione del teorema della divergenza la (4.10) si può scrivere come

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0; \quad (4.13)$$

dobbiamo a questo punto notare che la scelta del volume di controllo V_0 è assolutamente arbitraria mentre la relazione (4.13) impone l'uguaglianza per qualunque scelta di V_0 . L'unica possibilità affinché ciò si verifichi è che sia identicamente nulla la funzione integranda, ossia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.14)$$

che è l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale. L'equazione (4.14) si può anche scrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.15)$$

da cui emerge che nel caso particolare di flusso incomprimibile $D\rho/Dt = 0$ la (4.15) si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.16)$$

relazione già trovata per altra via quando si è considerata l'analisi del moto nell'intorno di un punto ¹.

4.3 equazione di bilancio della quantità di moto

4.3.1 forma integrale

Per derivare l'equazione di bilancio della quantità di moto \mathbf{Q} , procediamo in modo analogo alla sezione precedente. Iniziamo con il definire $\mathbf{Q} = \int_{V_0} \rho \mathbf{u} dV$ e, utilizzando il secondo principio della dinamica possiamo scrivere:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (4.17)$$

dove con \mathbf{F} sono state indicate tutte le forze che agiscono sul volume materiale in esame. Il primo membro della (4.17) si può esplicitare tramite il teorema del trasporto di Reynolds, mentre per esprimere \mathbf{F} bisogna distinguere i vari tipi di forze che agiscono sul sistema. Senza elencare nel dettaglio tutte le possibili forze agenti sul volume materiale di fluido, possiamo distinguere tra le forze di contatto \mathbf{F}_S , quelle cioè che agiscono solo attraverso azioni di contatto sulla superficie S del volume materiale, e le forze di volume \mathbf{F}_V che agiscono anche sulle particelle fluide interne al volume materiale. Tra le prime possiamo annoverare le forze di pressione e le forze viscosive, mentre la forza peso, la forza centrifuga e quella di Coriolis fanno parte della seconda categoria.

¹Se la relazione (4.16) viene risostituita nella (4.15) si ottiene che la derivata materiale della densità è nulla,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \rho = \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Ricordando che la derivata materiale indica la variazione misurata da un osservatore solidale con la particella fluida, è evidente che la densità di una particella in un flusso incomprimibile non può variare e quindi la sua derivata materiale deve essere nulla.

Tra le forze di contatto possiamo ulteriormente distinguere l'azione della pressione da quella delle altre forze (come l'attrito) e porre

$$\mathbf{F}_S = - \int_{S_0} p \mathbf{n} dS + \mathbf{F}'_S, \quad (4.18)$$

per cui dalla definizione di \mathbf{Q} ed il teorema del trasporto di Reynolds si ottiene

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} p \mathbf{n} dS = \mathbf{F}'_S + \mathbf{F}_V. \quad (4.19)$$

Questa espressione trova largo uso nel caso di flussi stazionari e la sua applicazione e relativi esempi verranno trattati in §4.3.3.

4.3.2 forma differenziale

Senza perdita di generalità poniamo

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_V = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV, \quad (4.20)$$

in cui \mathbf{f} è la densità delle forze di volume (nel caso della sola forza peso \mathbf{f} risulterebbe essere l'accelerazione di gravità) mentre \mathbf{T} è il tensore degli sforzi di superficie. Anticipando ora un risultato che sarà dimostrato successivamente, poniamo $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ in cui p è la pressione, \mathbf{I} è il tensore identità e $\boldsymbol{\tau}$ è la parte deviatorica degli sforzi viscosi. In questa decomposizione il tensore degli sforzi di superficie \mathbf{T} viene decomposto in una parte isotropa dovuta alla pressione ed una parte deviatorica dovuta alla viscosità.

Mettendo insieme la definizione di \mathbf{Q} , le espressioni (4.17) e (4.20) ed il teorema del trasporto di Reynolds si ottiene

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_0} p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV, \quad (4.21)$$

che esprime il bilancio di quantità di moto in forma integrale.

Se è possibile applicare il teorema della divergenza questa relazione può essere trasformata in

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right) dV = \int_{V_0} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}) dV, \quad (4.22)$$

dove si può osservare di nuovo che, dovendo sussistere l'identità dei due membri per qualunque scelta del volume di controllo V_0 , devono necessariamente risultare uguali le funzioni integrande da cui

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}, \quad (4.23)$$

che è l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma differenziale.

Come semplice esercizio si può dimostrare che se all'equazione (4.23) viene sottratta l'equazione (4.14) moltiplicata per \mathbf{u} si ottiene

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}, \quad (4.24)$$

che è un'altra forma differenziale dell'equazione di bilancio della quantità di moto.

4.3.3 applicazione dell'equazione di bilancio della quantità di moto

Le relazioni (4.17)–(4.21) possono essere ridotte a forme più maneggevoli per applicazioni pratiche sotto alcune ipotesi semplificative. L'assunzione più comune è quella di flusso stazionario in cui tutte le variazioni temporali delle grandezze sono nulle. Bisogna osservare che nella pratica un flusso non è mai strettamente stazionario ossia $\partial \bullet / \partial t \equiv 0$ ma lo è quasi sempre in senso statistico. Si verifica infatti che le fluttuazioni delle grandezze rispetto ad i valori medi siano generalmente contenute e ciò consente di ipotizzare che il termine contenente la derivata temporale della quantità di moto sia trascurabile rispetto agli altri.

Notiamo a questo punto che, detta S_0 la superficie del volume di controllo avremo in certo numero di porzioni S_i , $i = 1, 2, \dots, N$ attraverso le quali c'è flusso di massa e la rimanente superficie $S = S_0 - \sum_{i=1}^N S_i$ che o è impermeabile o soddisfa la condizione di aderenza $\mathbf{u} = 0$ e quindi avrà un flusso di massa nullo. In tal caso ipotizzando che le grandezze siano costanti su ognuno dei tratti di S_0 risulterà:

$$\int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^N \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} S_i. \quad (4.25)$$

Distinguendo in modo analogo i contributi del termine di pressione scriviamo

$$\int_{S_0} p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^N p \mathbf{n} S_i + \mathbf{F}_{ps} \quad (4.26)$$

dove con \mathbf{F}_{ps} si è indicata la risultante di tutte le forze di pressione che la superficie di controllo senza flusso di massa esercita sul fluido (per esempio le reazioni vincolari).

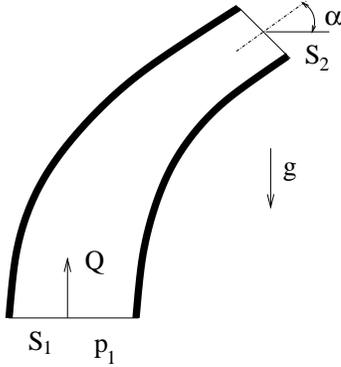
Con queste assunzioni l'equazione (4.21) diventa

$$\sum_{i=1}^N (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{n}) S_i = \mathbf{F} \quad (4.27)$$

avendo indicato con \mathbf{F} la risultante di tutte le forze di volume, quelle viscosive e quelle di pressione esercitate dalle porzioni di S_0 attraverso cui non transita massa.

ESEMPIO

Dell'acqua fluisce nell'ugello in figura dalla sezione 1 alla 2 dove scarica in atmosfera. Determinare modulo e verso delle forze orizzontali e verticali necessarie a mantenere l'ugello fermo. Il peso dell'ugello vuoto è W ed il volume d'acqua contenuta è V . L'ugello smaltisce una portata Q .



$$\begin{aligned} \alpha &= 40^\circ & Q &= 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \\ W &= 13 \text{ Kg} & V &= 0.015 \text{ m}^3 \\ S_1 &= 0.025 \text{ m}^2 & S_2 &= 0.008 \text{ m}^2 \\ p_1 &= 1.5 \text{ bar} & & \text{(pressione assoluta)} \end{aligned}$$

Soluzione

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto, preso il fluido all'interno del condotto come volume di controllo e dette 1 e 2, rispettivamente le sezioni di ingresso ed uscita si ottiene

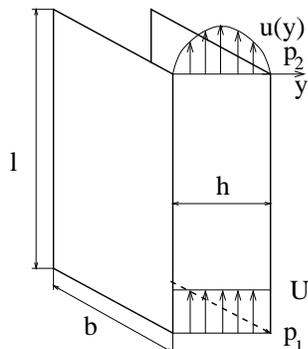
$$F_y = -\rho U_1^2 S_1 - (p_1 - p_0) S_1 + \rho U_2^2 \sin \alpha S_2 + \rho g V = -715.61 \text{ N}$$

$$F_x = \rho U_2^2 \cos \alpha S_2 = 957.55 \text{ N}$$

avendo preso l'asse x orizzontale e l'asse y verticale ed orientato verso l'alto. I valori per $U_1 = 4 \text{ m/s}$ ed $U_2 = 12.5 \text{ m/s}$ sono stati ricavati dalla portata Q e la superficie S delle sezioni. Infine, poiché l'ugello vuoto pesa già $W = 127.53 \text{ N}$ la forza aggiuntiva verso il basso sarà $F_y = -588.273 \text{ N}$.

ESEMPIO

In un canale piano, come in figura, è presente un flusso stazionario che entra uniformemente con velocità U ed esce con profilo parabolico. Sono note le pressioni p_1 e p_2 uniformi sulle sezioni iniziali e finali ed il fluido è acqua. Essendo il canale posto verticalmente, calcolare la risultante delle forze viscose per unità di profondità b .



$$\begin{aligned} h &= 0.2 \text{ m} & l = b &= 1 \text{ m} \\ U &= 0.5 \text{ m/s} \\ p_1 &= 1.15 \cdot 10^5 \text{ Pa} & p_2 &= 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Soluzione

Si utilizza l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma integrale per flussi stazionari. Proiettando l'equazione lungo la direzione verticale positiva si ottiene:

$$-\rho U^2 b h + \rho b \int_0^h u^2(y) dy + b h (p_2 - p_1) + \rho g b h l = F_x.$$

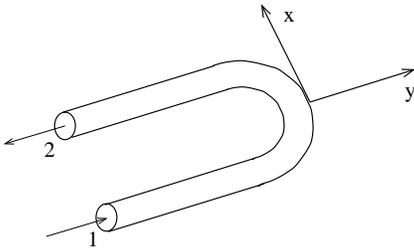
In questa relazione c'è ancora come incognita $u(y)$ che deve avere una forma parabolica e deve preservare la massa:

$$\int_0^h u(y) dy = U h, \quad \Rightarrow \quad u(y) = 6U \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right],$$

da cui $\int_0^h u^2(y) dy = 6U^2 h/5$ e di conseguenza $F_x = -1030 \text{ N}$.

ESEMPIO

Un flusso stazionario d'acqua entra nella sezione 1 con portata Q ed esce dopo aver compiuto una curva di 180° dalla sezione 2. La pressione (media) in 1 è P_1 mentre quella in 2 è p_2 ($p_2 < p_1$) a causa delle perdite. Sapendo che il tubo ha sezione costante S e che è orizzontale, calcolare le forze F_x ed F_y necessarie a mantenere fermo il tubo.



$$S = 7.854 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad Q = 7.854 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p_1 = 6 \text{ atm} \quad p_2 = 4.5 \text{ atm}$$

Soluzione

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto in forma integrale si ha:

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho u_1^2 S_1 - \rho u_2^2 S_2 - p_1 S_1 - p_2 S_2 = -9924 \text{ N},$$

essendo $u_1 = u_2 = Q/S = 10 \text{ m/s}$.

4.4 equazione di conservazione dell'energia

4.4.1 forma integrale

Per la formulazione dell'equazione di conservazione dell'energia per un fluido, partiamo dal primo principio della termodinamica che sancisce, di fatto, l'equivalenza tra le varie forme di energia. Indicando con E il contenuto totale di energia del volume materiale, e con \dot{L} e \dot{Q} rispettivamente il lavoro fatto sul sistema ed il calore introdotto nel sistema, entrambi per unità di tempo, scriviamo

$$\frac{dE}{dt} = \dot{L} + \dot{Q}. \quad (4.28)$$

Se ora indichiamo con \mathcal{E} l'energia totale specifica, ossia la grandezza intensiva coniugata ad E possiamo scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{E} dV = \dot{L} + \dot{Q} \quad (4.29)$$

e quindi usando il teorema del trasporto di Reynolds

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathcal{E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{nd}S = \dot{L} + \dot{Q}, \quad (4.30)$$

che è l'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale. L'espressione (4.30) è di fondamentale importanza per le applicazioni anche se necessita di maggiori dettagli nelle definizioni di \dot{L} e \dot{Q} per poter essere utilizzata. Tali dettagli con esempi verranno forniti in §4.4.3

4.4.2 forma differenziale

In modo analogo alle forze precedentemente introdotte, dividiamo anche \dot{L} e \dot{Q} nei contributi di volume e superficie e per il lavoro fatto dalle forze di volume e superficie abbiamo

$$\dot{L}_S = \int_{S_0} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS \quad \text{e} \quad \dot{L}_V = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV. \quad (4.31)$$

Per il calore, poniamo \dot{q} il calore per unità di volume generato internamente al sistema (per esempio per processi chimici o assorbimento di radiazione) e \mathbf{K} il flusso di calore per unità di superficie che entra nel sistema attraverso la superficie esterna. Risultando in base al postulato di Fourier $\mathbf{K} = -\lambda \nabla T$ (essendo λ la conducibilità termica del materiale e ∇T il gradiente di temperatura) possiamo porre

$$\dot{Q}_S = - \int_{S_0} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{e} \quad \dot{Q}_V = \int_{V_0} \rho \dot{q} dV. \quad (4.32)$$

Vogliamo brevemente commentare i vari segni negativi che compaiono nella definizione di \dot{Q}_S ; quello nella definizione di \mathbf{K} deriva dal fatto che naturalmente il calore va da punti a temperatura maggiore a punti a temperatura minore, ossia si muove in verso opposto rispetto al gradiente di temperatura. Il segno negativo in $\dot{Q}_S = - \int_{S_0} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} dS$ è invece causato dall'orientamento di \mathbf{n} che è positiva se punta esternamente al sistema. Poiché \mathbf{K} è positivo se entrante nel sistema il prodotto $\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}$ risulterebbe negativo, per flussi di calore entranti nel sistema, da cui il segno negativo.

Utilizzando ora le espressioni (4.29) e (4.30) possiamo scrivere

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{E} dV = \dot{L}_S + \dot{L}_V + \dot{Q}_S + \dot{Q}_V, \quad (4.33)$$

e quindi usando le definizioni (4.31) e (4.32) ed il teorema del trasporto di Reynolds

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho \mathcal{E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS &= - \int_{S_0} p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{S_0} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{V_0} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \\ &+ \int_{S_0} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_0} \rho \dot{q} dV, \end{aligned} \quad (4.34)$$

che è l'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale. Usando nelle solite ipotesi il teorema della divergenza si possono ridurre tutti i termini ad un integrale di volume ed ipotizzando un volume di controllo fisso si ha

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \mathbf{u}) \right) dV = \quad (4.35)$$

$$= \int_{V_0} (-\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q}) dV.$$

Anche in questo caso noteremo che data l'assoluta arbitrarietà del volume di controllo V_0 devono risultare uguali le funzioni integrande a primo e secondo membro della (4.35) da cui ne consegue l'equazione di conservazione dell'energia in forma differenziale

$$\frac{\partial \rho \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{E} \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q}. \quad (4.36)$$

Analogamente a quanto fatto per il bilancio della quantità di moto notiamo che se all'equazione (4.36) sottraiamo l'equazione (4.14) moltiplicata per \mathcal{E} otteniamo

$$\rho \frac{D\mathcal{E}}{Dt} = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q}, \quad (4.37)$$

che è un'ulteriore forma dell'equazione di conservazione dell'energia in forma differenziale.

4.4.3 applicazione dell'equazione di conservazione dell'energia

Similmente al bilancio della quantità di moto, l'applicazione delle equazioni (4.28)–(4.34) risulta notevolmente semplificata nel caso in cui si possano fare alcune assunzioni che vengono verificate in numerosi casi pratici.

sistemi chiusi

Se il sistema è chiuso, ossia non c'è flusso di massa attraverso la sua superficie, le equazioni (4.28)–(4.29) possono essere messe in una forma particolarmente utile dal punto di vista applicativo. Infatti, se nell'energia totale specifica \mathcal{E} si contempla un contributo cinetico $\mathbf{u}^2/2$, uno potenziale gh ed uno di energia interna e l'equazione (4.29) assume la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gh + e \right) dV = \dot{L} + \dot{Q}. \quad (4.38)$$

Con l'ulteriore ipotesi che il sistema sia caratterizzabile da un unico valore di \mathbf{u} , h ed e (per esempio considerandone i valori mediati sul volume e la quota del baricentro), essendo la massa $m = \int_V \rho dV$ costante, la relazione (4.38) si trasforma in

$$m \left[\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gh + e \right)_{fin} - \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gh + e \right)_{ini} \right] = \Delta L + \Delta Q \quad (4.39)$$

che mette in relazione gli stati iniziali e finali del sistema quando siano note le quantità di lavoro e calore fatti sul sistema durante il lasso di tempo trascorso tra i due stati.

sistemi aperti

Se, invece il sistema è aperto ma il flusso è stazionario (o statisticamente stazionario) il termine contenente la derivata temporale scompare nella (4.34) che possiamo scrivere come:

$$\int_{S_0} \rho \mathcal{E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_0} p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \dot{Q} + \dot{L}_M. \quad (4.40)$$

\dot{Q} indica gli ultimi due termini della (4.34) mentre con \dot{L}_M si è indicato il lavoro meccanico sul sistema (rappresentato dal terzultimo e quartultimo termine della (4.34)) che si è distinto dal lavoro delle pressioni $\int_{S_0} p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS$. È importante notare che quest'ultimo è diverso da zero solo su quelle porzioni della superficie di controllo dove si ha flusso di massa in quanto negli altri casi la velocità o è ortogonale ad \mathbf{n} (contorno impermeabile) o risulta identicamente nulla (parete con condizione di aderenza).

Con le ulteriori ipotesi che il sistema abbia una sola sezione di ingresso (S_{in}) ed una sola di uscita (S_{out}) e che le grandezze possano considerarsi costanti su tali sezioni gli integrali si semplificano in

$$\int_{S_0} \rho \mathcal{E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \mathcal{E} \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}(\mathcal{E}_{out} - \mathcal{E}_{in}), \quad (4.41)$$

$$\int_{S_0} p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS = \int_{S_0} \rho \frac{p}{\rho} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS = \dot{m} \left[\left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} \right],$$

dopo aver osservato che risulta $\dot{m}_{out} \equiv \dot{m}_{in} = \dot{m}$ per la conservazione della massa.

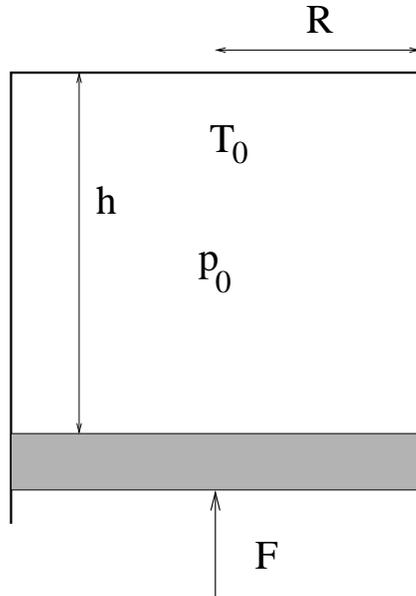
Con la stessa definizione per l'energia totale specifica \mathcal{E} fatta nella sezione precedente l'equazione (4.40) assume la forma

$$\dot{m} \left[\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + gh \right)_{out} - \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + gh \right)_{in} \right] = \dot{Q} + \dot{L}_M. \quad (4.42)$$

I termini $e + p/\rho$ sono per definizione l'entalpia $h = C_p T$ che può talvolta essere nota in ingresso e/o in uscita.

ESEMPIO

Un cilindro circolare di raggio R contiene dell'aria alla temperatura iniziale T_0 ed a pressione atmosferica. Se un pistone, inizialmente ad una distanza h comprime con una forza F il sistema fino all'equilibrio quale sarà la temperatura finale dell'aria nel cilindro? Considerare il fenomeno isentropico.



$$\begin{aligned} R &= 0.2 \text{ m} & T_0 &= 290 \text{ K} \\ h &= 0.5 \text{ m} & F &= 4000 \text{ N} \end{aligned}$$

Soluzione

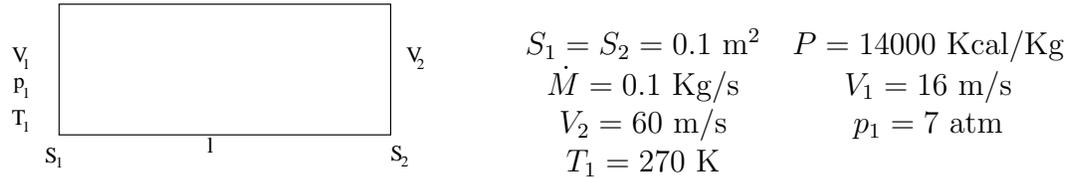
Dall'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale per sistemi chiusi si scrive:

$$m \left[\left(e_1 + \frac{\mathbf{u}_1^2}{2} + gz_1 \right) - \left(e_0 + \frac{\mathbf{u}_0^2}{2} + gz_0 \right) \right] = \Delta L + \Delta Q.$$

Nella relazione appena scritta risulta $gz_0 = gz_1$ ed $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = 0$ e $\Delta Q = 0$. Dall'equazione di stato dei gas perfetti $\rho_0 = p_0/(RT_0) = 1.217 \text{ Kg/m}^3$ per cui la massa del sistema è $m = \rho_0 \pi R^2 h = 0.0764 \text{ Kg}$. Per determinare la quantità di lavoro fatta sul sistema basta osservare che il pistone comprimerà l'aria fino a quando la pressione interna bilancerà la forza esterna (somma della forza applicata e di quella esercitata dalla pressione atmosferica) $p_I = p_0 + F/(\pi R^2) = 133146 \text{ Pa}$. D'altra parte essendo la trasformazione isentropica dovrà risultare $p_0/p_I = (\rho_0/\rho_I)^\gamma$ da cui $\rho_I = 1.479 \text{ Kg/m}^3$ (con $\gamma = 1.4$) e dalla costanza della massa $\rho_0 h = \rho_I (h - \Delta h)$ da cui $\Delta h = 0.088 \text{ m}$. Il lavoro fatto sul sistema sarà quindi $\Delta L = (F + p_0 \pi R^2) \Delta h = 1481.97 \text{ J}$. Infine, essendo $e = C_v T$ dall'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale per sistemi chiusi si ricava $T_1 = T_0 + \Delta L/(C_v m) = 317 \text{ K}$.

ESEMPIO

In una camera di combustione c'è un flusso di massa di combustibile \dot{M} . Calcolare la temperatura di uscita del gas utilizzando i dati in figura ad assumendo che il combustibile bruci totalmente tra le sezioni 1 e 2 con potere calorifico inferiore P . (Trascurare il calore scambiato dalla camera di combustione con l'esterno, trascurare la variazione di portata in massa dovuta all'introduzione di combustibile e considerare il gas come perfetto e con le caratteristiche dell'aria).

**Soluzione**

Dall'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale per sistemi aperti si scrive:

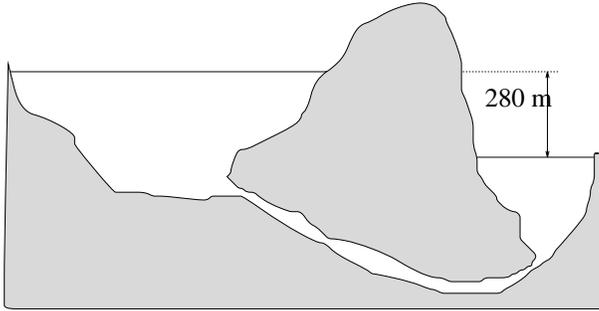
$$\dot{m} \left[\left(e_2 + \frac{\mathbf{u}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 \right) - \left(e_1 + \frac{\mathbf{u}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 \right) \right] = \dot{L}_m + \dot{Q}.$$

Nella relazione appena scritta risulta $gz_2 = gz_1$, $\dot{L}_m = 0$ e $\dot{Q} = P\dot{M}$. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava $\rho_1 = p_1/(RT_1) = 9.153 \text{ Kg/m}^3$ e quindi $\dot{m} = \rho_1 S_1 \mathbf{u}_1 = 14.645 \text{ Kg/s}$. Note queste quantità si può calcolare T_2 dall'equazione di sopra:

$$T_2 = \left[\frac{\dot{M}P}{\dot{m}} + (C_V + R)T_1 + \frac{\mathbf{u}_1^2}{2} - \frac{\mathbf{u}_2^2}{2} \right] / (C_V + R) = 666.64 \text{ K}.$$

ESEMPIO

A causa delle infiltrazioni nel terreno dell'acqua fluisce in modo stazionario da un lago in quota ad uno più in basso di una quota h . Calcolare l'aumento di temperatura dell'acqua causata dal passaggio da un bacino all'altro.

**Soluzione**

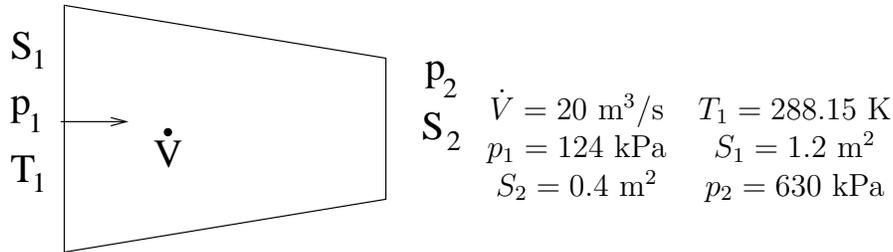
Dall'equazione di conservazione dell'energia applicata tra i peli liberi dei due bacini ($u_1 = u_2 = 0$, $p_1 = p_2 = p_0$), essendo nulli lavoro e calore trasmessi al sistema si ha

$$\dot{m}[(CT + gh)_2 - (CT + gh)_1] = 0, \quad \Delta T = gh/C = 0.656 \text{ K},$$

essendo $C = 4186.8 \text{ J}/(\text{Kg K})$.

ESEMPIO

Una portata d'aria \dot{V} entra in un compressore alla pressione p_1 ed alla temperatura T_1 ed esce alla pressione p_2 . Calcolare la potenza assorbita dal compressore sapendo che le sezioni di ingresso ed uscita misurano S_1 ed S_2 e supponendo l'intero processo isentropico ed il compressore adiabatico.



Soluzione

Dall'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale

$$\dot{m} \left[h_2 - h_1 + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} - gz_2 + gz_1 \right] = \dot{Q} + \dot{L}_m,$$

in cui risulta $z_1 \approx z_2$ e $\dot{Q} = 0$.

Dall'equazione di stato applicata alla sezione di ingresso si ricava $\rho_1 = p_1/(RT_1) = 1.499 \text{ Kg/m}^3$, $\dot{m} = \rho_1 \dot{V} = 29.988 \text{ Kg/s}$ ed $U_1 = \dot{V}/S_1 = 16.666 \text{ m/s}$. L'equazione isentropica tra le sezioni 1 e 2 fornisce $T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 458.468 \text{ K}$ e dall'equazione di stato $\rho_2 = p_2/(RT_2) = 4.788 \text{ Kg/m}^3$. Dalla conservazione della massa $U_2 = \dot{m}/(\rho_2 S_2) = 15.657 \text{ m/s}$ e quindi

$$\dot{L}_m = [C_p(T_2 - T_1) + (U_2^2 - U_1^2)/2] = 5.13 \text{ MW}.$$

4.5 * forma differenziale vs forma integrale

Nelle tre sezioni precedenti abbiamo derivato le equazioni di conservazione della massa e dell'energia e di bilancio della quantità di moto presentando per ogni equazione una forma integrale ed una differenziale. Ci chiediamo ora quale sia la differenza sostanziale tra le due forme di equazione ed in quali applicazioni utilizzare l'una o l'altra forma; cercheremo di chiarire questo punto mediante due semplici esempi.

Nel dispositivo di figura 4.3 vengono a contatto due correnti a velocità costante U_1 ed U_2 e, se il tubo (cilindrico) ha lunghezza sufficiente, con buona approssimazione la corrente in uscita ha velocità uniforme; ci chiediamo quale sia il valore della velocità di uscita U data la geometria assialsimmetrica di figura. Il problema può essere semplicemente risolto considerando l'equazione di conservazione della massa in forma integrale (4.10) che, data

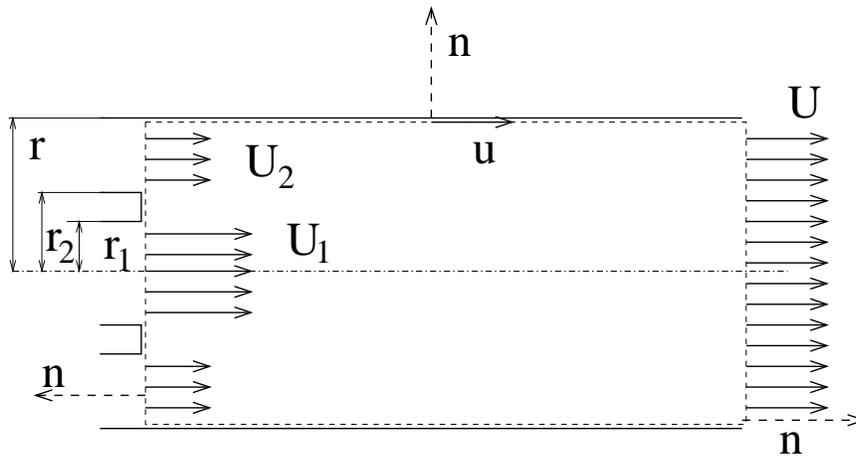


Figura 4.3: Dispositivo per il miscelamento di correnti a diversa velocità.

la stazionarietà del flusso si riduce a

$$\int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.43)$$

Preso allora il volume di controllo indicato in figura con una linea tratteggiata si ha che il mantello cilindrico laterale non dà alcun contributo in quanto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ mentre dai contributi delle superfici di destra e di sinistra risulta

$$\int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = -U_1 S_1 - U_2 S_2 + U S = 0, \implies U = \frac{U_1 S_1 + U_2 S_2}{S}, \quad (4.44)$$

risultando $S_1 = \pi r_1^2$, $S_2 = \pi(r^2 - r_2^2)$ e $S = \pi r^2$.

Come secondo esempio consideriamo un campo bidimensionale di velocità e densità tali che in un intervallo temporale compreso tra $t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$ e nell'intorno del punto $\mathbf{x} = (1, 1/2)$ possano essere descritti dalle espressioni $\rho \mathbf{u} = (\rho u_x, \rho u_y) = (6xt^2 + 4t, 4y^2t + 8xt + 12t^2) \text{Kg}/(\text{m}^2\text{s})$; sapendo che nel punto \mathbf{x} al tempo $t_1 = 1s$ la densità vale $\rho = 25 \text{Kg}/\text{m}^3$ calcolare il valore della densità nello stesso punto al tempo $t_2 = 2s$.

Poiché questa volta si tratta di determinare il valore locale di una quantità bisognerà usare una relazione differenziale. Presa in particolare l'equazione (4.14) possiamo scrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad \text{con} \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 6t^2 + 8yt, \quad (4.45)$$

da cui si ottiene per integrazione tra i tempi t_1 e t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} (6t^2 + 8yt) dt, \implies \rho(t_2) = \rho(t_1) - [2t^3 + 4yt^2]_{t_1}^{t_2} = 1 \text{Kg}/\text{m}^3. \quad (4.46)$$

Dagli esempi discussi possiamo riassumere dicendo che se in un problema siamo interessati a valori o variazioni puntuali di grandezze fluidodinamiche allora bisogna ricorrere alle relazioni differenziali che forniscono una soluzione estremamente dettagliata (funzioni

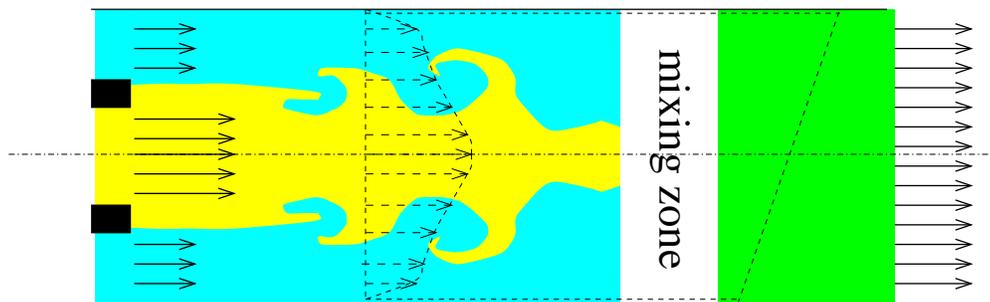


Figura 4.4: Esempio di flusso all'interno del dispositivo di miscelamento. La linea spezzata tratteggiata è un esempio di volume di controllo inappropriato.

dello spazio e del tempo) a costo di una notevole complessità (più spesso impossibilità) di soluzione del problema. Se al contrario, l'obiettivo dell'indagine è una grandezza globale come un profilo medio di velocità o la risultante di forze allora le relazioni in forma integrale sono più utili in quanto permettono sotto opportune condizioni semplificative di determinare le grandezze sul contorno del volume di controllo senza conoscere ciò che accade al suo interno. Per esempio nel precedente dispositivo di miscelazione, la zona subito a valle dell'inflow, dove le due correnti vengono a contatto, sarà una regione caratterizzata da intense fluttuazioni e disomogeneità del flusso (figura 4.4), per analizzare le quali bisogna senz'altro ricorrere a relazioni di tipo differenziale. Se tuttavia si è interessati solo a quello che accade nella sezione di uscita del dispositivo allora si può trascurare la dinamica del flusso al suo interno e considerare il miscelatore come una scatola nera nella quale entra un flusso con certe caratteristiche ed esce con altre caratteristiche.

La figura 4.4 ci dà anche lo spunto per discutere la scelta del volume di controllo per la soluzione di un problema. Da un punto di vista teorico, infatti non esistono volumi di controllo sbagliati visto che le relazioni utilizzate sono valide per qualunque V_0 . La soluzione dell'esempio precedente, tuttavia ha mostrato che l'uso delle relazioni in forma integrale implica la valutazione di integrali di superficie e la scelta della superficie S_0 può risultare determinante per l'effettiva possibilità di valutare i suddetti integrali. Se per esempio invece del primo volume di controllo si fosse scelto quello indicato con la linea tratteggiata in figura 4.4, la valutazione del flusso di massa lungo S_0 avrebbe richiesto dei dati non disponibili dal problema.

Vogliamo infine notare che tutte le equazioni in forma integrale, risultano realmente semplici da risolvere solo quando si riducono alla valutazione di integrali di superficie in quanto in caso contrario, il calcolo degli integrali di volume richiede ugualmente la conoscenza delle quantità all'interno del volume di controllo. Ciò è particolarmente vero per il termine non stazionario $d/dt \int_{V_0} \rho b dV$ per la valutazione del quale occorre conoscere la distribuzione della grandezza intensiva b nel volume V_0 . Nelle applicazioni pratiche, purtroppo, il flusso non è quasi mai stazionario e ciò sembrerebbe diminuire fortemente l'utilità delle relazioni integrali.

Possiamo comunque osservare che se un flusso ha delle fluttuazioni a media nulla, ossia

se le grandezze fluidodinamiche oscillano nel tempo intorno ad un valore medio che rimane costante, allora il flusso si considera *statisticamente* stazionario e si può nuovamente tornare ad usare le relazioni integrali per flussi stazionari.

4.6 * il tensore degli sforzi

Quando sono state derivate le equazioni di bilancio della quantità di moto e di conservazione dell'energia è stato introdotto il tensore delle forze di superficie \mathbf{T} senza specificare come esso sia legato allo stato di moto nell'intorno di un punto; in questa sezione verrà data la forma esplicita di \mathbf{T} e verranno discusse le ipotesi fisiche che determinano la relazione tra sforzi viscosi e campo di velocità. Come primo punto bisogna giustificare per \mathbf{T} la forma di tensore ed a tale scopo consideriamo le due situazioni disegnate in figura 4.5.

Nella prima (figura 4.5a) vogliamo determinare le caratteristiche delle azioni di superficie relativamente ad un contorno piano la cui normale abbia una sola direzione. Possiamo osservare che in questa particolare situazione una forza \mathbf{F} applicata alla superficie S genererà tre sforzi che possiamo definire come $s_x = F_x/S$, $s_y = F_y/S$ ed $s_z = F_z/S$. Proseguiamo l'analisi di \mathbf{s} osservando che è definito come le azioni di superficie che il fluido esternamente al sistema esercita sul sistema stesso, la distinzione tra esterno ed interno è fornita dalla normale il cui verso positivo è quello uscente. Per il terzo principio della dinamica si ha che l'azione di superficie esercitata dal sistema sull'esterno sarà punto per punto uguale ed opposta dovrà quindi risultare $\mathbf{s}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{s}(\mathbf{n})$, ossia \mathbf{s} è una funzione dispari di \mathbf{n} .

Nell'esempio precedente abbiamo visto come si comportano gli sforzi \mathbf{s} su una superficie con normale \mathbf{n} essendo assegnata una forza \mathbf{F} ; ricordiamo ora che il nostro scopo è invece quello di caratterizzare le azioni di superficie (\mathbf{T}) per un elemento fluido generico in modo da poter determinare \mathbf{s} conoscendo \mathbf{T} ed \mathbf{n} . Cominciamo con l'osservare che una superficie avrà un orientamento generico determinato dalla sua normale $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ e su di essa agirà un forza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ da cui si evince che la determinazione delle azioni di superficie necessita di due informazioni di direzione. Questa osservazione ci porta ad immaginare $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}, \mathbf{n})$ che giustificerebbe per gli elementi di \mathbf{T} una forma T_{ij} con $i, j = x, y, z$. Bisogna notare, tuttavia, che il fatto che gli elementi di \mathbf{T} abbiano due indici non implica necessariamente che \mathbf{T} sia un tensore, visto che per affermare ciò bisogna verificare che cambiando sistema di riferimento \mathbf{T} si trasformi seguendo le regole dei tensori.

Prendiamo ora un elemento di fluido a forma di tetraedro (figura 4.5b) e calcoliamone l'equilibrio sotto l'azione di forze di volume e di superficie; indicando con \hat{x} , \hat{y} ed \hat{z} i versori degli assi si avrà

$$\mathbf{s}(\mathbf{n})dS + \mathbf{s}(-\hat{x})dS_x + \mathbf{s}(-\hat{y})dS_y + \mathbf{s}(-\hat{z})dS_z = \rho dV(\mathbf{a} - \mathbf{f}). \quad (4.47)$$

D'altra parte, per le proprietà geometriche del tetraedro possiamo scrivere $dS_x = dS\hat{x} \cdot \mathbf{n}$ e lo stesso per le altre superfici, da cui notando che il volume del tetraedro si può esprimere

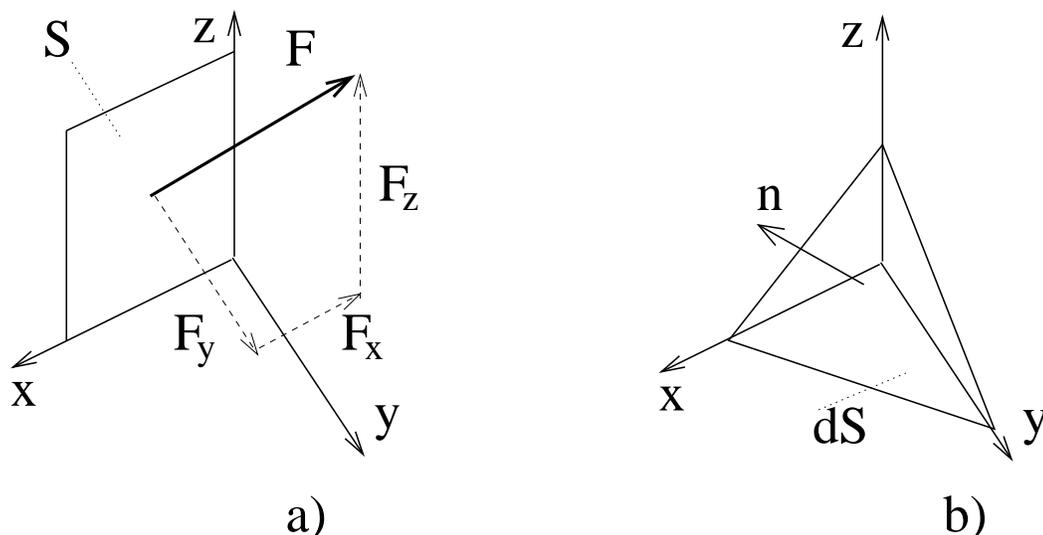


Figura 4.5: Definizione del tensore degli sforzi.

come $dV = dSh/3$, con h l'altezza del tetraedro relativa alla base dS abbiamo

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) - (\mathbf{s}(\hat{x})\hat{x} + \mathbf{s}(\hat{y})\hat{y} + \mathbf{s}(\hat{z})\hat{z}) \cdot \mathbf{n} = \frac{h}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{f}). \quad (4.48)$$

Se ora si fa tendere a zero il volume del tetraedro mantenendone invariata la forma, si ha che le forze di volume tendono a zero più rapidamente di quelle di superficie (effetto scala) e poiché il tetraedro si contrae in un punto si ottiene la relazione

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = (\mathbf{s}(\hat{x})\hat{x} + \mathbf{s}(\hat{y})\hat{y} + \mathbf{s}(\hat{z})\hat{z}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.49)$$

che ci dice come calcolare lo stato di tensione in un punto di una superficie con normale \mathbf{n} note le tensioni in altre tre direzioni ortogonali. Poiché la relazione (4.49) si può scrivere per componenti nella forma $\mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ oppure per componenti $s_i = T_{ij}n_j$ (risultando $T_{ij} = (s_i(\hat{x})\hat{x}_j + s_i(\hat{y})\hat{y}_j + s_i(\hat{z})\hat{z}_j)n_j$) possiamo effettivamente affermare che per caratterizzare le azioni di superficie in un punto è necessario un tensore, così come precedentemente ipotizzato.

Avendo stabilito che le forze di superficie in un punto sono caratterizzate da un tensore (del secondo ordine) ne consegue che per ogni punto abbiamo bisogno di 9 informazioni (T_{ij} , per $i, j = x, y, z$); ci chiediamo ora se le 9 componenti del tensore sono tutte indipendenti o se c'è un legame tra loro che permetta di diminuire il numero delle incognite. Consideriamo la figura 4.6 e calcoliamo l'equilibrio alla rotazione intorno all'origine degli assi per l'elemento fluido ². Indicando con dz la dimensione dell'elemento nella direzione

²In realtà nell'equilibrio alla rotazione dell'elemento fluido andrebbero considerate anche le forze di volume, tuttavia se i momenti delle forze di superficie sono infinitesimi di ordine dl^3 quello delle forze di volume sono di ordine dl^4 e quindi contraendo il prisma lasciandone invariata la forma i momenti delle forze di volume tendono a zero più rapidamente di quelli relativi alle forze di superficie. Questo è di nuovo l'effetto scala che rende trascurabili le prime forze rispetto alle seconde per elementi fluidi infinitesimi.

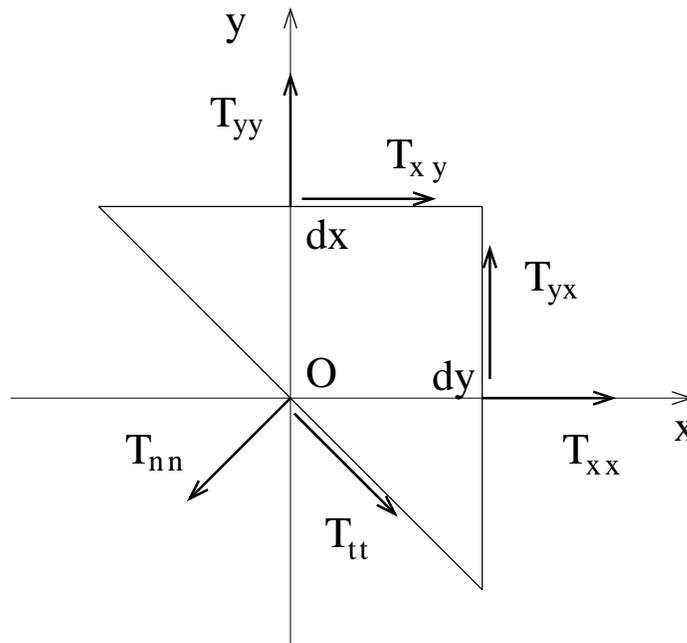


Figura 4.6: Equilibrio alla rotazione per un elemento fluido sottoposto alle azioni di superficie.

ortogonale al foglio si ha

$$T_{yx}dydz\frac{dx}{2} - T_{xy}dxdz\frac{dy}{2} = 0, \implies T_{xy} = T_{yx}, \quad (4.50)$$

da cui si vede che il tensore degli sforzi è simmetrico e quindi le sue componenti indipendenti sono solo 6.

4.7 * relazioni costitutive

Dopo aver determinato la forma tensoriale di \mathbf{T} vogliamo ora metterlo in relazione con lo stato di moto nell'intorno di un punto.

Notiamo subito che nel caso di fluido fermo, le azioni viscosive saranno identicamente nulle e l'unica forza di superficie sarà la pressione, risultando identicamente $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, essendo \mathbf{I} la matrice identità. In generale tuttavia il fluido sarà in movimento ed il tensore degli sforzi avrà anche i termini deviatorici risultando così

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (4.51)$$

Vogliamo ora determinare come il tensore $\boldsymbol{\tau}$ dipende dal campo di velocità, o meglio, dalla deviazione della velocità rispetto ad una corrente uniforme visto che in questo caso gli sforzi viscosi sono nulli. A tale scopo facciamo due ipotesi giustificate dall'evidenza sperimentale: (i) $\boldsymbol{\tau}$ dipende solo dalla distribuzione istantanea del campo di velocità ossia

la storia di \mathbf{u} non influenza il valore di $\boldsymbol{\tau}$, (*u*) il fluido in esame è isotropo, ossia $\boldsymbol{\tau}$ è indipendente dall'orientamento dell'elemento di fluido ³. Nelle suddette ipotesi, la forma più generale che può assumere $\boldsymbol{\tau}$ è (scritta per componenti):

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mathcal{O}[(\nabla \mathbf{u})^2]. \quad (4.52)$$

Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che $\nabla \mathbf{u}$ sia 'piccolo' abbastanza da poter trascurare i termini $\mathcal{O}[(\nabla \mathbf{u})^2]$ e superiori così da poter scrivere

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (4.53)$$

Notiamo che $\boldsymbol{\tau}$, e quindi A_{ijkl} , non possono dipendere esplicitamente da \mathbf{u} per l'invarianza Galileiana e nemmeno da derivate temporali di \mathbf{u} in quanto siamo nell'ipotesi di fluidi senza effetto memoria. A_{ijkl} può dipendere dallo stato del fluido (per esempio dalla temperatura) e persino dagli invarianti del tensore $\nabla \mathbf{u}$ (ma non dal tensore stesso). Notiamo infine che, essendo $\boldsymbol{\tau}$ simmetrico in i e j , tale deve risultare anche il tensore \mathbf{A} da cui ne consegue che la forma più generale che può assumere è

$$A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (4.54)$$

essendo δ_{ij} il delta di Kronecker. Osservando che questa espressione, oltre che in i e j , risulta simmetrica anche in k ed l , ne segue $b = c$. Se ora decomponiamo $\nabla \mathbf{u}$ nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica ($\nabla \mathbf{u}|_{i,j} = E_{ij} + \Omega_{ij}$), scopriamo che quando viene moltiplicato per \mathbf{A} sopravvive solo la parte simmetrica in quanto anche \mathbf{A} è simmetrico. Come ultimo passo ricordiamo che $\boldsymbol{\tau}$ è solo la componente deviatorica di \mathbf{T} deve quindi risultare identicamente $\tau_{ii} \equiv 0$ da cui ne consegue

$$\tau_{ij} = a\delta_{ij}E_{kk} + 2bE_{ij}. \quad (4.55)$$

Avevamo comunque detto che deve valere $\tau_{ii} \equiv 0$ e se nella (4.55) si pone $i = j$ si ottiene

$$3a\nabla \cdot \mathbf{u} + 2b\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \implies a = -\frac{2}{3}b, \quad (4.56)$$

per cui si è passati da un tensore A_{ijkl} del quarto ordine con 81 componenti incognite alla sola incognita b .

Per collegare b alle proprietà del fluido si ricorre a prove sperimentali; se per esempio abbiamo un flusso con velocità solo nella direzione x che varia lungo la direzione y si ha

³Queste ipotesi sono valide per la quasi generalità fluidi ma non sono applicabili ad alcuni materiali di straordinaria importanza pratica. Esistono infatti fluidi che presentano fenomeni di isteresi e quindi $\boldsymbol{\tau}$ dipende anche dalla storia del moto. Ci sono inoltre fluidi anisotropi in cui il valore di $\boldsymbol{\tau}$ dipende dall'orientamento della particella fluida. Il sangue, le vernici e le soluzioni polimeriche sono solo alcuni esempi tra molti.

sperimentalmente $\tau_{yx} = \mu du_x/dy$ essendo μ la viscosità del fluido, da cui si può congetturare $b = \mu$. Con questa posizione il legame tra $\boldsymbol{\tau}$ e lo stato di moto nell'intorno di un punto diventa

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (4.57)$$

che è la relazione costitutiva per fluidi Newtoniani.

Prima di concludere la trattazione delle relazioni costitutive si vuole chiarire un punto che non dovrebbe essere sfuggito ad un lettore attento. Nel passare della relazione (4.51) alla (4.53) abbiamo detto di assumere che il gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$ risulti 'piccolo'. Naturalmente in fisica piccolo o grande risulta del tutto privo di significato se non si dice rispetto a cosa. Per costruire quindi un termine di confronto riconsideriamo la natura molecolare del fluido esposta all'inizio del testo e risaliamo al meccanismo microscopico che produce gli sforzi viscosi. Abbiamo visto che questi sforzi sono generati dalla diffusione di quantità di moto delle singole molecole attraverso delle collisioni tra molecole a differente velocità. Considerata la velocità con cui si muovono le molecole e lo spazio percorso tra una collisione e la successiva (libero cammino medio) si ha che il tempo medio tra due collisioni successive è, per i gas a pressione e temperatura ambiente $\mathcal{O}(10^{-10}\text{s})$. D'altra parte l'inverso del gradiente di velocità è dimensionalmente un tempo quindi richiedere che $\nabla \mathbf{u}$ sia piccolo significa richiedere che la scala temporale associata agli sforzi macroscopici sia molto grande rispetto ai tempi caratteristici microscopici. Nei liquidi i fenomeni sono complicati dalla presenza di legami labili tra le molecole, appare comunque ragionevole assumere che qualunque fenomeno microscopico sia incomparabilmente più rapido rispetto alle variazioni macroscopiche e quindi l'assunzione in (4.53) risulta giustificata.

4.8 equazioni di Navier–Stokes

Dopo aver determinato la relazione tra il tensore degli sforzi viscosi e lo stato di moto nell'intorno di un punto è finalmente possibile chiudere l'equazione di bilancio della quantità di moto che, nella forma data dalla (4.24), aveva una dipendenza da $\boldsymbol{\tau}$ rimasto incognito. Se ora sostituiamo la relazione costitutiva (4.57) precedentemente trovata nella (4.24) otteniamo

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} - \frac{2}{3}\nabla[(\mu\nabla \cdot \mathbf{u})]\mathbf{I} + 2\nabla \cdot (\mu\mathbf{E}), \quad (4.58)$$

che è chiamata equazione di Navier–Stokes. Nel caso in cui si possa assumere che la viscosità del fluido non è funzione della posizione allora si può scrivere

$$\nabla \cdot (\mu\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} = \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad 2\nabla \cdot (\mu\mathbf{E}) = \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (4.59)$$

che risostituiti nella (4.58) danno

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (4.60)$$

che è l'equazione di Navier–Stokes per flussi a viscosità costante nello spazio.

Se infine si aggiunge l'ulteriore ipotesi che il flusso sia incomprimibile, per cui l'equazione di conservazione della massa diventa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, allora l'equazione di Navier–Stokes si scrive

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4.61)$$

Vedremo ora come il numero di equazioni da utilizzare per la soluzione di un problema fluidodinamico dipenda dalla natura del flusso. Infatti se un flusso è incomprimibile la sua densità sarà costante e quindi non entra tra le incognite del problema. Questo implica che le incognite sono solamente la velocità (3 componenti scalari) e la pressione (1 scalare) che ha il solo ruolo cinematico di assicurare l'incomprimibilità del flusso. In questo caso abbiamo 4 incognite e dobbiamo quindi utilizzare 4 equazioni che si ottegono dalla (4.61) (1 equazione vettoriale \implies 3 equazioni scalari) e dalla conservazione della massa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (1 equazione scalare). Nella soluzione dei flussi incomprimibili, quindi, non è necessario utilizzare la conservazione dell'energia in quanto la conservazione della massa ed il bilancio della quantità di moto costituiscono un sistema chiuso in cui il numero di equazioni è pari al numero delle incognite.

Al contrario nel caso di flussi comprimibili, la densità è una variabile del problema e quindi bisogna usare anche l'equazione di conservazione dell'energia (1 equazione scalare). Questa equazione tuttavia introduce come ulteriore incognita la temperatura e quindi richiede l'uso di un'altra relazione per chiudere il problema. Questa relazione è costituita dall'equazione di stato del fluido considerato che, mettendo in relazione densità pressione e temperatura senza introdurre incognite aggiuntive, pareggia il bilancio tra incognite ed equazioni.

4.9 * varie forme dell'equazione dell'energia

L'equazione di conservazione dell'energia si presta a varie interpretazioni fisiche che permettono di distinguere l'origine ed il bilancio dei vari termini sorgente. Come primo punto ricordiamo che \mathcal{E} è la densità di energia *totale* di una particella fluida che avrà una parte cinetica $\mathbf{u}^2/2$ ed una parte di energia interna e . D'altra parte, l'equazione di bilancio per la sola componente cinetica dell'energia si può ottenere facilmente moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} l'equazione di bilancio della quantità di moto (4.24) da cui si ricava

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (4.62)$$

Se questa equazione viene sottratta alla (4.37), con la posizione $\mathcal{E} = \mathbf{u}^2/2 + e$, si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia interna

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q} \quad (4.63)$$

in cui i termini sorgente hanno sia natura termodinamica che meccanica. In particolare il termine $\rho \dot{q}$ tiene in conto la variazione di energia interna a causa di produzione di

calore interna alla particella fluida mentre $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$ è il contributo dovuto al calore che entra nella particella dall'esterno. $-p \nabla \cdot \mathbf{u}$ è invece un termine meccanico e rappresenta l'energia interna immagazzinata dal sistema sotto forma di lavoro di pressione. Il termine $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}$ è infine la parte di energia meccanica trasformata in calore a causa degli sforzi viscosi. Questo termine deriva da $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}$ che è la contrazione di due tensori (anche detto doppio prodotto scalare); ricordando però che $\boldsymbol{\tau}$ è simmetrico e che $\nabla \mathbf{u}$ si può decomporre in parte simmetrica ed antisimmetrica ne consegue che nel prodotto sopravvive solo la parte simmetrica di $\nabla \mathbf{u}$ da cui il termine $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}$. Sostituendo a $\boldsymbol{\tau}$ ed \mathbf{E} le loro espressioni in funzione del gradiente di velocità si può dimostrare che il termine $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}$ è definito positivo ed è omogeneo di grado 1 in μ potendo così scrivere $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} = \mu \phi$. Il fatto che questo termine sia sempre positivo ci dice che la trasformazione di energia meccanica in calore da parte dei termini viscosi può andare in un solo verso e non si può mai verificare il contrario. Questa osservazione introduce la questione della reversibilità dei vari processi di trasformazione dell'energia da una forma all'altra.

Per comprendere meglio questo punto, ricordiamo alcune definizioni della termodinamica

$$de = \delta Q - pd \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad dS = \frac{\delta Q}{T} \implies TdS = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (4.64)$$

essendo S l'entropia e Q il calore entrante nel sistema ⁴.

Dall'ultima delle (4.64) si ottiene

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} + \frac{\rho p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} - p \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4.65)$$

avendo notato che per la conservazione della massa risulta $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$.

Sostituendo l'uguaglianza di sopra nella (4.63) si arriva quindi all'equazione di bilancio dell'entropia

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \mu \phi + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q}, \quad (4.66)$$

in cui non compare più il termine $-p \nabla \cdot \mathbf{u}$ che è quindi di tipo reversibile.

Nel caso particolare in cui il flusso abbia gli effetti viscosi, la conducibilità termica e la produzione interna di calore trascurabili, allora l'equazione (4.66) si riduce a

$$\frac{DS}{Dt} = 0, \quad (4.67)$$

che, ricordando il significato della derivata materiale, afferma la costanza dell'entropia di una particella fluida durante la sua evoluzione. Se infine il flusso è anche stazionario la (4.67) diventa $\mathbf{u} \cdot \nabla S = 0$ che è equivalente ad affermare che le variazioni di entropia avvengono solo in direzione ortogonale alle linee di corrente, oppure l'entropia lungo una linea di corrente rimane costante.

⁴In queste definizioni si è usata la convenzione di indicare con d i differenziali esatti e con δ le semplici variazioni infinitesime. Per esempio dS è un differenziale esatto mentre δQ è una variazione infinitesima e sussistendo la $dS = \delta Q/T$ si ha che $1/T$ è il fattore integrante.

Capitolo 5

Equazione di Bernoulli

In questo capitolo verranno integrate alcune relazioni esposte precedentemente che assumeranno una forma particolarmente semplice, sia per le applicazioni, che per l'interpretazione fisica.

5.1 seconda legge della dinamica per un fluido ideale

In questa sezione si considera il moto di una particella fluida in un flusso non viscoso e stazionario nel caso in cui sia soggetta alle sole forze di pressione e di gravità. Si vuole analizzare, in particolare, la forma che assume la seconda legge della dinamica in tale contesto in quanto può essere posta in una forma particolarmente semplice ed utile per le applicazioni fluidodinamiche.

Si assuma, per semplicità, che il campo di moto sia anche bidimensionale e che una linea di corrente sia come quella in figura 5.1, se s è la coordinata che corre lungo la linea di corrente ed $R(s)$ il raggio di curvatura locale, la generica particella fluida che al tempo $t = \bar{t}$ si trova nel punto $s = \bar{s}$ con velocità $U(\bar{s})$ avrà le componenti di accelerazione tangenziale e normale alla linea di corrente

$$a_s = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial s} \frac{ds}{dt} = U \frac{\partial U}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{U^2}{R} \Big|_{s=\bar{s}}, \quad (5.1)$$

dove la prima espressione si ottiene semplicemente dalla regola di derivazione di una funzione composta mentre la seconda è l'espressione dell'accelerazione centrifuga.

Si consideri ora una particella fluida di dimensioni ds e dn , rispettivamente, nelle direzioni tangenti e normali alla linea di corrente nel punto $s = \bar{s}$, e calcolino le risultanti delle forze F_s ed F_n nelle due direzioni.

Detta \bar{p} la pressione nel baricentro della particella, nella direzione s agiranno le forze di pressione

$$F_{sp} = [p_{s1} - p_{s2}]dn = \left[\left(\bar{p} - \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} \frac{ds}{2} \right) - \left(\bar{p} + \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} \frac{ds}{2} \right) \right] dn = - \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} ds dn \quad (5.2)$$

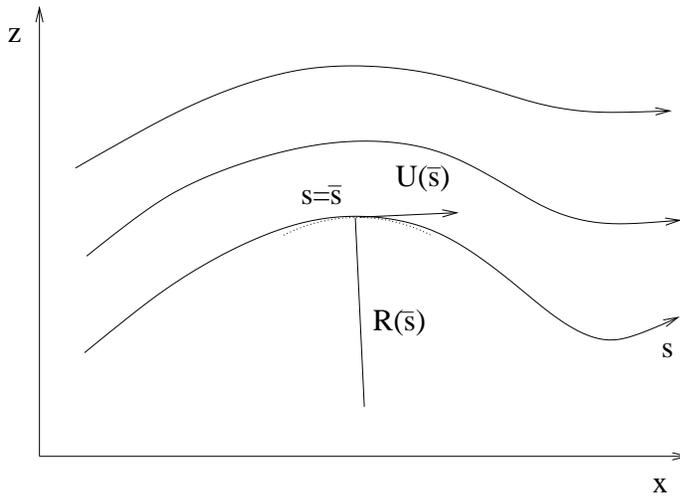


Figura 5.1: Disegno schematico di linee di corrente.

e, procedendo analogamente per la direzione normale, si ottiene

$$F_{np} = -\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{s=\bar{s}} dsdn. \quad (5.3)$$

Oltre alle forze di pressione sulla particella fluida agisce la gravità che, formando un angolo $\pi - \theta$ con la normale alla linea di corrente, fornisce le due componenti di forza peso:

$$F_{sg} = -\rho g \sin \theta \Big|_{s=\bar{s}} dsdn \quad \text{e} \quad F_{ng} = -\rho g \cos \theta \Big|_{s=\bar{s}} dsdn, \quad (5.4)$$

dove $\rho dsdn$ è la massa della particella. È possibile a questo punto scrivere la seconda legge della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ per la particella fluida proiettandone le componenti nelle direzioni tangenziale e normale alla linea stessa. Utilizzando le espressioni (5.1), (5.3) e (5.4) per le accelerazioni e le forze si ottiene

$$\rho dsdn U \frac{\partial U}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} = -\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} dsdn - \rho g \sin \Big|_{s=\bar{s}} \theta dsdn \quad (5.5)$$

oppure

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) \Big|_{s=\bar{s}} + \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{s=\bar{s}}, \quad (5.6)$$

dove si è utilizzata l'ipotesi $\rho = \text{cost.}$ e l'identità $\sin \theta \Big|_{s=\bar{s}} \equiv \partial z / \partial s \Big|_{s=\bar{s}}$ in cui z è una coordinata misurata su una asse con origine arbitraria ed orientato in verso opposto rispetto alla gravità.

L'espressione (5.6) può essere integrata nella forma

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\rho U^2}{2} + p + \rho g z \right] \Big|_{s=\bar{s}} = 0. \quad (5.7)$$

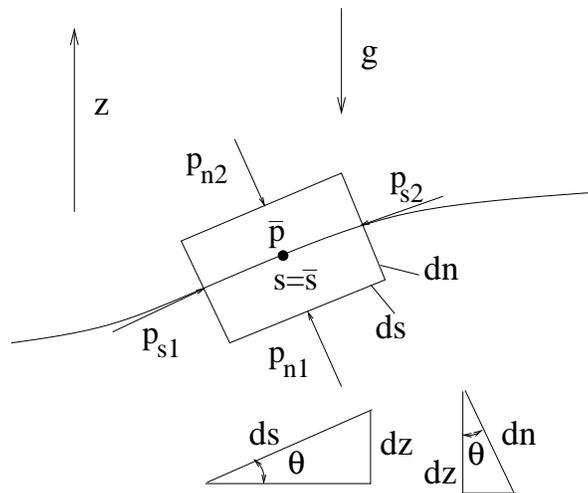


Figura 5.2: Forze sulla particella fluida.

che, quando si osservi che \bar{s} è un punto qualunque sulla linea di corrente, implica che la quantità tra parentesi quadre deve essere costante lungo una linea di corrente,

$$\frac{\rho U^2}{2} + p + \rho g z = \text{cost.} \quad \text{lungo una linea di corrente} \quad (5.8)$$

che è una forma particolare dell'equazione di Bernoulli.

Procedendo in modo analogo per la direzione normale si scrive

$$\rho ds dn \frac{U^2}{R} \Big|_{s=\bar{s}} = - \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{s=\bar{s}} ds dn - \rho g \cos \theta \Big|_{s=\bar{s}} ds dn \quad (5.9)$$

che utilizzando le stesse ipotesi precedenti può essere scritta come

$$\int \rho \frac{U^2}{R} dn + p + \rho g z = \text{cost.} \quad \text{lungo la normale ad una linea di corrente} \quad (5.10)$$

La relazione sancisce che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, il budget energetico di una particella fluida rimane costante e durante il suo moto può solo convertire, in modo reversibile, i vari contributi (cinetico, di pressione e potenziale) nell'una o nell'altra forma senza aumentare o diminuire l'energia totale. L'interpretazione fisica della relazione (5.9) è invece meno immediata ed è legata al cambio di direzione del moto di una particella in cui la forza centrifuga deve essere bilanciata da una combinazione di gradiente normale di pressione e forza peso. La sua forma integrata è data in (5.10) ed è comunque di minor interesse applicativo rispetto alla (5.8).

5.2 * equazione di Bernoulli

L'equazione di bilancio della quantità di moto (o, in modo equivalente, l'equazione di conservazione dell'energia) assume una forma particolarmente semplice ed utile nelle applicazioni quando si facciano alcune ipotesi semplificative. È bene anticipare che queste

ipotesi potrebbero sembrare troppo restrittive, limitando fortemente l'applicabilità dei risultati ottenuti; si vedrà al contrario che, con buona approssimazione, queste ipotesi vengono verificate da molti problemi pratici riuscendo così a ricavare facilmente delle informazioni sul comportamento del sistema.

Si consideri l'equazione di bilancio della quantità di moto nella forma (4.58) che riportiamo di seguito

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{u}) + 2 \nabla \cdot (\mu \mathbf{E}), \quad (5.11)$$

e riprendiamo la formula dell'accelerazione di Lagrange secondo cui possiamo scrivere

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (5.12)$$

Supponiamo inoltre che il vettore \mathbf{f} contenga solo forze di massa conservative così che si possa porre $\mathbf{f} = -\nabla G$ dove G è una funzione potenziale indipendente dal tempo ¹. Indicando inoltre con $F(\mu)$ una funzione omogenea di grado 1 in μ contenente tutti i termini viscosi, possiamo porre l'equazione (5.11) nella forma

$$\nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \nabla G + \frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{F(\mu)}{\rho}. \quad (5.13)$$

Dall'espressione (5.13) possiamo notare che il primo e secondo termine del primo membro sono già in forma di gradiente mentre il terzo termine non lo è. Se però ipotizzassimo l'incomprimibilità del flusso potremmo scrivere $\nabla p/\rho = \nabla(p/\rho)$ e potremmo porre l'equazione (5.13) nella forma

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{F(\mu)}{\rho}. \quad (5.14)$$

L'ipotesi di incomprimibilità del flusso può essere rilassata considerando una densità dipendente unicamente dalla pressione; in tali ipotesi, infatti è possibile porre $\nabla p/\rho = \nabla \int dp/\rho$. Per dimostrarlo basta osservare che se $J(p) = \int dp/\rho$, presa una generica curva s deve risultare

$$\frac{dJ}{ds} = \frac{\partial J}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}. \quad (5.15)$$

Se notiamo ora che dJ/ds e dp/ds sono rispettivamente $\nabla J \cdot \hat{s}$ e $\nabla p \cdot \hat{s}$, ossia le proiezioni dei gradienti lungo la direzione tangente ad s allora risulterà in generale $\nabla J = \nabla p/\rho$ che è la tesi ².

¹L'indipendenza di G dal tempo non è un'ipotesi aggiuntiva ma è condizione necessaria per la conservatività del campo di forze. Infatti se così non fosse si potrebbe percorrere un circuito chiuso partendo ed arrivando nello stesso punto in due istanti diversi ed ottenere due valori diversi del potenziale. In tal caso il lavoro delle forze descritte da G sarebbe dipendente dal percorso seguito e ciò è contrario alle ipotesi di partenza.

²Maggiori ragguagli sul significato fisico di flusso barotropico verranno dati quando si parlerà della dinamica della vorticità.

Se la densità non è costante ma dipende unicamente dalla pressione il flusso si dice barotropico e l'equazione (5.13) si può porre nella forma

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho} \right) = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{F(\mu)}{\rho}. \quad (5.16)$$

Queste relazioni diventano di particolare utilità pratica quando le azioni viscosse possono considerarsi trascurabili ($F(\mu) = 0$) ed il flusso stazionario ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$)³. In tali ipotesi, infatti, il secondo membro delle (5.14) e (5.16) si riduce a $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ che si annulla in tre casi: *i*) il flusso è irrotazionale ($\boldsymbol{\omega} = 0$), *ii*) vorticità e velocità sono allineate ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \equiv 0$, flussi di Beltrami), *iii*) le equazioni (5.14) e (5.16) vengono valutate lungo una linea di corrente. Quest'ultima condizione risulta più evidente se si considera che il prodotto vettore $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ sarà un vettore ortogonale sia a $\boldsymbol{\omega}$ che a \mathbf{u} e tale dovrà risultare il vettore a primo membro delle (5.14) e (5.16); se ci si muove lungo una linea di corrente questa dovrà essere punto per punto tangente alla velocità e quindi ortogonale al vettore $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ da cui ne consegue che si può scrivere

$$\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + \frac{p}{\rho} \right) = \text{const.}, \quad (5.17)$$

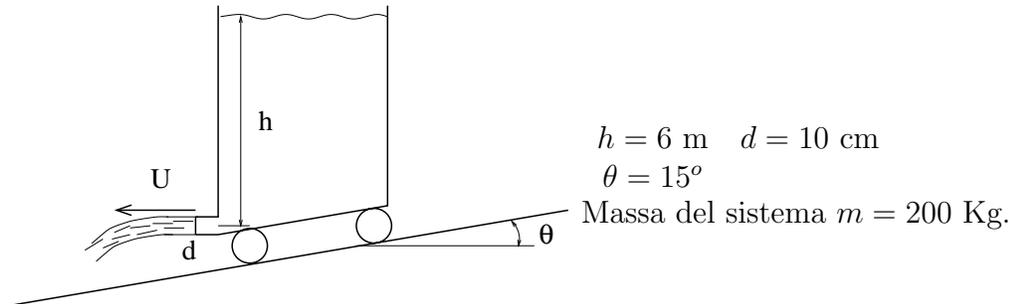
per un flusso incomprimibile, oppure l'equivalente derivata dalla (5.16) per un flusso barotropico. Questa relazione ci dice che se ci troviamo nei primi due casi precedentemente elencati la quantità a primo membro della (5.17) deve rimanere costante in tutto il flusso, nel terzo caso deve rimanere costante lungo una linea di corrente ossia, data la stazionarietà del flusso, per una particella fluida lungo il suo moto. Naturalmente lo stesso ragionamento si potrebbe ripetere per un linea che risulta in ogni punto tangente al vettore $\boldsymbol{\omega}$; queste linee sono dette *linee vorticosse* ed anche lungo questi percorsi la quantità in (5.17) rimane costante.

Risulta utile osservare che l'equazione (5.17) non afferma altro che la costanza dell'energia di una particella fluida. Per esempio se nel potenziale c'è solo quello dovuto alla gravità g risulta $G = gh$, essendo h la quota fissata rispetto ad un riferimento arbitrario; in questo caso l'equazione (5.17) afferma che l'energia di una particella fluida lungo la sua evoluzione non può né aumentare né diminuire ma può solo convertirsi tra le forme cinetica, potenziale e di pressione in modo tale che il budget totale rimanga costante.

³In realtà l'ipotesi di stazionarietà del flusso potrebbe essere rilassata introducendo il potenziale di velocità. Tuttavia l'espressione risultante ha scarsa utilità pratica a non viene qui considerata.

ESEMPIO

Dal carrello in figura fuoriesce dell'acqua da un foro circolare di diametro d . Assumendo il deflusso perfetto e orizzontale e che, sia le variazioni di massa del sistema sia le variazioni di quota del livello siano inizialmente trascurabili, calcolare la legge oraria del carrello che parte da fermo.



Soluzione

Applicando l'equazione di Bernoulli tra il pelo libero del serbatoio e l'uscita del getto si ha che il getto d'acqua fuoriesce con una velocità orizzontale $U = \sqrt{2gh} = 10.844 \text{ m/s}$. D'altra parte, applicando il bilancio di quantità di moto in forma integrale al volume d'acqua contenuta nel carrello si ha che, se quest'ultimo si muove con una velocità $V(t)$ parallela al piano inclinato, il getto produce una spinta orizzontale pari a $F = \rho U(U - V(t) \cos \theta) \pi d^2 / 4$. Applicando quindi il secondo principio della dinamica nella direzione parallela al piano inclinato si ottiene: $F \cos \theta - mg \sin \theta = ma$, e risolvendo questa equazione si determina la legge oraria $s(t)$. In particolare, ponendo $\dot{s}(t) = V(t)$ e $\ddot{s}(t) = a$, l'equazione diventa

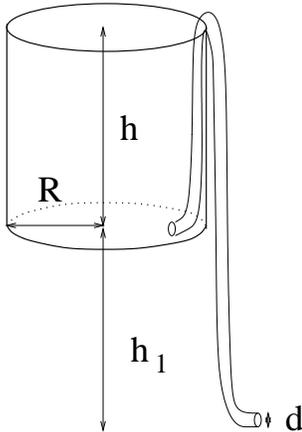
$$\ddot{s} - A\dot{s} = B, \quad A = \frac{\pi d^2 \rho U \cos^2 \theta}{4m}, \quad B = g \sin \theta - \frac{\pi d^2 \rho U^2 \cos \theta}{4m}$$

la cui soluzione è

$$s(t) = \frac{B}{A^2} (e^{At} - 1) - \frac{Bt}{A}.$$

ESEMPIO

Il recipiente cilindrico in figura è pieno d'acqua fino all'orlo. Calcolare il tempo necessario al suo svuotamento se effettuato con un tubo di diametro d con effetti viscosi trascurabili. Calcolare la situazione finale nel caso in cui ci siano perdite per attrito nel tubo e siano assimilabili ad una differenza di pressione costante p_f .



$$\begin{aligned} h &= 2 \text{ m} & h_1 &= 2 \text{ m} \\ R &= 0.5 \text{ m} & d &= 2 \text{ cm} \\ p_f &= 23053 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Soluzione

Indicando, con A e B gli estremi del tubo, rispettivamente, nel contenitore ed all'esterno, si può scrivere l'equazione di Bernoulli risultando $U_A = 0$, $p_A = \rho gh$, $U_B = 4Q/(\pi d^2)$, $p_B = p_0$ ed $h_A - h_B = h_1$ da cui $U_B = \sqrt{2g(h + h_1)} = 4Q/(\pi d^2)$. Osserviamo ora che la quota del fluido nel recipiente varia nel tempo in quanto il livello diminuisce, detto quindi dV il volume infinitesimo di fluido che transita nel tubo in un tempo dt risulta

$$dV = Qdt = \frac{\pi d^2}{4} U_B dt = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(h + h_1)} dt = -\pi R^2 dh,$$

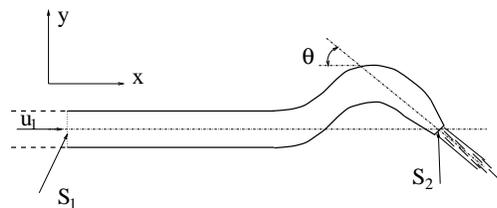
essendo dh la variazione di livello del liquido nel recipiente. Integrando gli ultimi due membri dell'uguaglianza precedente si ottiene il tempo di svuotamento del serbatoio T ,

$$\int_0^T dt = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \frac{4}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h + h_1}}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{8}{\sqrt{2g}} \left(\frac{R}{d}\right)^2 [\sqrt{h + h_1} - \sqrt{h_1}] = 661.24 \text{ s.}$$

Nel caso in cui ci siano delle perdite per attrito, all'equilibrio si arresterà il flusso, per cui, dall'equazione di Bernoulli generalizzata, si avrà l'equilibrio quando $\bar{h} = p_f/(\rho g) - h_1 = 0.35 \text{ m}$.

ESEMPIO

Nel condotto in figura entra dell'acqua nella sezione S_1 a velocità u_1 ed esce nell'ambiente attraverso la sezione S_2 . Sapendo che gli effetti viscosi sono nulli (trascurabili) calcolare le forze in x ed y necessarie a mantenere il condotto fermo.



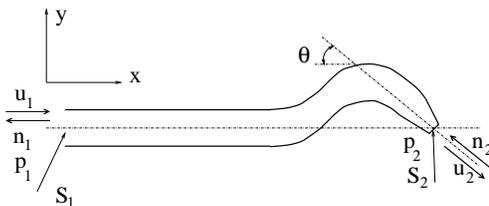
$$S_1 = 0.12 \text{ m}^2 \quad S_2 = S_1/3$$

$$u_1 = 7.2 \text{ m/s} \quad \theta = 30^\circ$$

Suggerimento: notare che le sezioni S_1 ed S_2 sono alla stessa quota. Trascurare la forza peso.

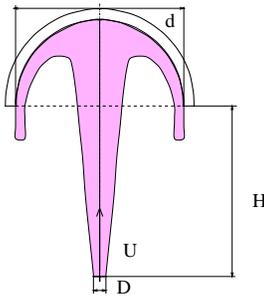
Soluzione

Dalla conservazione della massa tra le sezioni 1 e 2 si ha $\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2 \Rightarrow u_2 = 3u_1 = 21.6 \text{ m/s}$. Essendo gli effetti viscosi trascurabili, tra le sezioni 1 e 2 si può anche applicare l'equazione di Bernoulli: $p_1/\rho + u_1^2/2 = p_2/\rho + u_2^2/2 \Rightarrow p_1 = p_0 + 4\rho u_1^2 = 308660 \text{ Pa}$ (avendo tenuto conto della conservazione della massa, che i termini gravitazionali non ci sono in quanto le sezioni sono alla stessa quota, e che $p_2 = p_0 = 101300 \text{ Pa}$ perché il getto è immerso in atmosfera libera). Applicando ora l'equazione di bilancio della quantità di moto proiettata nelle direzioni x ed y si ottiene rispettivamente: $F_x = \rho u_2^2 S_2 \cos \theta - [\rho u_1^2 + (p_1 - p_0)] S_1 = -14941.88 \text{ N}$ e $F_y = -\rho u_2^2 S_2 \sin \theta = -9311.2 \text{ N}$. (Da notare che in questa soluzione non si è considerata la forza peso. Considerando anche quest'ultima verrebbe un risultato differente per la F_y).



ESEMPIO

Da un ugello piano di larghezza D e profondità b (nella direzione ortogonale al foglio) esce verticalmente un getto d'acqua ad una velocità U . Ad una distanza H è posto un semicilindro di diametro d e profondità b che rimane in equilibrio sospeso dalla spinta del getto. Calcolare il peso del guscio semicilindrico sapendo che il volume di fluido costantemente in transito nel semicilindro (volume delimitato dalla linea tratteggiata in figura) è $1/4$ del volume del semicilindro stesso. (Si trascurino le azioni viscosive tra fluido e superficie del semicilindro).

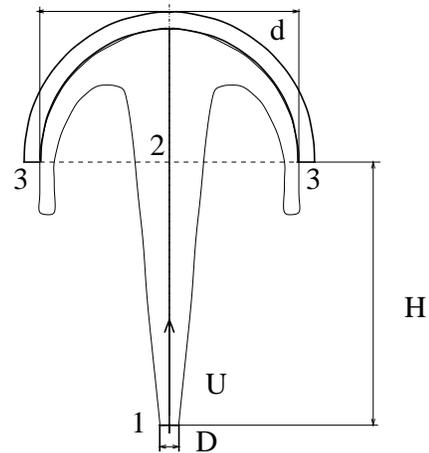


$$\begin{aligned} D &= 5 \text{ cm} & d &= 50 \text{ cm} & U &= 5 \text{ m/s} \\ H &= 40 \text{ cm} & b &= 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Soluzione

Dall'equazione di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2 si ha $u_1^2/2 + p_1/\rho + gh_1 = u_2^2/2 + p_2/\rho + gh_2$ ossia $u_2 = \sqrt{U^2 - 2gH}$ (in quanto P_1 e p_2 sono entrambe uguali alla pressione atmosferica in quanto la vena fluida non è confinata). D'altra parte, dalla conservazione della massa tra le sezioni 1 e 2 si ottiene la relazione $\rho b D U = \rho b d_2 u_2$ da cui si ricava lo spessore della vena fluida nella sezione 2.

Poiché le sezioni 2 e 3 sono alla stessa quota ed alla stessa pressione, essendo le azioni viscosive trascurabili, deve essere necessariamente $|u_2| = |u_3|$ (dall'equazione di Bernoulli). Dalla conservazione della massa (essendo la densità costante) ne conseguirà che anche le sezioni della vena fluida in 2 e 3 devono essere uguali $S_2 = S_3$. Infine, applicando il bilancio della quantità di moto nella direzione verticale al volume di fluido contenuto nel solido si avrà: $-\rho u_2^2 S_2 - \rho u_3^2 S_3 = -\rho g V + F_x$, $F_x = -454.7 \text{ N}$. Il peso del guscio sarà quindi $-F_x$.



5.3 * teorema di Crocco

Sfruttando alcune definizioni della termodinamica e l'equazione dell'energia in termini di entropia introdotta nel precedente capitolo si può porre l'equazione di Bernoulli in una forma utile nei casi in cui si debbano calcolare le variazioni di temperatura in un flusso. Differenziando infatti la definizione di entalpia $h = e + p/\rho$ ed utilizzando le relazioni introdotte in (4.64) si ottiene

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h - T\nabla S. \quad (5.18)$$

Questa uguaglianza, sostituita nella (5.13) con le ipotesi di flusso stazionario e non viscoso, dà

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + h \right) = T\nabla S - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad (5.19)$$

dove si noti che non è stata usata l'ipotesi di barotropicità del flusso.

L'utilità dell'espressione (5.19) appare evidente qualora si ricordi che se alle presenti ipotesi si aggiungono quelle di conducibilità termica trascurabile ed assenza di produzione interna di calore l'equazione dell'entropia diventava $\mathbf{u} \cdot \nabla S = 0$. Poiché questo implica che il gradiente di entropia lungo una linea di corrente è nullo ma tale risulta anche la proiezione del vettore $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ ne consegue che

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + h = \text{const.}, \quad (5.20)$$

lungo una linea di corrente. La relazione (5.19) può anche essere interpretata con un'ottica invertita rispetto alla precedente, ossia in base alla (5.20) lungo una linea di corrente il primo membro della (5.19) deve essere nullo e quindi deve valere la

$$T\nabla S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad (5.21)$$

implicando che un flusso stazionario ed isentropico (ossia con $S = \text{const.}$ lungo una linea di corrente) avrà l'entropia uniforme nello spazio (flusso omentropico) solo se risulta $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ (flusso irrotazionale) o nel caso particolarissimo di $\boldsymbol{\omega}$ parallela ovunque ad \mathbf{u} (flusso di Beltrami). Questo risultato è particolarmente interessante quando si osservi che mette in relazione la vorticità la cui definizione è puramente cinematica con l'entropia che è una grandezza termodinamica.

5.4 tubo di Pitot

Un'applicazione importante dell'equazione di Bernoulli si ha nelle misure di velocità alle quali si può risalire da differenze di pressione. Si consideri infatti il dispositivo disegnato in figura 5.3 investito da una corrente uniforme a velocità U . Presi i punti 1 e 2 come in figura si ha che in 1 la vena fluida viene arrestata (punto di ristagno) e, in base all'equazione di Bernoulli, tutta la sua energia cinetica viene convertita in energia di pressione. Al

contrario, la vena fluida lambisce il punto 2 senza essere perturbata ⁴ mantenendo quindi la stessa velocità e pressione del flusso all'infinito. La pressione misurata in 2 è detta pressione *statica* in quanto non contiene alcun contributo cinetico, la pressione misurata in 1 è invece chiamata pressione *totale* perché è comprensiva anche di tutto il contributo cinetico $\rho U^2/2$ che è detto pressione *dinamica*.

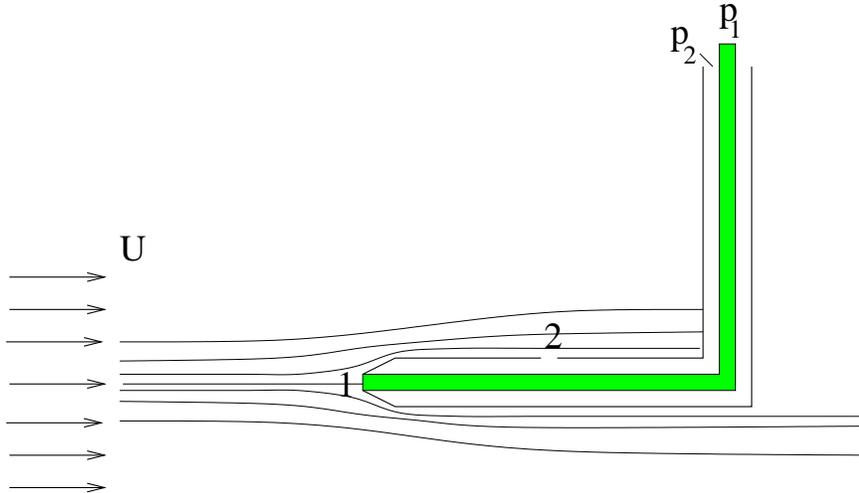


Figura 5.3: Disegno schematico di un tubo di Pitot.

Applicando quindi l'equazione di Bernoulli tra i punti 1 e 2 si ha

$$\frac{U_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho}, \implies U = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}, \quad (5.22)$$

essendo $U_2 = U$, $U_1 = 0$ ed avendo trascurato la variazione di quota $h_1 - h_2$ in quanto piccola. Dalla relazione (5.22) si vede quindi che pur non conoscendo il valore assoluto di pressione è sufficiente misurare la differenza di pressione tra 1 e 2 per risalire al valore della velocità U . La misura di pressione può essere effettuata tramite un manometro differenziale applicato alle estremità dei due tubi concentrici disegnati in figura 5.3.

Questa tecnica di misura è particolarmente utile negli aerei sia perché non possono utilizzare sistemi simili a quelli delle automobili, sia perché per il sostentamento aerodinamico è rilevante solo la velocità rispetto all'aria piuttosto che quella rispetto al suolo.

Il tubo di Pitot deve essere allineato perfettamente con la direzione della corrente per rendere effettivamente il punto 1 un punto di ristagno ($U_1 = 0$) poiché in caso contrario si misura una velocità minore di quella reale. Per questo motivo le misure di velocità devono essere effettuate 'spazzando' il settore angolare nell'intorno della direzione presunta di allineamento in modo da trovare la posizione nella quale si rileva la massima differenza di pressione. Uno svantaggio di questo strumento è che a causa dell'inerzia delle colonne di fluido contenuto nei condotti concentrici può misurare solo pressioni costanti o lentamente variabili nel tempo.

⁴In realtà sono presenti fenomeni di strato limite di cui si parlerà in seguito. Per i ragionamenti sulla pressione, comunque, la vena fluida si comporta come se fosse effettivamente indisturbata.

5.5 tubo di Venturi

In figura 5.4 è riportato uno schema di un misuratore di portata detto tubo di Venturi il cui principio di funzionamento è basato sull'equazione di Bernoulli. Notando infatti che tra le sezioni 1 e 2 è presente una piccola variazione di diametro si avrà un'accelerazione del flusso in corrispondenza della sezione 2 per mantenere costante la portata $Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$. Dall'equazione di Bernoulli segue che deve prodursi una differenza di pressione tra le sezioni 1 e 2 in modo da compensare la variazione di velocità ossia, in formule, si ottiene

$$\frac{U_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho}, \quad (5.23)$$

e dovendo essere $U_1 A_1 = U_2 A_2$

$$Q = U_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (5.24)$$

che permette di misurare la portata nota la geometria del condotto e la differenza di pressione tra le sezioni 1 e 2.

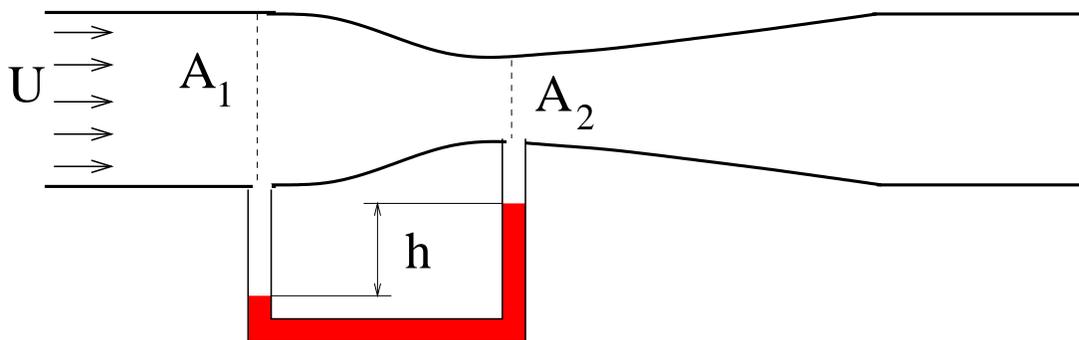


Figura 5.4: Disegno schematico di un tubo di Venturi.

Se per esempio si misura la variazione di pressione con un tubo ad U, detta ρ_m la densità del fluido manometrico ed h la differenza di quota tra i due menischi risulta $p_1 - p_2 = \rho_m g h$ da cui leggendo la quota h si risale alla portata.

Analogamente a quanto è stato visto per i manometri, anche per questo strumento si può variare la sensibilità cercando di rendere massima la differenza di pressione per una data portata. Ciò si può ottenere facilmente agendo sulla strozzatura in 2 anche se considerazioni energetiche, suggeriscono di limitare a qualche percento la variazione di sezione. Il motivo fisico di tale limitazione sarà compreso con lo studio dei fenomeni di strato limite, in questa sede si accennerà solo al fatto che nella sezione divergente del condotto si possono verificare dei distacchi della vena fluida dalla parete laterale che provocano delle perdite di energia (figura 5.5).

Molti dispositivi di uso quotidiano utilizzano un tubo di Venturi anche se questo non viene utilizzato per misure di portata ma per generare differenze di pressione all'interno

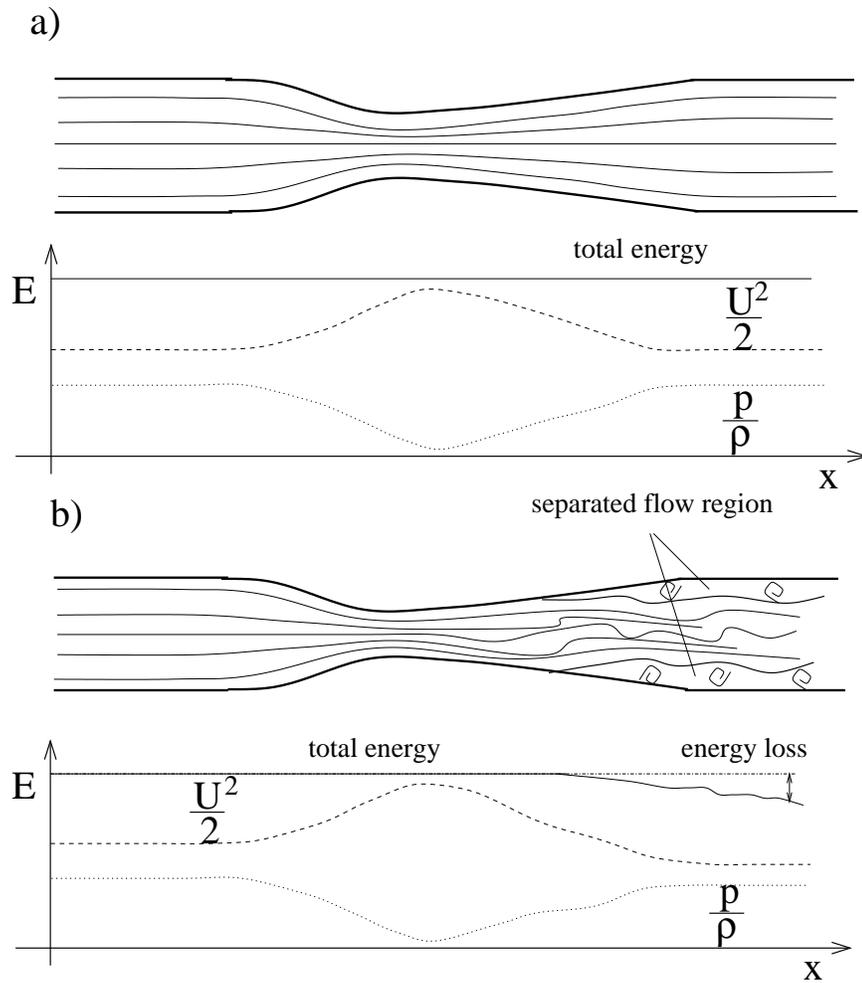


Figura 5.5: Andamento del flusso e di energia cinetica e di pressione in un tubo di Venturi: *a)* in assenza di separazione, *b)* con separazione del flusso.

di un condotto. Su questa differenza di pressione si basa per esempio il funzionamento del (ormai vecchio) carburatore a farfalla, dell'aerografo e dei vaporizzatori per profumi. Se infatti in corrispondenza della sezione di gola si mette un condotto che pesca del liquido da un serbatoio questo viene aspirato nel condotto dove incontrando una corrente ad elevata velocità viene nebulizzato (figura 5.6).

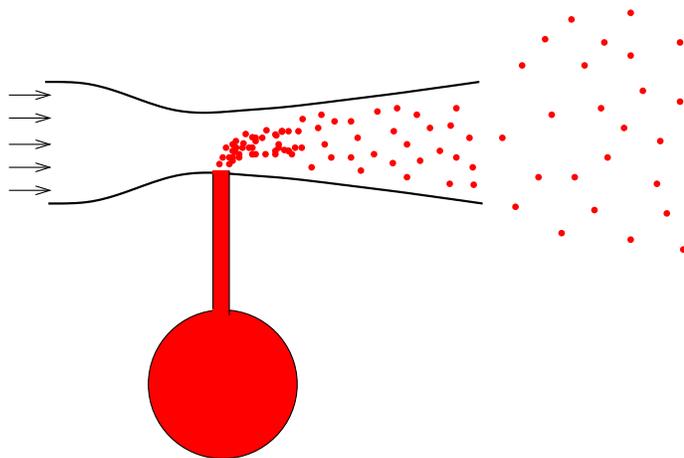
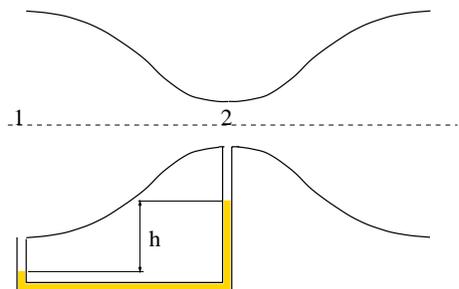


Figura 5.6: Principio di funzionamento del vaporizzatore per profumi.

ESEMPIO

Calcolare la portata in massa sapendo che nel condotto scorre del petrolio ($\rho_o = 800 \text{ Kg/m}^3$) e che nel tubo ad U c'è acqua.



$$h = 4 \text{ cm} \quad A_1 = 0.8 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0.6 \text{ m}^2$$

Soluzione

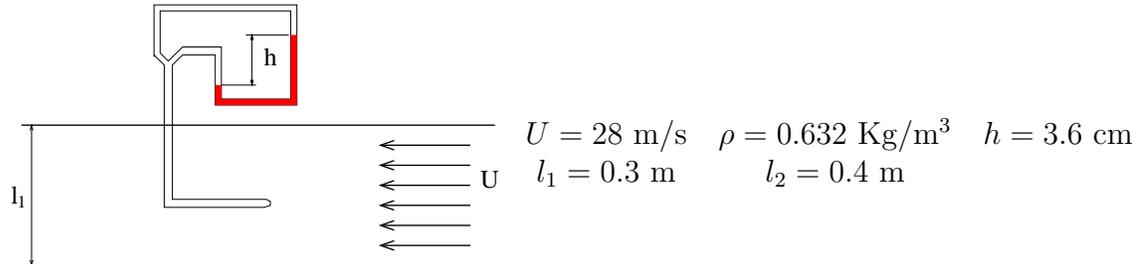
Applicando la conservazione della massa tra le sezioni 1 e 2 $\rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2$ e l'equazione di Bernoulli (lungo la linea di corrente tracciata con una linea tratteggiata) $p_1 + \rho u_1^2/2 = p_2 + \rho u_2^2/2$ si ottiene:

$$u_1 = \left[\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho[1 - (A_1^2/A_2^2)]} \right]^{\frac{1}{2}} = 1.123 \text{ m/s}, \quad \text{con} \quad p_2 - p_1 = \rho_{\text{H}_2\text{O}}gh.$$

Nota u_1 si ricava la portata in massa $\dot{M} = \rho u_1 A_1 = 718.76 \text{ Kg/s}$.

ESEMPIO

In una galleria del vento viene posto un tubo di Pitot. Se la velocità media della corrente è U , la densità del gas in galleria del vento è ρ e la differenza di quota nel tubo ad U tra i due menischi del fluido manometrico è h , determinare la densità del fluido manometrico. Determinare, inoltre la portata in volume nella sezione della galleria supponendo che sia rettangolare con i lati l_1 ed l_2 .

**Soluzione**

Per calcolare la differenza di pressione tra i due rami del tubo di Pitot, basta ricordare che un ramo misura la pressione statica mentre l'altro, arrestando completamente la vena fluida, misura la pressione totale per cui dall'equazione di Bernoulli si ottiene $\Delta p = p_1 - p_2 = \rho U^2/2$ che combinata con la legge di Stevino $\Delta p = \rho_m g h = \rho U^2/2$ fornisce $\rho_m = 702.2 \text{ Kg/m}^3$. Per la portata in volume si ha infine $Q = UA = 3.36 \text{ m}^3/\text{s}$.

Capitolo 6

* Dinamica della vorticità

6.1 equazione del trasporto della vorticità

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come la vorticità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ abbia un ruolo fondamentale nella determinazione delle caratteristiche cinematiche e dinamiche di un flusso. Per esempio dall'equazione di Bernoulli abbiamo visto che l'energia totale si mantiene costante in tutto il campo solo se risulta $\boldsymbol{\omega} = 0$ ovunque mentre in base al teorema di Crocco un flusso irrotazionale sarà anche omentropico (aggiungendo anche altre ipotesi).

In base a questi esempi appare evidente che la comprensione della generazione, dinamica ed evoluzione della vorticità risulta fondamentale nello studio della fluidodinamica. Ciò è ancora più vero se si considera che, come si vedrà successivamente, l'analisi di un flusso irrotazionale può essere trattato con molte semplificazioni rispetto al caso generale.

Per derivare un'equazione di evoluzione della vorticità basta ricordare la sua definizione e fare quindi il rotore dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Prima di procedere con tale operazione, ricordiamo che il termine convettivo dall'accelerazione può essere scritto utilizzando l'accelerazione di Lagrange e che il rotore di un gradiente è identicamente nullo da cui

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \nabla \times \left(\nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right) = +\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}). \quad (6.1)$$

Utilizzando un'identità vettoriale si può porre ulteriormente

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (6.2)$$

in cui gli ultimi due termini sono nulli, il primo in quanto la divergenza di un rotore è identicamente nulla, il secondo perché ipotizziamo per semplicità il flusso incomprimibile.

Se a questo punto si applica il rotore all'equazione (4.61) si ottiene

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}), \quad (6.3)$$

essendo $\nu = \mu/\rho$ la viscosità cinematica supposta costante. Sfruttando le proprietà commutative dei vari operatori e le relazioni appena derivate si può scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (6.4)$$

che è l'equazione del trasporto della vorticità. I termini a primo membro della (6.4) sono quelli della derivata materiale di $\boldsymbol{\omega}$ e quantificano la sua variazione per una particella fluida, misurata da un osservatore che si muove con la particella stessa. I termini a secondo membro sono invece le cause della variazione ed il primo termine rappresenta la diffusione, analogamente all'equazione della quantità di moto ¹.

Il secondo termine rappresenta la generazione di vorticità prodotta dalle forze di massa; osserviamo comunque che se queste forze sono conservative e possono essere quindi espresse da un gradiente $\mathbf{f} = -\nabla G$ allora risulta $\nabla \times \nabla G \equiv 0$, ossia le forze conservative non contribuiscono in alcun modo alla generazione della vorticità. Un caso che capita frequentemente è costituito dalla forza peso che, essendo conservativa, non genera vorticità.

Il terzo termine, detto termine baroclino, produce la vorticità nel caso in cui il gradiente di densità non sia allineato con quello di pressione. Nel caso in cui $\rho = \text{const.}$, il gradiente di densità è nullo ovunque ed il termine baroclino non è presente. Una possibilità più generale è invece quella di flusso barotropico in cui la densità non è costante ma risulta $\rho = \rho(p)$. Abbiamo infatti visto in §5.2 che in tale caso il gradiente di ρ è collineare con quello di p ed il termine baroclino risulta identicamente nullo.

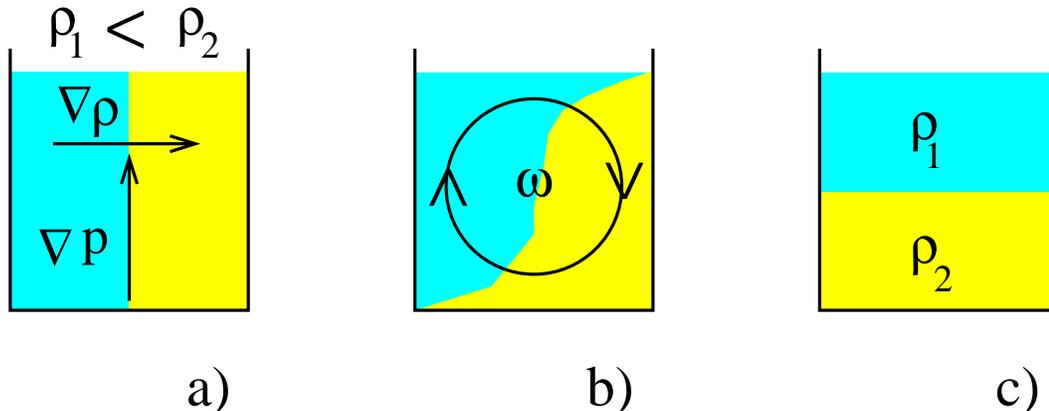


Figura 6.1: Schema di generazione di vorticità baroclina per differenza di densità.

Nelle figure 6.1 e 6.2 sono riportati due esempi di generazione di vorticità prodotta dal termine baroclino. Nel primo caso si hanno fluidi a differente densità (per esempio acqua ed olio) tenuti separati verticalmente da un setto. In questa configurazione il gradiente

¹Il termine viscoso è anche un termine sorgente per la vorticità nel caso in cui siano presenti delle pareti dove il fluido deve soddisfare la condizione di aderenza. Questo punto sarà visto in maggior dettaglio nell'analisi dei fenomeni di strato limite.

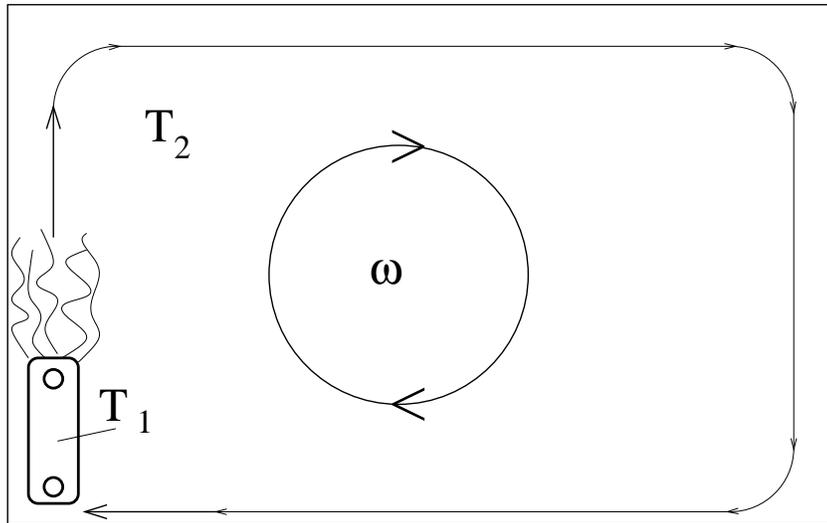


Figura 6.2: Schema di generazione di vorticità baroclina per differenza di densità indotta da variazioni di temperatura.

di pressione è verticale (pressione idrostatica) mentre quello di densità è orizzontale e localizzato all'interfaccia tra i due fluidi. Nell'istante in cui il setto viene tolto il fluido più pesante tenderà a scivolare verso il basso prendendo il posto del fluido più leggero che si disporrà negli strati superiori; ciò induce una rotazione nell'intero sistema che produce appunto la vorticità nella direzione ortogonale al foglio. Se il sistema non avesse perdite viscosive il fluido oscillerebbe indefinitamente convertendo in ogni periodo energia potenziale in cinetica e viceversa. Al contrario per ogni oscillazione parte dell'energia viene convertita in modo irreversibile in calore e per tempi lunghi il sistema assume la configurazione stabile mostrata in figura 6.1c.

Un secondo esempio di generazione baroclina di vorticità è quello dei termosifoni. L'aria a contatto con il termosifone, infatti, aumenta di temperatura e per dilatazione termica diventa più leggera e sale. Dell'aria fredda viene quindi aspirata dal basso e portata a contatto con il radiatore che di nuovo la scalda e così via. Riferendoci allo schema di figura 6.2 si nota che in questo modo viene generata una circolazione a grande scala che contiene della vorticità nella direzione ortogonale al foglio, come indicato dall'equazione (6.4).

Abbiamo detto in precedenza che per non avere produzione baroclina di vorticità non è necessario avere una distribuzione di densità costante ma è sufficiente che il flusso sia barotropico ossia $\rho = \rho(p)$. Il fatto che la densità debba essere funzione solo della pressione si può comprendere fisicamente con il seguente esempio: consideriamo una particella sferica di fluido con densità non costante e concentriamoci solo sulle forze di massa e quelle di pressione. Dalla seconda legge della dinamica possiamo scrivere

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (6.5)$$

Il vettore accelerazione \mathbf{a} è applicato nel baricentro della sfera la cui posizione dipende

dalla distribuzione di densità all'interno della stessa. Al contrario, la risultante delle forze di pressione sarà applicata al centro della sfera in quanto risultante di vettori normali alla superficie ed è indipendente dalla distribuzione delle masse nella sfera. D'altra parte l'equazione (6.5) ci dice solamente che le due forze sono uguali e che la loro risultante è nulla ma ciò non preclude la possibilità che venga generato un momento sulla particella stessa. Questa coppia in generale esiste e provoca la rotazione della particella fluida, in altre parole genera la vorticità, a meno che $\nabla\rho$ e ∇p non siano allineati (flusso barotropico). In questo caso, infatti anche se i vettori sono applicati in punti differenti essi hanno la stessa retta d'applicazione ed il loro momento è nullo. Questo è il caso dell'atmosfera (calma) in cui la densità aumenta con il diminuire della quota ed il suo gradiente è quindi allineato con il gradiente della pressione idrostatica.

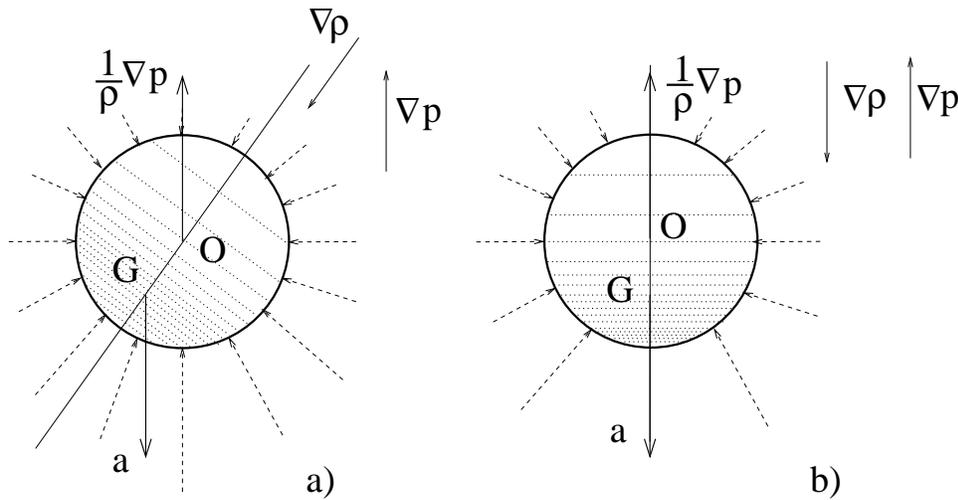


Figura 6.3: Coppia baroclina su una particella fluida: a) flusso non barotropico, b) flusso barotropico.

L'ultimo termine a secondo membro dell'equazione (6.4) che ci rimane da analizzare è $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$; prima di considerare il suo significato, comunque, vogliamo riassumere i risultati finora trovati. Abbiamo descritto il significato fisico dei termini sorgente di vorticità nella (6.4) trovando dei casi in cui questi termini sono nulli; in particolare se il flusso è non viscoso ($\nu = 0$), le forze di massa sono conservative e il flusso è a densità costante oppure barotropico allora i tre termini precedentemente descritti si annullano e l'equazione (6.4) si scrive

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (6.6)$$

Una prima importante considerazione è che tutti questi termini sono omogenei nella vorticità se quindi inizialmente risulta $\boldsymbol{\omega} = 0$ si otterrà $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = 0$ ed il flusso rimarrà irrotazionale indefinitamente.

Una seconda considerazione riguarda il termine $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ che, indipendentemente dal suo significato fisico, risulta identicamente nullo in due dimensioni. Ciò si verifica in quanto la vorticità è un vettore ortogonale al piano mentre la velocità deve necessariamente essere

contenuta nel piano. L'equazione (6.6) implica quindi che per un flusso bidimensionale con viscosità trascurabile forze di massa conservative e flusso barotropico la vorticità obbedisce a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 0 \quad (6.7)$$

ossia la vorticità di una particella fluida rimane invariata durante il suo moto.

Nel caso più generale di flusso tridimensionale il termine $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ non è invece nullo ed ha un ruolo fondamentale nella dinamica della vorticità. Per capirne meglio il suo significato, scriviamone una componente in un sistema di assi cartesiani ed analizziamo i vari termini:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \hat{x} = \omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (6.8)$$

Il primo termine agisce quando c'è un gradiente di velocità nella stessa direzione della vorticità ed avrà quindi un'azione di stiramento (vortex stretching). Riferendoci alla figura 6.4 vediamo che se un tubo fluido viene allungato, per la conservazione del momento angolare la sua velocità di rotazione deve aumentare e di conseguenza la vorticità. Questo meccanismo è quindi di autoamplificazione a causa dei gradienti di velocità e senza necessità di sorgenti esterne. Gli altri termini tendono invece a ruotare parte della vorticità preesistente da una componente all'altra a causa di gradienti trasversali di velocità (vortex tilting). Sempre riferendoci alla figura 6.4 vediamo infatti che in presenza di un gradiente di u_x nella direzione y una struttura contenente inizialmente solo ω_y dopo un certo tempo cambia direzione convertendo parte della sua ω_y in ω_x .

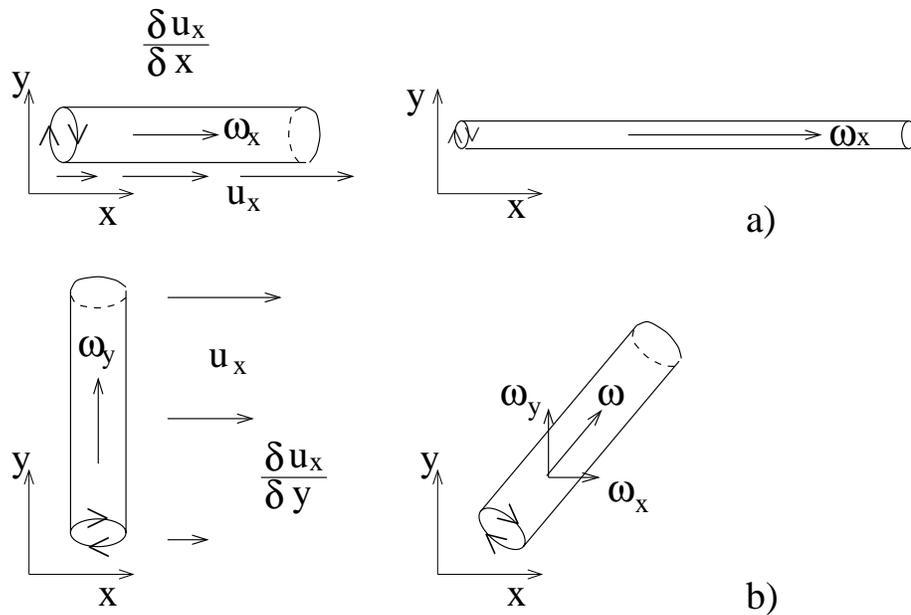


Figura 6.4: Schema del meccanismo di azione del termine di vortex stretching: a) vortex stretching, b) vortex tilting.

6.2 teorema di Kelvin

Avendo mostrato l'equazione di trasporto della vorticità ed il significato fisico dei suoi termini, sarà ora semplice dimostrare alcuni teoremi sui vortici² e comprenderne la rilevanza fluidodinamica.

Iniziamo con il definire l'intensità di un vortice Γ , come la circuitazione del suo campo di velocità lungo un percorso chiuso contenente interamente il vortice oppure (in base al teorema di Stokes) come il flusso di vorticità attraverso la superficie racchiusa (figura 6.5):

$$\Gamma = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.9)$$

la quantità Γ è detta circolazione.

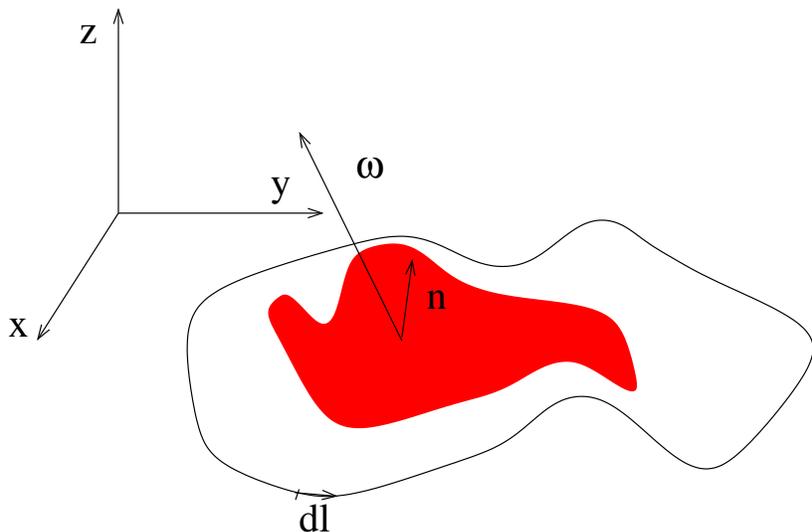


Figura 6.5: Calcolo della circolazione di una regione vortice (indicata in rosso).

Se ora immaginiamo di tracciare una linea chiusa nel fluido come in figura 6.5 e di identificare tutte le particelle attraversate si possono seguire nel tempo le singole particelle e quindi l'evoluzione temporale della linea (detta linea materiale). Il teorema di Kelvin dice che in un fluido barotropico, con forze viscosive trascurabili e soggetto a forze di massa conservative, la circolazione calcolata lungo una linea materiale chiusa è costante nel tempo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (6.10)$$

Dalle definizioni si ha infatti:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\partial S} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt}; \quad (6.11)$$

²Il termine vortice è un concetto che ognuno di noi possiede a livello più o meno intuitivo. Per i nostri scopi è sufficiente definire un vortice come una regione compatta a vorticità non nulla e con delle linee di corrente chiuse (in un riferimento solidale al vortice stesso). Questa definizione, così come tutte quelle finora proposte in letteratura, può tuttavia essere invalidata con dei controesempi.

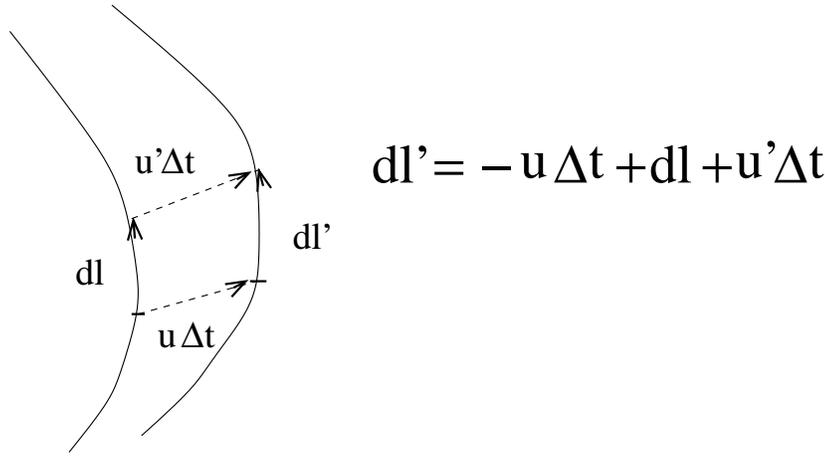


Figura 6.6: Calcolo della derivata materiale per una linea materiale.

e nelle presenti ipotesi dall'equazione di bilancio della quantità di moto si ha (ponendo G il potenziale delle forze di massa conservative)

$$\int_{\partial S} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\partial S} \left(\nabla \int \frac{dp}{\rho} + \nabla G \right) \cdot d\mathbf{l} \equiv 0, \quad (6.12)$$

in quanto si tratta di differenziali esatti integrati su un circuito chiuso. Per il secondo integrale si ha invece considerando il circuito materiale in figura 6.6

$$\frac{Ddl}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dl' - dl}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{u}' - \mathbf{u})\Delta t + dl - dl}{\Delta t} = d\mathbf{u}, \quad (6.13)$$

da cui si ottiene per il secondo integrale

$$\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \frac{Ddl}{Dt} = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{u}^2}{2} \equiv 0, \quad (6.14)$$

di nuovo in quanto differenziale esatto integrato su un circuito chiuso. I risultati delle (6.13) e (6.14) dimostrano la tesi ((6.10)).

6.3 teoremi di Helmholtz

Come conseguenza del teorema di Kelvin appena dimostrato si hanno tre teoremi che si applicano a delle strutture vorticosi che ora definiamo. In analogia con le linee di corrente si possono introdurre le linee vorticosi come quelle linee che in ogni punto sono tangenti al vettore vorticità. Preso allora un circuito chiuso C consideriamo le linee vorticosi attraversate da C che costituiranno una superficie detta superficie vorticosi mentre il volume di fluido all'interno è definito tubo vorticosi (figura 6.7).

I teorema di Helmholtz: nelle stesse ipotesi del teorema di Kelvin (flusso non viscoso, barotropico e forze di massa conservative) la circolazione in un tubo vorticosi si mantiene costante lungo il tubo stesso.

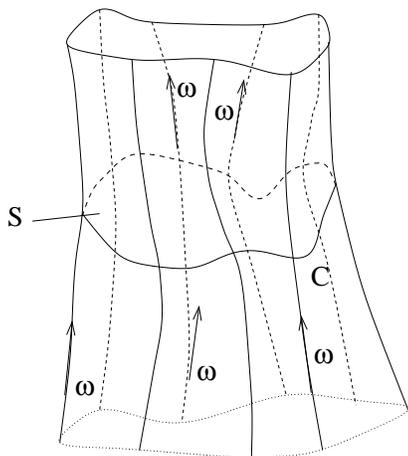


Figura 6.7: Definizione di tubo vorticoso.

Per dimostrare tale affermazione osserviamo che la divergenza della vorticità è identicamente nulla (in quanto $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$) e applicando quindi il teorema della divergenza al volume delimitato dal tubo vorticoso come in figura 6.8 si ottiene

$$0 \equiv \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_l} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.15)$$

Osserviamo ora che risulta $\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = -\Gamma_1$, $\int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \Gamma_2$ e $\int_{S_l} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \equiv 0$ in quanto $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{n} sono ortogonali sulla superficie laterale. Dall'equazione (6.15) ne consegue quindi $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ma data l'arbitrarietà delle sezioni 1 e 2 lo stesso ragionamento si può ripetere per qualunque altra sezione il che dimostra che la circolazione Γ si mantiene costante lungo il tubo vorticoso.

II teorema di Helmholtz: nelle stesse ipotesi precedenti le particelle fluide contenute all'interno di un tubo vorticoso vi permangono indefinitamente o, in altre parole, un tubo vorticoso è un tubo materiale.

Se prendiamo infatti la superficie laterale di un tubo vorticoso deve risultare identicamente $\int_{S_l} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \equiv 0$; se per assurdo una particella interna al tubo vorticoso (e quindi contenente della vorticità) attraversasse la superficie laterale verrebbe violata nell'istante dell'attraversamento tale relazione il che è impossibile.

III teorema di Helmholtz: l'intensità di un tubo vorticoso si mantiene costante nel tempo.

Dal primo teorema di Helmholtz si ha infatti che la circolazione è costante lungo il tubo vorticoso ma ciò non preclude che essa sia una funzione del tempo. Ciò è escluso tuttavia dal teorema di Kelvin in quanto per ogni sezione deve risultare $d\Gamma/dt = 0$ che dimostra la tesi.

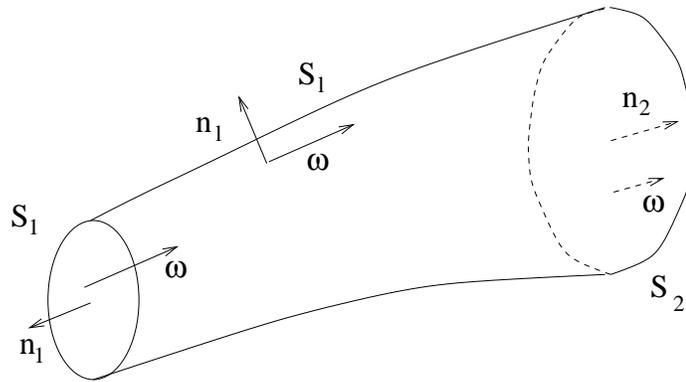


Figura 6.8: Flussi di vorticità in un tubo vorticoso.

