

Capitolo 7

Soluzioni esatte delle equazioni di Navier–Stokes

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come in generale il moto di un fluido abbia una componente di accelerazione non stazionaria ed una convettiva. La seconda implica la non linearità delle equazioni di Navier–Stokes rendendo praticamente impossibile la soluzione analitica. Ci sono tuttavia alcuni casi speciali in cui a causa di particolari condizioni iniziali ed al contorno i termini non lineari sono identicamente nulli e le equazioni di Navier–Stokes ammettono una soluzione analitica. Vedremo nel dettaglio che queste soluzioni sono fisicamente ammissibili solo per valori molto limitati del numero di Reynolds il che rende la loro applicabilità a fenomeni reali praticamente nulla. Ciò nonostante queste soluzioni hanno un grande interesse fluidodinamico in quanto permettono di comprendere alcuni meccanismi che sono presenti anche in flussi più complessi.

7.1 flusso tra lastre piane e parallele

Consideriamo il flusso tra due lastre piane e parallele, poste ad una distanza h come in figura 7.1 ed assumiamo che data la particolare geometria delle piastre il fluido si muova unicamente nella direzione x ossia $u_y = u_z \equiv 0$. Assumiamo, inoltre che il flusso sia incomprimibile per cui dall'equazione di conservazione della massa si ricava

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \implies \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (7.1)$$

il che implica per la u_x di non avere variazioni nella direzione della corrente. Essendo le lastre infinitamente estese nella direzione z è lecito aspettarsi che il flusso non abbia variazioni in questa direzione per cui possiamo affermare che la componente di velocità u_x sarà funzione solo della direzione y .

Se alle ipotesi fatte si aggiunge quella di stazionarietà le equazioni di Navier–Stokes si riducono a

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (7.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g,$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

rispettivamente nelle direzioni x , y e z . Integrando la seconda delle (7.2) si ottiene per la pressione $p = -\rho g y + f(x)$ da cui si vede che la pressione varia idrostaticamente nella direzione y mentre il suo comportamento in x dipende dalla f incognita. Ciò significa che il gradiente di pressione in x $\partial p/\partial x$ dipende unicamente dalla f che possiamo pensare come un dato del problema. Integrando allora la prima delle (7.2) si ottiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + A, \quad u_x(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B, \quad (7.3)$$

dove le costanti A e B dipendono dalle condizioni al contorno ed avendo assunto che il gradiente di pressione sia *costante* in x (il che implica che f sia al più una funzione lineare della variabile x). Dovendo il flusso soddisfare le condizioni di aderenza alle piastre, dovrà risultare $u(0) = 0$ ed $u(h) = 0$ da cui si ottiene

$$u_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh). \quad (7.4)$$

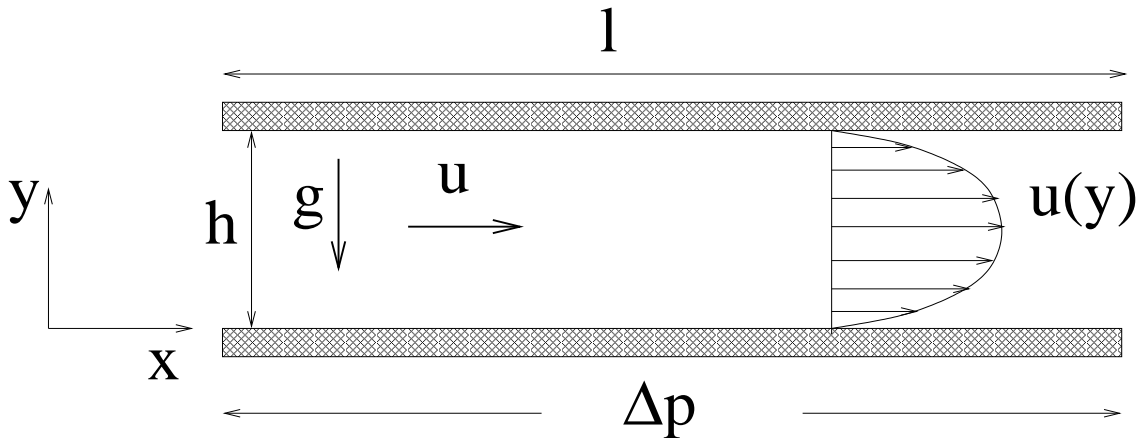


Figura 7.1: Schema di flusso tra due lastre piane e parallele.

Abbiamo così visto che il profilo di velocità è parabolico e la velocità massima si ha quindi al centro ($y = h/2$) essendo

$$(u_x)_{\max} = u_x \left(\frac{h}{2} \right) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{4}. \quad (7.5)$$

Bisogna notare che la velocità è negativa se il gradiente di pressione è positivo; infatti $\partial p/\partial x > 0$ indica che la pressione è crescente nella direzione x e consistentemente il flusso si muove nella direzione opposta. D'altra parte dall'analisi è noto che il valore medio di

una funzione parabolica è pari ai 2/3 del valore massimo per cui risulta per la velocità media nel condotto:

$$\bar{u}_x = \frac{2}{3}(u_x)_{\max} = -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{4}. \quad (7.6)$$

Volendo infine calcolare la portata in volume che attraversa il condotto (per unità di profondità nella direzione ortogonale al foglio) si ha semplicemente

$$Q = \bar{u}_x h = -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{4}, \quad (7.7)$$

dove si osservi che allo stesso risultato si perviene integrando il profilo parabolico (7.4) su tutta l'altezza del canale. Questa integrazione viene lasciata al lettore come facile esercizio.

Se indichiamo con l la lunghezza di un tratto di canale e Δp la differenza di pressione applicata ai suoi estremi possiamo scrivere $\partial p/\partial x = \Delta p/l$ da cui vediamo che le velocità e la portata sono direttamente proporzionali alla differenza di pressione applicata ed inversamente proporzionali alla lunghezza del canale. Ciò potrebbe indurre a pensare che si può aumentare a piacimento tanto la portata quanto la velocità facendo crescere il gradiente di pressione; nella pratica oltre un certo valore non si osserva più il comportamento previsto dalla teoria in quanto il flusso cessa di essere piano ($u_y \neq 0$, $u_z \neq 0$) e stazionario. Questa soglia è fissata dal numero di Reynolds

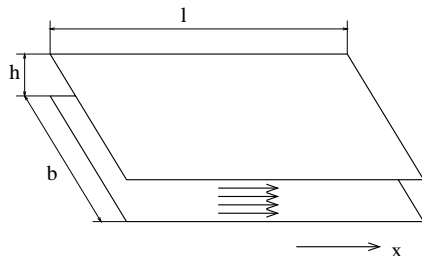
$$Re = \frac{\rho \bar{u}_x h}{\mu} \simeq 1400 \quad (7.8)$$

che quando eccede il valore limite produce un flusso turbolento ¹.

¹Sperimentalmente non si osserva un salto improvviso da flusso laminare a turbolento per il valore del Re indicato. Il flusso infatti inizia a mostrare un comportamento dapprima non stazionario con la produzione di regioni isolate con flusso fortemente tridimensionale fino a quando questa condizione non viene raggiunta da tutto il flusso. Questo regime viene detto di *transizione* alla turbolenza e le sue caratteristiche dipendono oltre che dal flusso anche dalla presenza di disturbi esterni, dalle condizioni di finitura superficiale delle lastre etc.

ESEMPIO

Tra due lastre piane e parallele infinitamente estese e poste ad una distanza h fluisce una portata in massa d'aria pari a \dot{m} (per unità di profondità b). Supponendo il flusso laminare, calcolare la differenza di pressione tra le due sezioni poste ad una distanza l nella direzione della corrente. Verificare che con i dati assegnati sia valida l'ipotesi di flusso laminare (usare aria a 15°C , $\rho = 1.23 \text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 1.79 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$.)



$$h = 1.3\text{cm} \quad l = 2.5 \text{ m} \quad \dot{M} = 0.02 \text{ Kg/ms}$$

Soluzione

Dalle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes per il flusso tra due lastre piane e parallele si ha: $\bar{V} = h^2 \Delta p / (12\mu l)$ ed $\dot{M} = \rho h \bar{V}$ da cui $\Delta p = 12\mu l \dot{M} / (\rho h^3) = 3.97 \text{ Pa}$. Il valore della velocità media è $\bar{V} = 1.25 \text{ m/s}$ da cui risulta $Re = \bar{V}h/\nu = 1116 < 1400$.

7.2 flusso di Couette

Una facile estensione del precedente esempio è costituita dal caso in cui una delle due pareti si muova con velocità U , per esempio la parete superiore. Mettendoci nelle stesse ipotesi del caso precedente si giunge quindi all'integrazione delle equazioni (7.2) ma con le condizioni al contorno $u_x(0) = 0$ e $u_x(h) = U$ da cui si ottiene:

$$u_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + U \frac{y}{h}. \quad (7.9)$$

Da questa espressione si vede che la nuova soluzione è simile alla precedente ma con un termine aggiuntivo che tiene in conto la nuova condizione al contorno. In particolare se il gradiente di pressione è nullo il profilo di velocità è lineare ed unisce la parete inferiore ferma alla parete superiore in moto con velocità U . In forma adimensionale il profilo (7.9) si può scrivere come

$$\frac{u_x(y)}{U} = \frac{h^2}{2\mu U} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + \frac{y}{h} = -\Pi(\eta^2 - \eta) + \eta, \quad (7.10)$$

in cui si nota che il profilo dipende dalla variabile $\eta = y/h$ e dal gruppo adimensionale $\Pi = -h^2/(2\mu U) \cdot \partial p/\partial x$; il profilo (7.10) per alcuni valori di Π è riportato in figura 7.2.

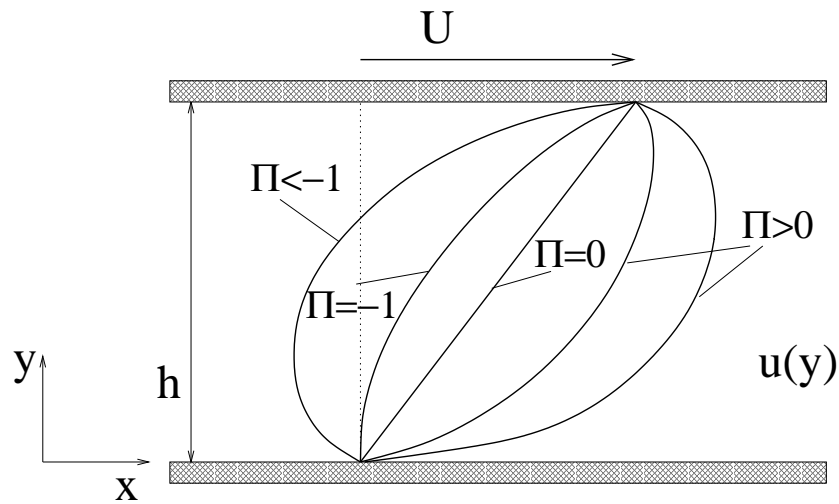


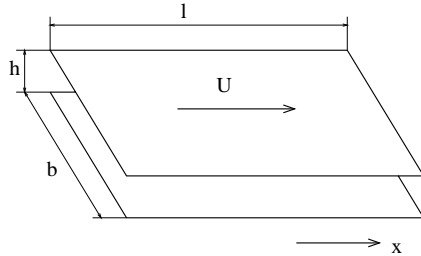
Figura 7.2: Profili di velocità per il flusso di Couette.

L'espressione adimensionale (7.10) permette di vedere immediatamente che per $\Pi = -1$ il profilo ha tangente verticale per $y = 0$ mentre per valori $\Pi < -1$ si ha l'inversione del segno della velocità.

Naturalmente anche in questo caso la soluzione non è fisicamente realizzabile per qualunque valore dei parametri in quanto la transizione alla turbolenza invalida ben presto le ipotesi fatte inizialmente. Nel flusso di Couette, tuttavia non si può trovare un semplice valore di soglia del numero di Reynolds in quanto questo dipende sia da U che dal gradiente di pressione.

ESEMPIO

Due lastre piane e parallele infinitamente estese distano tra loro h . Sapendo che la lastra superiore trasla in direzione x con una velocità U e che il liquido tra le lastre è olio, calcolare la forza che bisogna applicare ad una superficie di dimensioni l e b per mantenere tale stato di moto.



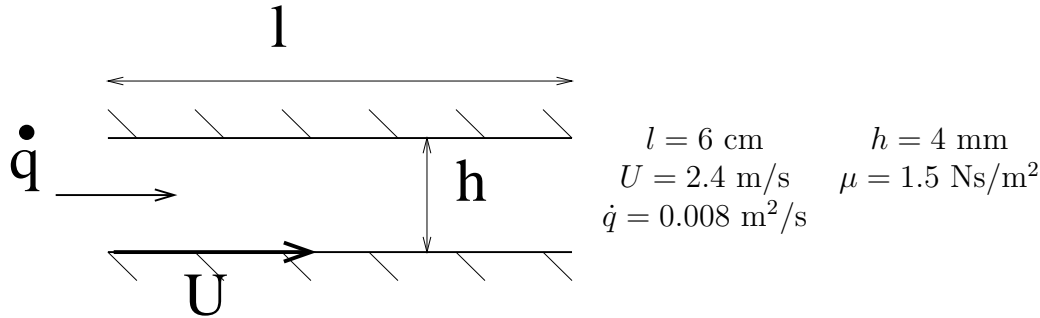
$$\begin{aligned}
 l &= 2 \text{ m} & U &= 1.5 \text{ m/s} \\
 b &= 1.3 \text{ m} & h &= 0.5 \text{ cm} \\
 \rho &= 912 \text{ Kg/m}^3 & \nu &= 4.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}
 \end{aligned}$$

Soluzione

Dalle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes per flussi piani sappiamo che tra le due lastre si svilupperà un profilo di velocità lineare $u(y) = Uy/h$ e quindi lo sforzo di parete sarà dato da $\tau_w = \mu du/dy|_w = \mu U/h = 115 \text{ N/m}^2$. La forza totale esercitata dal fluido sulla parete sarà quindi $F = \int_s \tau_w dS = \tau_w S = 299 \text{ N}$. (Per μ si è usato il valore $\mu = \nu\rho = 0.383 \text{ Ns/m}^2$.)

ESEMPIO

Tra due lastre piane parallele ed infinitamente estese scorre un flusso laminare, stazionario, piano e viscoso. La lastra inferiore si muove a velocità U mentre quella superiore è fissa. Sapendo che la portata in volume per unità di larghezza (nella direzione ortogonale al foglio) vale \dot{q} , calcolare la differenza di pressione Δp che è necessario applicare su una lunghezza l per ottenere tale situazione.



Soluzione

Integrando la relazione $dp/dx = \mu d^2u/dy^2$ con le condizioni al contorno $u(0) = U$ ed $u(h) = 0$ si ottiene

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) - \frac{Uy}{h} + U.$$

Risultando d'altra parte $\dot{q} = \int_0^h u(y) dy = Uh/2 - dp/dx h^3/(12\mu)$ si ricava

$$\frac{dp}{dx} = - \left(\dot{q} - \frac{Uh}{2} \right) \frac{12\mu}{h^3} = -9 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

e quindi $\Delta p = dp/dx \cdot l = -54000 \text{ Pa}$.

7.3 flusso di Hagen-Poiseuille

Consideriamo un tubo a sezione circolare di raggio R di lunghezza l alle cui estremità è applicata una differenza di pressione Δp , e cerchiamo di determinare il campo di velocità all'interno del tubo. Se assumiamo il flusso incomprimibile, stazionario e con un'unica componente di velocità allineata decondo l'asse del tubo, possiamo utilizzare delle equazioni simili a quelle ricavate in §7.1. In questo esempio, però, data la simmetria assiale del problema conviene scrivere le equazioni in coordinate cilindriche ottenendo

$$0 = -\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial r} \tag{7.11}$$

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_x}{\partial r},$$

essendo gli assi orientati come in figura 7.3. L'integrazione delle prime due (7.11) ci dice che la pressione varia nella direzione verticale in modo idrostatico, mentre nella direzione x la sua distribuzione dipende da una funzione incognita f che in generale sarà un dato del problema:

$$p = -\rho g r \sin \theta + f(x) = \rho g y + f(x). \quad (7.12)$$

e, di nuovo, facciamo l'ipotesi che il gradiente di pressione $\partial p / \partial x$ sia indipendente da x allora la terza delle (7.11) può essere facilmente integrata ottenendo:

$$r \frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r^2 + A, \quad u_x = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r^2 + A \ln r + B \quad (7.13)$$

essendo le costanti A e B determinate in base alle condizioni al contorno. Imponendo la condizione di aderenza alla parete ($u_x(R) = 0$) e che la soluzione rimanga finita all'asse ($u_x(0) \neq \infty$) si ottiene

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} R^2, \quad u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (r^2 - R^2), \quad (7.14)$$

che dà un profilo parabolico di velocità in ogni sezione.

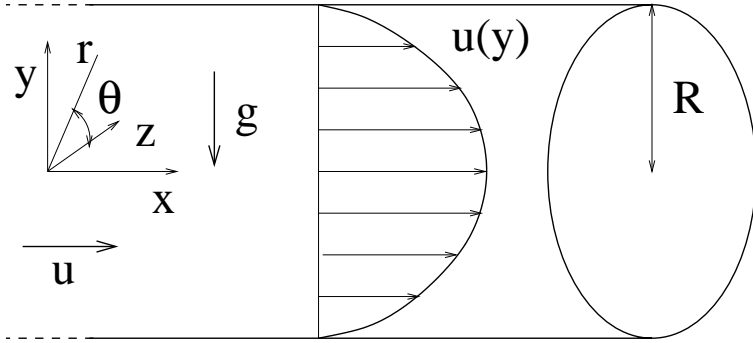


Figura 7.3: Flusso di Hagen-Poiseuille.

Dal profilo (7.14) si può calcolare la velocità massima che si ottiene all'asse ($r = 0$) con

$$(u_x)_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} R^2 \quad (7.15)$$

valendo le osservazioni fatte nei precedenti esempi circa il segno del gradiente di pressione. Per il calcolo della velocità media bisogna tenere in conto il fattore metrico r delle coordinate cilindriche da cui

$$\bar{u}_x = \frac{1}{S} \int_0^S u_x(r) dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_x(r) r dr d\theta = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} R^2 = \frac{(u_x)_{\max}}{2}. \quad (7.16)$$

Da queste espressioni si può calcolare la portata in volume

$$Q = \overline{u_x} S = \int_0^S u_x(r) dS = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.17)$$

noto il gradiente di pressione $\partial p/\partial x = \Delta p/l$.

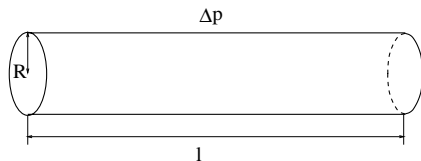
Questa semplice soluzione rimane valida per valori del numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho \overline{u_x} 2R}{\mu} \simeq 2100, \quad (7.18)$$

mentre per valori maggiori si ha l'insorgere di un flusso transizionale e quindi della turbolenza. Questo valore di soglia è stato determinato per la prima volta da O. Reynolds in un famoso esperimento del 1883 nel quale oltre ad osservare la dinamica transizionale del flusso all'interno di un tubo è stato anche dimostrato che i parametri del flusso non intervenivano separatamente ma come un gruppo adimensionale $Re = \rho \overline{u_x} 2R/\mu$.

ESEMPIO

i Dato un tubo cilindrico di raggio R e lunghezza l sia applicata alle estremità del tubo una differenza di pressione Δp . Se nel tubo fluisce acqua, determinare il massimo Δp applicabile per mantenere valida la soluzione di Hagen-Poiseuille. Quanto vale la portata in massa in tali condizioni?



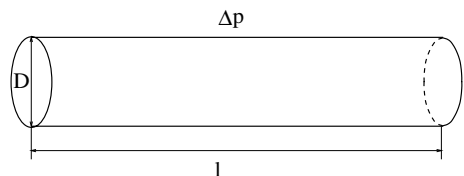
$$l = 3 \text{ m} \quad R = 0.5 \text{ cm}$$

Soluzione

Dalle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes per il flusso in un tubo cilindrico si sa che vale la soluzione laminare per numeri di Reynolds $Re = \overline{V} 2R/\nu \leq 2100 = Re_C$. \overline{V} è la velocità media nella sezione del tubo e vale $\overline{V} = R^2 \Delta p / (8\mu l)$. Combinando le varie relazioni si ricava $\Delta p = Re_C 4\mu l \nu / R^3 = 201.6 \text{ Pa}$. Per la portata in massa, basta calcolarla dalla definizione: $\dot{M} = \rho Q = \rho \overline{V} \pi R^2 = 1.65 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/s}$.

ESEMPIO

Dato il flusso in figura, calcolare la velocità massima e la risultante delle forze viscose. Verificare a posteriori se è valida l'ipotesi di flusso laminare.



$$\begin{aligned} d &= 1 \text{ cm} & l &= 3 \text{ m} \\ \Delta p &= 12000 \text{ Pa} & \nu &= 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{s} \\ \rho &= 850 \text{ Kg/m}^3 & & \text{fluido: olio.} \end{aligned}$$

Soluzione

Dalle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes si ha che il profilo di velocità per un tubo cilindrico è dato da

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - R^2).$$

La velocità massima si ha quindi per $r = 0$ ottenendo $u_{\max} = \Delta p R^2 / (4l\nu\rho) = 2.94 \text{ m/s}$.

La risultante delle forze viscose si ottiene integrando lo sforzo di parete $\tau_w = \mu(du/dr)_{r=R} = R(dp/dz)/2$ sul mantello cilindrico del tubo $F = \int_S \tau_w dS = 2\pi Rl\tau_w = \pi R^2 \Delta p = 0.9424 \text{ N}$.

Per verificare la laminarità del flusso bisogna valutare il numero di Reynolds $Re = \bar{u}D/\nu = 1470 < 2100$; verificato!

Capitolo 8

* Flussi potenziali

In questo capitolo verranno studiati dei particolari flussi nei quali gli effetti della viscosità possono essere trascurati. I flussi potenziali (o correnti euleriane) sono stati storicamente di grande utilità in quanto possono essere ricondotti allo studio di equazioni lineari con la conseguente facilità di trattazione matematica. Con questa teoria è stato possibile ottenere le prime informazioni sul campo di moto intorno a corpi più o meno complessi anche se la teoria non era in grado di calcolare le forze esercitate dal flusso sul corpo.

Di seguito verranno riportati prima alcuni fondamenti della teoria e quindi degli esempi di flussi bidimensionali e tridimensionali.

8.1 teoria del potenziale

Ci sono molte situazioni in fluidodinamica in cui il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosi per un dato flusso è estremamente elevato; tale rapporto si misura con il numero di Reynolds definito come $Re = UL/\nu$ essendo rispettivamente U ed L una velocità ed una lunghezza caratteristiche del fenomeno e ν la viscosità cinematica del fluido. Quando questo parametro è molto grande, l'effetto dei termini viscosi è confinato ad un sottile strato di fluido in prossimità del corpo dove i gradienti di velocità sono estremamente elevati mentre il resto del flusso ha una dinamica indipendente dalla viscosità. In tale situazione si possono verificare essenzialmente due eventualità: la prima è che il flusso rimanga attaccato al corpo e quindi la regione in cui i termini viscosi sono rilevanti risulta molto piccola rispetto al campo esterno, la seconda è che il flusso si distacchi dal corpo e quindi la regione di flusso influenzata dalla viscosità si estende anche lontano dal corpo. In quest'ultimo caso la distinzione tra regione interna ed esterna (cioè tra zona potenziale e zona viscosa) diventa meno chiara ed inoltre le due estensioni sono confrontabili. Nel primo caso, al contrario, la zona potenziale è molto più estesa di quella viscosa e lo studio della prima può fornire informazioni utili sul flusso intorno al corpo.

Se effettivamente l'effetto della viscosità è trascurabile supponendo le eventuali forze di massa conservative ed il flusso barotropico (o incompressibile) si può applicare il teorema di Kelvin che ci dice che la circolazione Γ calcolata su qualunque linea materiale chiusa C non varia nel tempo. In particolare se inizialmente risulta $\omega = 0$ allora tale dovrà rimanere

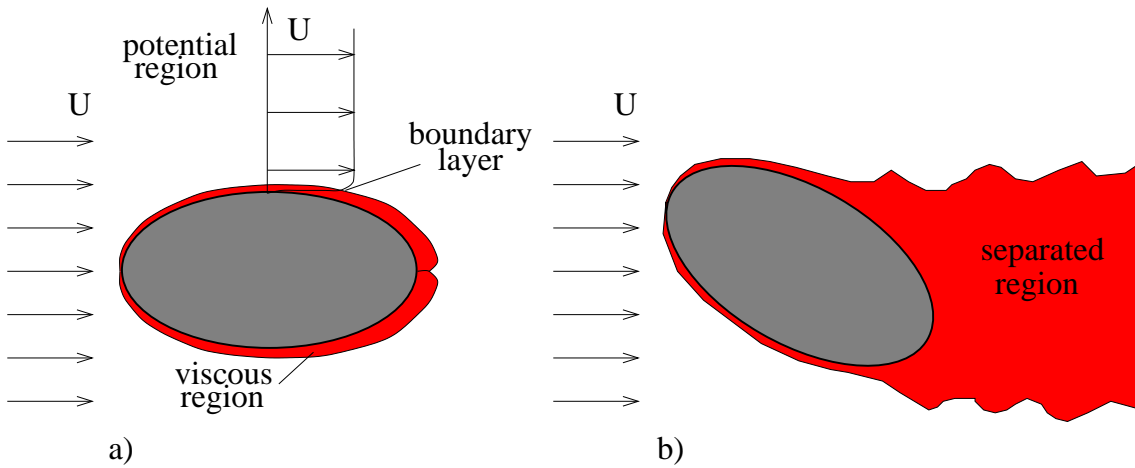


Figura 8.1: Flusso intorno ad un corpo: *a* flusso attaccato, *b* flusso separato. La zona indicata in rosso è la zona ‘viscosa’.

anche per tempi successivi in quanto se per assurdo venisse prodotta una vorticità diversa da zero, sarebbe possibile trovare un circuito materiale C' che la contiene ottenendo $\Gamma \neq 0$. Ma essendo inizialmente $\boldsymbol{\omega} = 0$ ovunque la circolazione calcolata sulla stessa linea materiale C' al tempo $t = 0$ avrebbe dato $\Gamma = 0$ e ciò è contro il teorema di Kelvin. Da ciò si deduce che nelle ipotesi del teorema di Kelvin, un flusso inizialmente irrotazionale rimane tale indefinitamente.

Essendo $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0$, è allora possibile definire una funzione potenziale ϕ tale che $\mathbf{u} = \nabla \phi$ in quanto risulta identicamente $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$. Se in aggiunta si considera per semplicità il flusso incomprimibile, allora l'equazione di conservazione della massa si scrive $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, che, combinata con la definizione di potenziale fornisce:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (8.1)$$

Questa equazione deve essere completata con le condizioni al contorno che sono

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \text{ sul corpo e } \phi = \phi_\infty \text{ all}'\infty, \quad (8.2)$$

essendo la prima la condizione di impermeabilità con \mathbf{n} la normale alla superficie del corpo e \mathbf{v} la velocità del corpo e la seconda la condizione di congruenza del potenziale con la corrente indisturbata.

Con queste condizioni è possibile risolvere l'equazione (8.1) che fornisce la funzione potenziale ϕ in tutto lo spazio. Una volta noto ϕ si può calcolare \mathbf{u} e quindi dall'equazione di Bernoulli, che per un flusso irrotazionale si scrive $\mathbf{u}^2/2 + G + p/\rho = \text{const.}$, si può calcolare la pressione ¹.

Il vantaggio principale di questa formulazione è che la soluzione del flusso potenziale richiede l'equazione differenziale (8.1) da cui si ricava il potenziale (e quindi la velocità)

¹Facciamo notare che come anticipato nel capitolo 5 per i flussi potenziali si può rilassare nell'equazione di Bernoulli l'ipotesi di flusso stazionario. Risultando infatti $\mathbf{u} = \nabla \phi$ risulta $\partial \mathbf{u} / \partial t = \nabla (\partial \phi / \partial t)$ e

e la soluzione dell'equazione di Bernoulli per il calcolo della pressione. La prima equazione è lineare e, valendo il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile adottare tutte le procedure di soluzione per serie note dall'analisi matematica e la costruzione di soluzioni complesse mediante addizione di più soluzioni semplici. L'equazione per la pressione è invece non lineare, ma la non linearità è di tipo algebrico e quindi non presenta particolari difficoltà. A titolo di confronto, volendo risolvere lo stesso problema con le equazioni di Navier–Stokes per flussi incomprimibili bisognerebbe risolvere un'equazione differenziale non lineare vettoriale (tre equazioni scalari) più la conservazione della massa che è differenziale lineare.

Chiaramente tanta semplicità nella trattazione ha il prezzo di non poter calcolare le forze esercitate dal flusso sul corpo (paradosso di d'Alembert); esempi di tale paradosso verranno dati attraverso lo studio di flussi particolari.

8.2 soluzioni tridimensionali

8.2.1 sorgente e pozzo

Consideriamo un punto nello spazio in cui sia localizzata una sorgente di massa, la cui portata in volume sia Q ; in assenza di forze esterne o altre correnti questa massa dovrà distribuirsi equamente in tutte le direzioni, generando una velocità radiale u_r uniforme in un sistema di coordinate sferiche con origine nella sorgente (figura 8.2). Per la conservazione della massa dovrà risultare $Q = \int_S u_r dS$ che, essendo la velocità uniforme, diventa

$$Q = u_r 4\pi r^2, \quad \implies \quad u_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (8.4)$$

e per integrazione si ottiene la funzione potenziale

$$\phi(r) = -\frac{Q}{4\pi r} + c = -\frac{m}{r} + c \quad (8.5)$$

avendo posto $m = Q/(4\pi)$ come intensità della sorgente. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto in modo identico per un pozzo giungendo a delle relazioni uguali alle precedenti. Tutta la trattazione può essere quindi unificata utilizzando la (8.5) sia per la sorgente che per il pozzo risultando nel primo caso $m > 0$ mentre nel secondo $m < 0$. Per affermare che la (8.5) sia effettivamente una funzione potenziale bisogna dimostrare che soddisfi l'equazione $\nabla^2 \phi = 0$; ciò si ottiene facilmente notando che ϕ dipende solo dalla coordinata radiale e scrivendo quindi il laplaciano in coordinate sferiche risulta

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m}{r} \right) \equiv 0, \quad (8.6)$$

l'equazione (5.16), essendo $\omega \equiv 0$ diventa:

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{const.} \quad (8.3)$$

che dimostra la tesi. Come facile esercizio si può vedere che lo stesso risultato si ottiene utilizzando un sistema di assi Cartesiani.

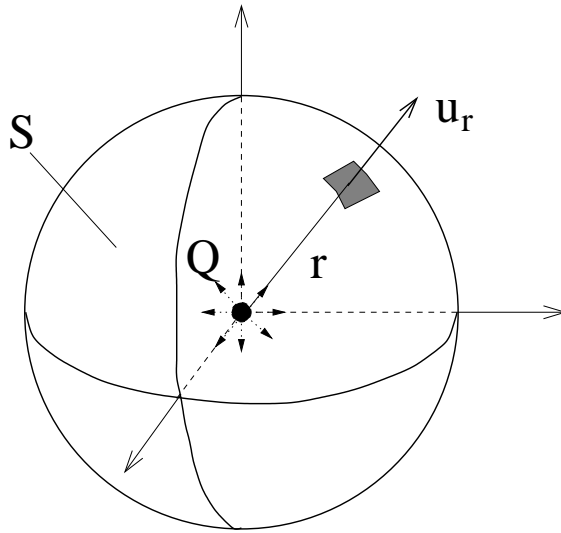


Figura 8.2: Schema di flusso generato da un sorgente in tre dimensioni.

8.2.2 doppietta

Si supponga ora di avere una sorgente ed un pozzo di uguale intensità m posti ad una distanza Δ lungo l'asse delle x e sia A un punto qualunque nello spazio. Per la proprietà additiva il potenziale in A sarà

$$\phi = \phi_S + \phi_P = -\frac{m}{r_S} + \frac{m}{r_P} = m \frac{r_S - r_P}{r_S r_P} = m \frac{r_S^2 - r_P^2}{r_S r_P (r_S + r_P)}, \quad (8.7)$$

avendo posto $c = 0$.

Se il sistema di riferimento è scelto in modo che l'origine coincida con la sorgente allora risulta $r_S^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ed $r_P^2 = (x - \Delta)^2 + y^2 + z^2$ da cui $r_S^2 - r_P^2 = -\Delta^2 + 2\Delta x$. Supponiamo ora di far tendere a zero la distanza Δ facendo crescere progressivamente m in modo che il prodotto $m\Delta = k$ rimanga costante, in tal caso si ottiene

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-k\Delta + 2kx}{r_S r_P (r_S + r_P)} = \frac{kx}{r^3}, \quad (8.8)$$

in quanto per $\Delta \rightarrow 0$ $r_S = r_P = r$.

Ci poniamo di nuovo la domanda se la soluzione trovata in (8.8) è soluzione dell'equazione del potenziale; la risposta è sì in quanto $\partial(-k/r)/\partial x = kx/r^3$ e $-k/r$ è soluzione dell'equazione. Si può allora scrivere

$$\nabla^2 \frac{kx}{r^3} = \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{-k}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \frac{-k}{r} \equiv 0. \quad (8.9)$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire ricordando dall'analisi matematica che la derivata di una funzione armonica è ancora una funzione armonica, se quindi il potenziale della sorgente è soluzione dell'equazione di Laplace, lo deve essere anche quello della doppietta.

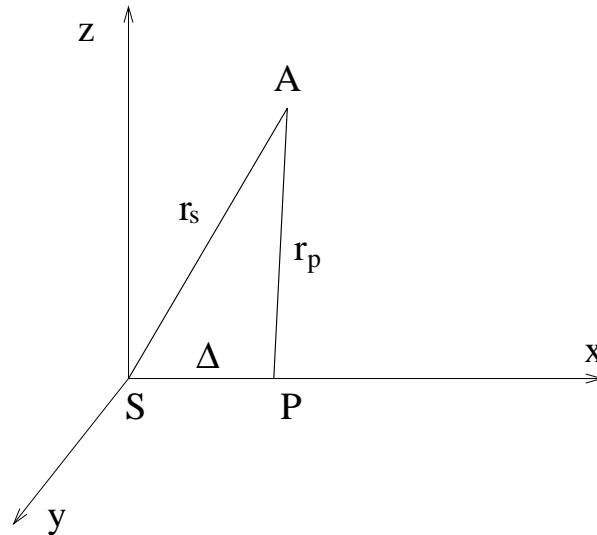


Figura 8.3: Doppietta in tre dimensioni.

8.3 sovrapposizione di soluzioni tridimensionali

Come abbiamo detto in precedenza, uno dei vantaggi fondamentali della teoria potenziale è che l'equazione (8.1) è lineare quindi se ϕ_1 e ϕ_2 sono soluzioni della (8.1) dovrà necessariamente risultarlo anche $\phi = \phi_1 + \phi_2$. In questo modo si riescono a costruire delle soluzioni intorno a corpi di forma relativamente complicata partendo dalle soluzioni elementari precedentemente esposte. Nel seguito di questa sezione verranno mostrati alcuni esempi classici, indicando la modalità per costruire soluzioni più complesse.

8.3.1 il semicorpo

Osserviamo preliminarmente che una corrente uniforme con velocità U diretta nella direzione positiva dell'asse delle x avrà un potenziale $\phi_U = Ux$ e questa soluzione soddisfa l'equazione (8.1).

In questo esempio viene considerata una corrente uniforme orientata nella direzione positiva dell'asse delle x ed una sorgente posta nell'origine di un sistema di assi. Il potenziale per questa configurazione è

$$\phi = Ux - \frac{m}{r}, \quad (8.10)$$

da cui si ottiene per le velocità

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U + \frac{mx}{r^3}, \quad \text{e} \quad u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{my}{r^3}. \quad (8.11)$$

Da queste espressioni si vede che il campo di velocità è simmetrico rispetto all'asse x per cui basta studiare il flusso nel semipiano meridiano x - y con $y \geq 0$. Se nella prima delle (8.11) si annulla la u_x si trova un punto di ristagno in $x = -a = -\sqrt{m/U}$ da cui si scrive

$$u_x = U \left(1 + \frac{a^2 x}{r^3} \right) \quad \text{e} \quad u_y = U \frac{a^2 y}{r^3}. \quad (8.12)$$

Da queste espressioni si deduce che all'approssimarsi della corrente al corpo questa viene frenata e le linee di corrente si allargano. Per calcolare quale sia la forma del corpo, basta verificare la condizione di equilibrio tra le portate in volume della corrente traslazionale e della sorgente.

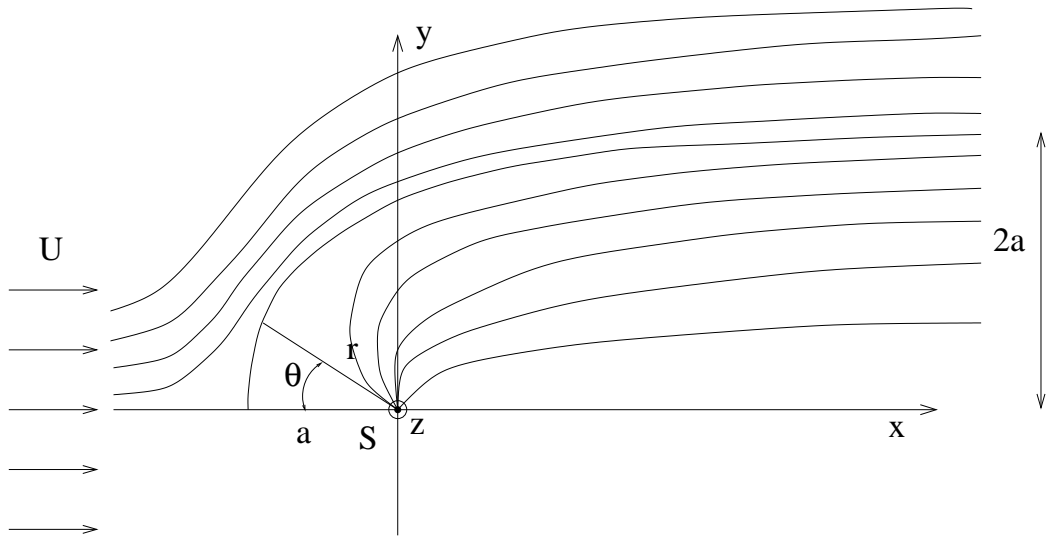


Figura 8.4: Semicorpo potenziale tridimensionale.

La portata totale della sorgente è $Q_T = 4\pi m$ distribuita uniformemente su tutto l'angolo solido per cui una frazione di angolo solido Ω smaltirà la portata $Q/Q_T = \Omega/4\pi$. Dato allora un cono di semiapertura θ si ha

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta, \implies \Omega = \int_0^\theta 2\pi \sin\theta d\theta = 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (8.13)$$

da cui si ottiene $Q = 2\pi m(1 - \cos\theta)$. Se invece consideriamo la portata dovuta al flusso traslazionale si otterrà in generale $Q = \pi y^2 U$ e le due portate saranno uguali quando $y^2 U = 2a^2 U(1 - \cos\theta)$

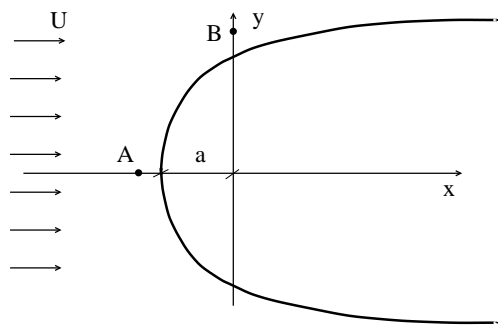
$$y = a\sqrt{2(1 - \cos\theta)} \quad \text{e} \quad x = -y \cotg\theta. \quad (8.14)$$

Per $\theta = 0$, si ottiene $y = 0$ mentre la x assume una forma indeterminata $0 \cdot \infty$; tuttavia sostituendo la prima delle (8.14) nella seconda ed utilizzando elementari trasformazioni trigonometriche si ottiene $x = -\sqrt{2}a \cos \theta / \sqrt{1 + \cos \theta}$ che tende effettivamente a $-a$ per $\theta \rightarrow 0$. Notiamo inoltre che per $\theta \rightarrow \pi$, $x \rightarrow \infty$ ed $y \rightarrow 2a$ da cui si vede che il corpo rimane aperto. Alla stessa conclusione si poteva giungere osservando che all'infinito tutta la portata della sorgente deve essere smaltita con una velocità $u_x = U$ quindi $4\pi m = \pi y^2 U \Rightarrow y = 2a$.

Si ha in generale che se la somma delle intensità di sorgenti e pozzi non è nulla il corpo deve necessariamente rimanere aperto in quanto tutta la portata immessa dalle sorgenti non viene bilanciata da quella riassorbita dai pozzi.

ESEMPIO

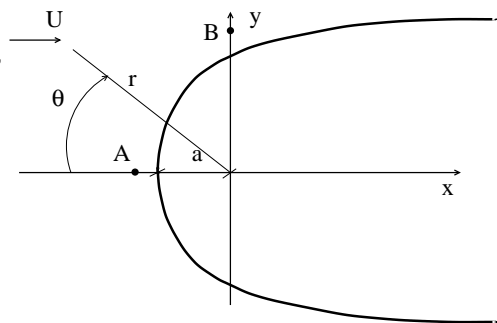
Il semicorpo *tridimensionale* in figura è investito da una corrente uniforme d'acqua U nella direzione x . Sapendo che la pressione nel punto A è P_A calcolare il valore della pressione nel punto B .



$U = 10 \text{ m/s}$ $p_A = 175870 \text{ Pa}$
 $B = (0, 3)$, $A = (-2, 0)$ $|a| = 1.5 \text{ m}$
 Coordinate Cartesianhe
 espresse in metri.

Soluzione

Il potenziale del semicorpo tridimensionale è dato da $\phi = -Ur \cos \theta - m/r + c$ (per il sistema di riferimento polare in figura). Risulta inoltre $a = \sqrt{(m/U)}$ da cui si ricava $m = 22.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Per le componenti di velocità sappiamo che $u_r = \partial\phi/\partial r = -U \cos \theta + m/r^2$ ed $u_\theta = \partial\phi/\partial\theta = U \sin \theta$ da cui essendo $A = (r = 2, \theta = 0)$ e $B = (r = 3, \theta = \pi/2)$ si ottiene $u_A = (-4.375, 0)$, $u_B = (2.5, 10)$ e quindi $|u_A|^2 = 16.14$ ed $|u_B|^2 = 106.25$ (velocità in m/s). Applicando infine, l'equazione di Bernoulli tra i punti A e B si può scrivere: $p_B = p_A + \rho[(u_A^2 - u_B^2)/2 + g(h_A - h_B)] = 102995 \text{ Pa}$.



8.3.2 la sfera

Vogliamo ora vedere quale flusso possiamo ottenere dalla sovrapposizione di una corrente uniforme e di una doppietta nell'origine degli assi il cui potenziale ϕ_D è dato dalla relazione (8.8).

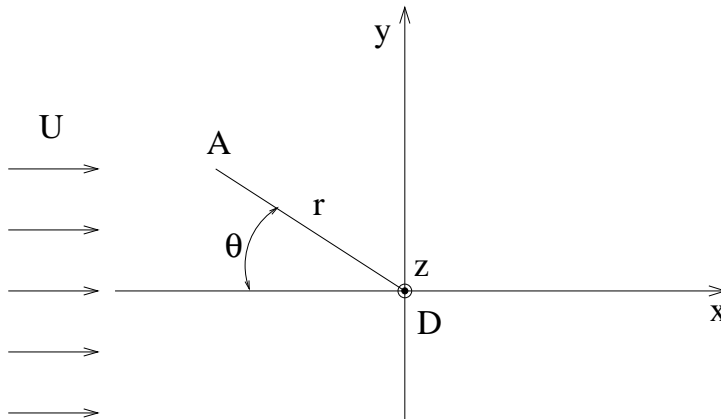


Figura 8.5: Sezione meridiana della sovrapposizione di una corrente uniforme ed una doppietta nell'origine.

Per il potenziale totale si può quindi scrivere

$$\phi = Ux + \frac{kx}{r^3} \quad (8.15)$$

da cui si osserva che, essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ questo potenziale è simmetrico sia rispetto all'asse y che all'asse z (ciò si osserva sostituendo y a $-y$ e z a $-z$), ossia il flusso è assialsimmetrico rispetto ad x . Questa circostanza suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate sferiche come in figura 8.5 da cui si ha $x = -r \cos \theta$ e quindi

$$\phi = - \left(rU + \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (8.16)$$

Per il calcolo delle velocità radiale ed azimutale possiamo scrivere

$$u_r = \nabla \phi \cdot \hat{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(-U + \frac{2k}{r^3} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = \nabla \phi \cdot \hat{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \left(U + \frac{k}{r^3} \right) \sin \theta. \quad (8.17)$$

Da queste espressioni si vede che la velocità radiale è sempre nulla sulla superficie descritta da

$$\frac{2k}{r^3} = U, \quad \text{ossia } r = \left(\frac{2k}{U} \right)^{\frac{1}{3}} = R, \quad (8.18)$$

che è una sfera con centro nella doppietta e raggio dato dalla (8.18).

Sostituendo il valore di R trovato nella seconda delle (8.17) si ottiene il profilo di velocità azimutale sulla superficie della sfera stessa

$$u_\theta = \left(-U + \frac{kU}{2k} \right) \sin \theta = \frac{3}{2}U \sin \theta, \quad (8.19)$$

che quindi assume il valore massimo per $\theta = \pi/2$ $u(\theta) = 3U/2$ ed il minimo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ con $u(\theta) = 0$.

Per la distribuzione di pressione si utilizza l'equazione di Bernoulli scritta tra un punto all' ∞ nella corrente indisturbata e l'altro sulla superficie della sfera

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} + gh_\infty = \frac{u(\theta)^2}{2} + \frac{p(\theta)}{\rho} + gh(\theta), \quad (8.20)$$

da cui, trascurando le variazioni di quota si ottiene per il coefficiente di pressione

$$C_p = \frac{p(\theta) - p_\infty}{\rho U^2/2} = 1 - \frac{u(\theta)^2}{U^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta. \quad (8.21)$$

Da questa relazione si vede che la pressione massima si ha per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ con $C_p = 1$ (punti di ristagno) mentre la minima è nel punto $\theta = \pi/2$ dove vale $C_p = -5/4$. Nei punti in cui $\sin \theta = 2/3$ ($\theta \simeq 42^\circ$ e $\theta \simeq 138^\circ$) si ha $C_p = 0$ ed $u(\theta) = U$.

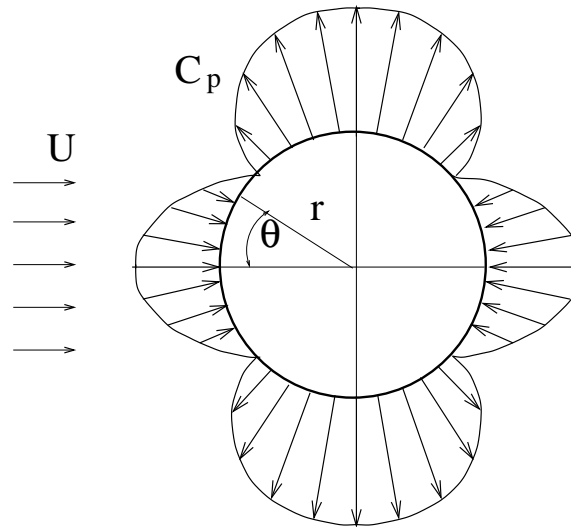


Figura 8.6: Distribuzione del coefficiente di pressione sulla superficie della sfera (flusso potenziale).

Gli andamenti descritti sono riportati nelle figure 8.6 e 8.7 da cui risulta evidente la simmetria del coefficiente di pressione tra la parte frontale e la parte posteriore della sfera. Questo significa che partendo dal punto di ristagno anteriore ($\theta = 0$) dove la velocità è zero e tutta l'energia cinetica è stata convertita in pressione, il flusso accelera costantemente

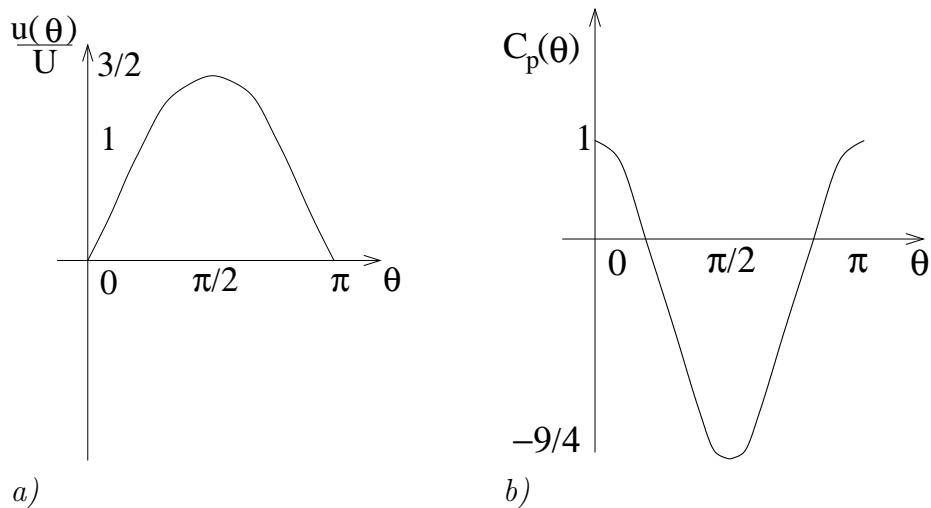


Figura 8.7: Diagrammi della distribuzione di velocità e coefficiente di pressione sulla superficie di una sfera. In figura è riportata solo la metà superiore, la metà inferiore si ottiene per riflessione.

fino al punto $\theta = \pi/2$ in cui si ha il massimo della velocità ed il minimo di pressione. Appena superato il punto $\theta = \pi/2$ il flusso ricomincia a decelerare ed aumentare la sua pressione e nel punto di ristagno posteriore su ha una situazione speculare rispetto al quello anteriore.

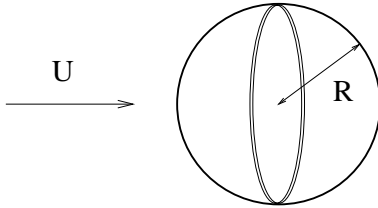
Mancando l'effetto dei termini viscosi, le uniche azioni che il fluido può esercitare sul corpo sono quelle normali di pressione che in questa configurazione hanno risultante nulla per tutte le componenti.

Questo è un caso particolare del paradosso di d'Alembert che si dimostra per corpi di forma qualunque in condizioni di flusso incomprimibile e stazionario.

Si vedrà nei capitoli successivi che questo flusso è ideale e nella pratica non si realizza. Infatti le azioni viscosive del flusso alla parete trasformano in modo irreversibile parte dell'energia cinetica in calore e nella zona a valle del punto $\theta = \pi/2$ il flusso non riesce a far aumentare la pressione fino al valore che aveva in $\theta = 0$. Ciò provoca uno sbilanciamento della distribuzione di pressione e quindi una resistenza.

ESEMPIO

Una sfera di raggio R è investita da una corrente d'acqua a velocità costante U e pressione della corrente indisturbata p_∞ . Sapendo che la sfera è composta da due gusci poggiati come in figura ed utilizzando la teoria potenziale, calcolare la forza con cui la semisfera di sinistra spinge su quella di destra.



$$R = 0.3 \text{ m} \quad U = 7 \text{ m/s} \quad p_\infty = 101300 \text{ Pa}$$

Soluzione

Dalla formula per il coefficiente di pressione per una sfera $c_p = 1 - (9/4)\sin^2\theta$ si ricava la forza di pressione nella direzione x

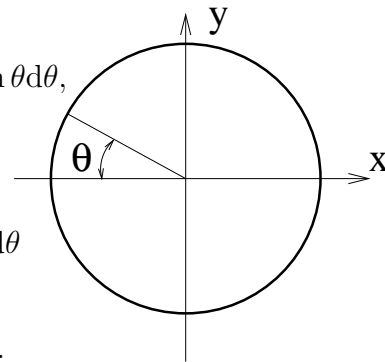
$$dF_x = -p\hat{x}\mathbf{nd}S = \left(\frac{1}{2}\rho U^2 c_p + p_\infty\right) \cos\theta 2\pi R^2 \sin\theta d\theta,$$

da cui per la forza sulla semisfera si ha

$$F_x = \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) \pi R^2 d\theta$$

$$F_x = \pi R^2 \left(p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2\right) - \frac{9\rho U^2 \pi R^2}{16} = 27776 \text{ N.}$$

Se si assume che la pressione all'interno della sfera è p_∞ allora risulta $F_x = -\pi R^2 \rho U^2 / 16 = -865 \text{ N}$.

**8.4 soluzioni bidimensionali**

Seguendo dei ragionamenti del tutto analoghi a quelli precedentemente riportati per uno spazio a tre dimensioni, si trovano le soluzioni potenziali in due dimensioni. Nel seguito ne verranno riportate alcune a titolo di esempio con dei flussi di interesse pratico ottenuti dalla loro sovrapposizione.

8.4.1 sorgente e pozzo

Si supponga di avere una sorgente di massa puntiforme da cui esce una portata volumetrica Q in uno spazio piano. La portata attraverso la circonferenza con centro nella sorgente e raggio r sarà $Q = 2\pi r u_r$ da cui $u_r = Q/(2\pi r)$. D'altra parte essendo $u_r = \partial\phi/\partial r$ si può

ottenere per integrazione il potenziale

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + c = m \ln r + c, \quad (8.22)$$

con la costante c che può essere fissata arbitrariamente in quanto nella determinazione delle velocità entrano solo i gradienti del potenziale.

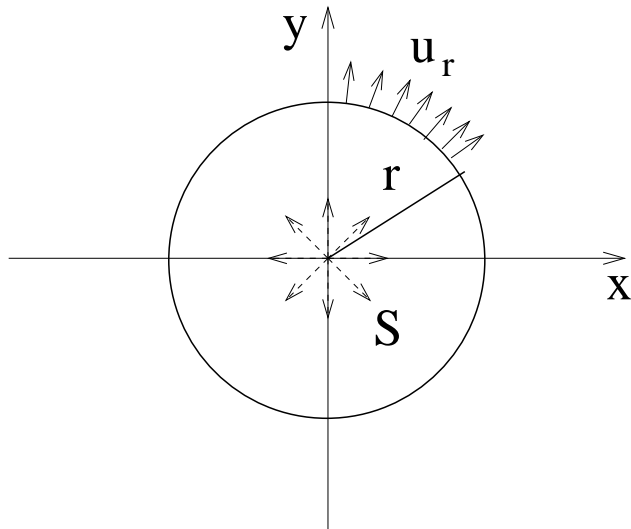


Figura 8.8: Sorgente bidimensionale.

Naturalmente se la portata Q è negativa allora si avrà un pozzo il cui potenziale sarà $\phi = -m \ln r + c$.

8.4.2 doppietta

Data una sorgente ed un pozzo aventi la stessa intensità m e disposti come in figura 8.9 si ha per il potenziale nel generico punto A

$$\phi = m \ln r_S - m \ln r_P + c \quad (8.23)$$

essendo $r_S = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $r_P = \sqrt{(x - \Delta)^2 + y^2}$. Ponendo senza perdita di generalità $c = 0$, con queste espressioni si può scrivere

$$\phi = m \ln \frac{r_S}{r_P} = m \ln \left(1 + \frac{r_S - r_P}{r_P} \right) = m \ln \left(1 + \frac{r_S^2 - r_P^2}{r_P(r_S + r_P)} \right). \quad (8.24)$$

Assumendo che Δ sia un parametro piccolo e ricordando che $\ln(1 + x) \simeq x + \mathcal{O}(x^2)$ la (8.24) si scrive

$$\phi \simeq \frac{m\Delta(2x - \Delta)}{r_P(r_S + r_P)}; \quad (8.25)$$

se ora si fa il limite per $\Delta \rightarrow 0$ mantenendo costante il prodotto $k = m\Delta$ (intensità di doppietta) si ha che $r_P \rightarrow r_S \rightarrow r$ e per il potenziale si ottiene

$$\phi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{m\Delta(2x - \Delta)}{r_P(r_S + r_P)} = \frac{kx}{r^2}, \quad (8.26)$$

che è il potenziale cercato.

Con un calcolo diretto si può agevolmente verificare che l'espressione (8.26) soddisfa l'equazione del potenziale.

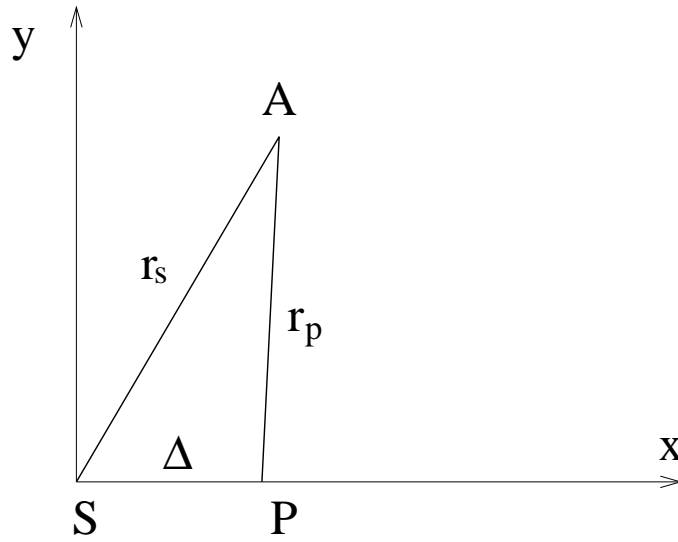


Figura 8.9: Doppietta bidimensionale.

8.4.3 vortice libero

Immaginiamo di avere una vorticità ω distribuita uniformemente all'interno di una circonferenza di raggio R , questa avrà una circolazione $\Gamma = \omega\pi R^2$. Se ora si fa tendere a zero il raggio R della circonferenza, aumentando contemporaneamente l'intensità della vorticità in modo che la circolazione Γ rimanga costante, si ottiene una singolarità nella vorticità di circolazione finita (figura 8.10a). Per calcolare il potenziale di questo flusso basta osservare che in base al teorema di Stokes la circolazione Γ può essere calcolata mediante la circuitazione della velocità lungo un qualunque percorso chiuso contenente la singolarità. Se in particolare si sceglie una circonferenza con centro nella singolarità e raggio r si ha:

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta, \implies u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (8.27)$$

da cui essendo

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \implies \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + c. \quad (8.28)$$

Questa soluzione essendo lineare in θ è sicuramente soluzione dell'equazione di Laplace ed è quindi il potenziale cercato. Le linee equipotenziale sono delle rette uscenti dall'origine e la velocità indotta è puramente tangenziale (velocità azimutale) (figura 8.10b).

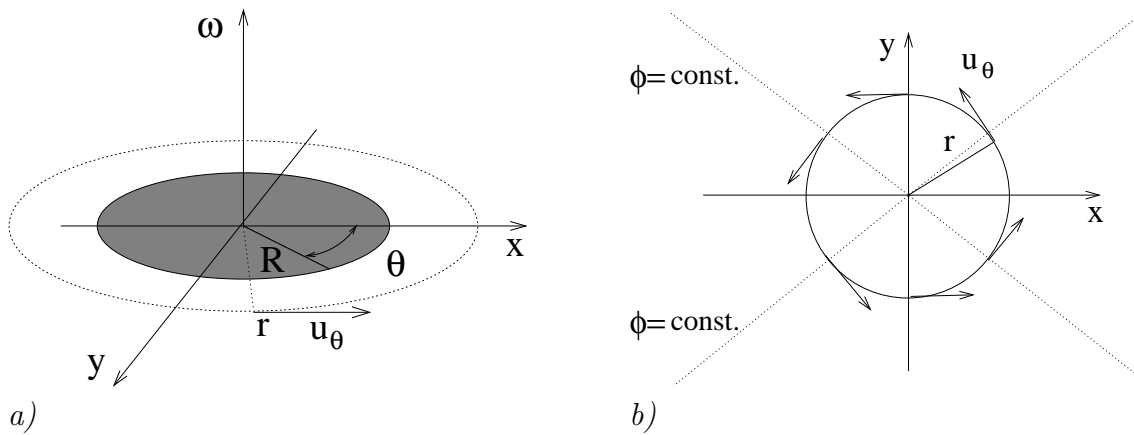


Figura 8.10: a) Singolarità di vortice libero. b) Velocità tangenziale indotta e linee equipotenziali.

ESEMPIO

Nei punti S, P, D vengono posti, rispettivamente, una sorgente di intensità m_S , un pozzo di intensità m_P ed una doppietta di intensità k (quest'ultima allineata con l'asse x). Calcolare la differenza di pressione tra i punti A e B. Il corpo risultante dalla sovrapposizione delle 3 soluzioni assegnate è aperto o chiuso?

$$m_S = 0.3 \text{ m}^2/\text{s} \quad m_P = 0.3 \text{ m}^2/\text{s} \quad k = 0.5 \text{ m}^3/\text{s} \quad A = (0, 0)$$

$$S = (-1, -1) \quad B = (1, 2) \quad D = (3, 0) \quad B = (1, 1)$$

Coordinate in metri, flusso bidimensionale, fluido:acqua (trascurare la gravità).

Soluzione

L'espressione del potenziale è $\Phi = m(\ln r_S - \ln r_P) + k(x - x_D)/r_D^2$ con $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, $i = S, D, P$. Per derivazione da queste espressioni si ottiene:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = m \left[\frac{x+1}{(x+1)^2 + (y+1)^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right] + k \frac{y^2 - (x-3)^2}{[(x-3)^2 + y^2]^2},$$

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = m \left[\frac{y+1}{(x+1)^2 + (y+1)^2} - \frac{y-2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right] - k \frac{2y(x-3)}{[(x-3)^2 + y^2]^2}.$$

Sostituendo ad x ed y i valori delle coordinate in A e B si ottiene $u_A^2 = 0.0967 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ed $u_B^2 = 0.20725 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Applicando quindi l'equazione di Bernoulli si ha $p_A - p_B = \rho(u_B^2 - u_A^2)/2 = 55.255 \text{ Pa}$.

8.5 sovrapposizione di soluzioni bidimensionali

8.5.1 il semicorpo

Seguendo l'esempio riportato in §8.3.1, ma utilizzando le soluzioni singolari bidimensionali, sovrapponiamo una corrente uniforme nella direzione positiva dell'asse delle x con una sorgente posta nell'origine degli assi (figura 8.11). Abbiamo immediatamente per il potenziale

$$\phi = Ux + m \ln r, \quad \text{o} \quad \phi = -Ur \cos \theta + m \ln r, \quad (8.29)$$

in un sistema di riferimento polare. Noto il potenziale si possono calcolare immediatamente le velocità

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \cos \theta + \frac{m}{r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta. \quad (8.30)$$

Da queste espressioni si nota che sull'asse x ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) risulta $u_\theta \equiv 0$ e gli eventuali punti in cui risultasse $u_r = 0$ ci darebbero dei punti di ristagno. Dalla prima delle (8.30) si vede che la condizione $u_r = 0$ non è mai verificata per $\theta = \pi$ mentre per $\theta = 0$ si ha un punto di ristagno per $r = m/U = a$ ($x = -m/U$). Per calcolare il contorno del corpo si procede in modo del tutto analogo al caso tridimensionale, si bilancia cioè la portata proveniente dalla corrente uniforme e quella uscente dalla sorgente su una generica linea ortogonale all'asse x . Le due portate saranno in equilibrio quando

$$Uy = 2\pi m \frac{\theta}{2\pi} \quad (8.31)$$

da cui, utilizzando la definizione di a , si ottiene per x ed y

$$y = a\theta \quad \text{e} \quad x = y \cotg \theta. \quad (8.32)$$

Essendo la sorgente nell'origine l'unica sorgente di massa (che non è bilanciata da alcun pozzo) ci aspettiamo che il corpo trovato debba rimanere aperto. Si ha infatti che per $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \pi a$ ossia all'infinito tutta la portata della sorgente deve essere smaltita con una velocità $u_x = U$ quindi $2\pi m = 2yU \implies y = \pi a$.

Analogamente al caso tridimensionale per $\theta \rightarrow 0$ si ottiene una forma indeterminata per la x ; tuttavia sostituendo l'espressione per la y nella x si ottiene $x = -a \cos \theta \cdot \theta / \sin \theta$ che tende a $-a$ per $\theta \rightarrow 0$ (osservando che $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$).

8.5.2 il cilindro

Analogamente al caso tridimensionale, vogliamo ora sovrapporre una corrente uniforme di intensità U nella direzione positiva dell'asse delle x con una doppietta disposta come in §8.4.2.

Per il potenziale si può quindi scrivere

$$\phi = Ux + \frac{kx}{r^2}, \quad \text{oppure} \quad \phi = -\left(Ur + \frac{k}{r}\right) \cos \theta, \quad (8.33)$$

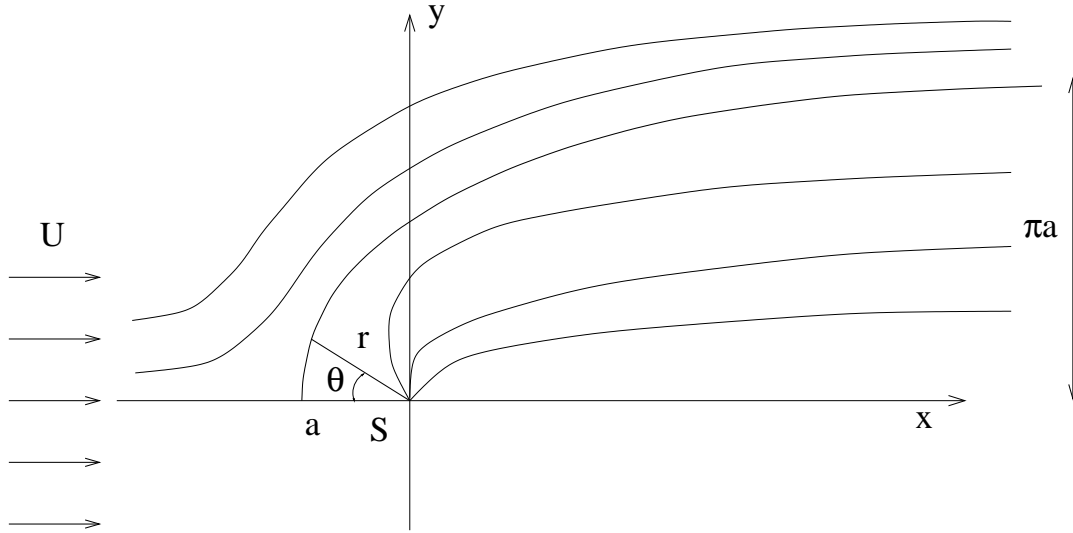


Figura 8.11: Semicorpo potenziale bidimensionale.

se si prende un sistema d'assi polari come in figura 8.13. Dall'espressione del potenziale si possono calcolare le componenti radiale ed azimutale della velocità ottenendo

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \left(U - \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \left(U + \frac{k}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (8.34)$$

Da queste espressioni si vede che la velocità radiale risulta identicamente nulla per il valore costante del raggio $R = \sqrt{k/U}$ per qualunque θ . Ciò significa che la circonferenza di raggio R si comporta come una superficie solida (impermeabile) nei confronti del flusso che quindi rappresenta il flusso intorno ad un cilindro.

Sulla superficie del cilindro il valore della velocità azimutale è

$$u_\theta = 2U \sin \theta \quad (8.35)$$

da cui si vede che ci sono due punti di ristagno a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. I punti in cui la velocità è massima sono a $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ dove $u_\theta = 2U$ ed infine la velocità vale U nei punti $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$ (ed i punti simmetrici rispetto all'asse x).

Applicando l'equazione di Bernoulli tra un punto all' ∞ nella corrente indisturbata e l'altro sul corpo possiamo calcolare il coefficiente di pressione sulla superficie del cilindro:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} + gh_\infty = \frac{u(\theta)^2}{2} + \frac{p(\theta)}{\rho} + gh(\theta), \quad (8.36)$$

da cui, trascurando le variazioni di quota si ottiene

$$C_p = \frac{p(\theta) - p_\infty}{\rho U^2 / 2} = 1 - \frac{u(\theta)^2}{U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (8.37)$$

Anche in questo caso si ha una simmetria della distribuzione di pressione sul corpo sia rispetto all'asse x che y con la conseguenza che tutti i coefficienti di forza risultano

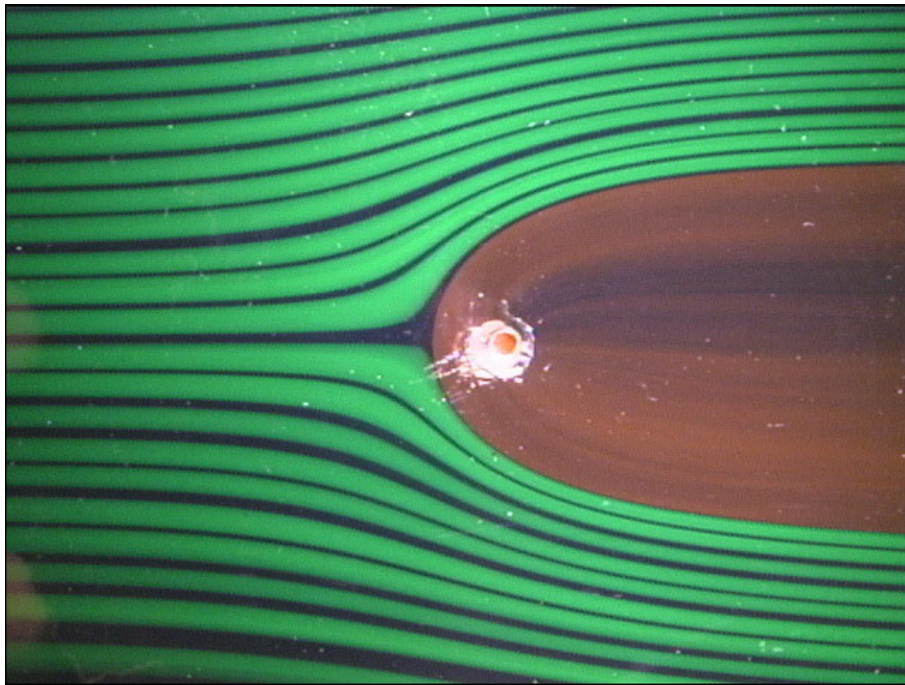


Figura 8.12: Visualizzazione sperimentale tramite l'analogia di Hele-Shaw delle linee di corrente nel flusso potenziale bidimensionale intorno ad un semicorpo.

nulli. Di nuovo ci troviamo di fronte ad un caso particolare del paradosso di d'Alembert che vale per corpi di forma qualunque nell'ipotesi di flusso potenziale.

Dal confronto con le espressioni analoghe per la sfera si osserva che in corrispondenza del punto $\theta = \pi/2$ si ha una velocità maggiore nel cilindro rispetto alla sfera e, conseguentemente, una maggiore diminuzione di pressione. Ciò si spiega facilmente osservando che a parità di diametro un cilindro crea un 'bloccaggio' del flusso maggiore di una sfera quindi, per la conservazione della massa, la velocità deve aumentare. Per esempio, se in un condotto a sezione rettangolare $l \times D$ viene posta una sfera di diametro D , la superficie a disposizione per il passaggio del flusso sarà $S_S = lD - \pi D^2/4$ mentre nel caso di un cilindro si ha $S_C = lD - D^2$ da cui risulta $S_S > S_C$ per $\pi D^2/4 < D^2$ che è sempre verificata.

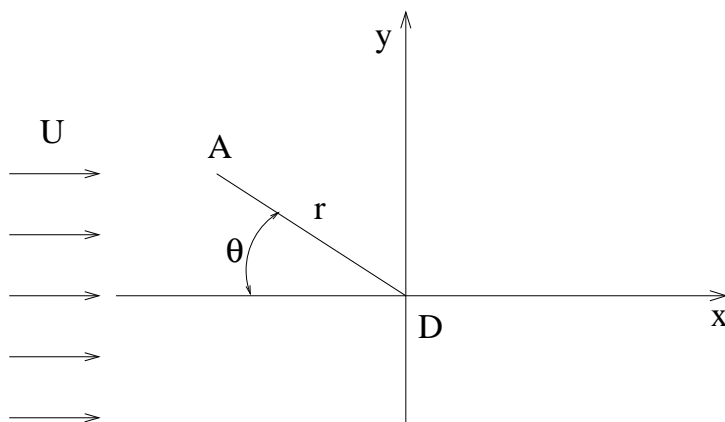
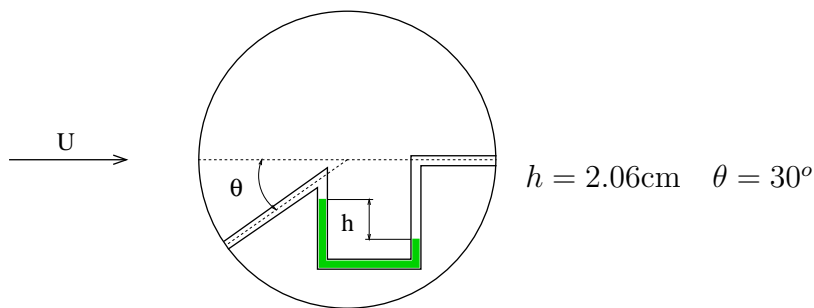


Figura 8.13: Sovrapposizione di una corrente uniforme ed una doppietta nell'origine (caso bidimensionale).

ESEMPIO

Lungo il perimetro di un cilindro sono praticati due fori a cui è collegato un manometro ad U come in figura. Se la differenza di quota tra i due menischi è h ed il fluido manometrico è alcool ($\rho_m = 780 \text{ Kg/m}^3$) calcolare la velocità della corrente d'aria che investe il cilindro. (Trascurare gli effetti viscosi).



Soluzione

Essendo gli effetti viscosi trascurabili il flusso intorno al cilindro sarà potenziale e per il coefficiente di pressione sulla sua superficie si ha $c_p = 2(p - p_\infty)/(\rho U^2)$. Per $\theta = 30^\circ$ risulta $c_p = 0$ mentre per $\theta = 180^\circ$ $c_p = 1$, di conseguenza $p(30^\circ) = p_\infty$ e $p(180^\circ) = p_\infty + \rho U^2/2$. Combinando questo risultato con la legge di Stevino si ottiene $\Delta p = p(180^\circ) - p(30^\circ) = \rho U^2/2 = \rho_m g h$ da cui si ricava $U = (2\rho_m g h / \rho)^{1/2} = 16 \text{ m/s}$.

8.5.3 il cilindro rotante

Come ultimo esempio di flusso bidimensionale potenziale vogliamo studiare il cilindro rotante che si ottiene sovrapponendo una corrente uniforme con una doppietta ed un vortice libero, entrambi posti nell'origine degli assi. La peculiarità di questo flusso è

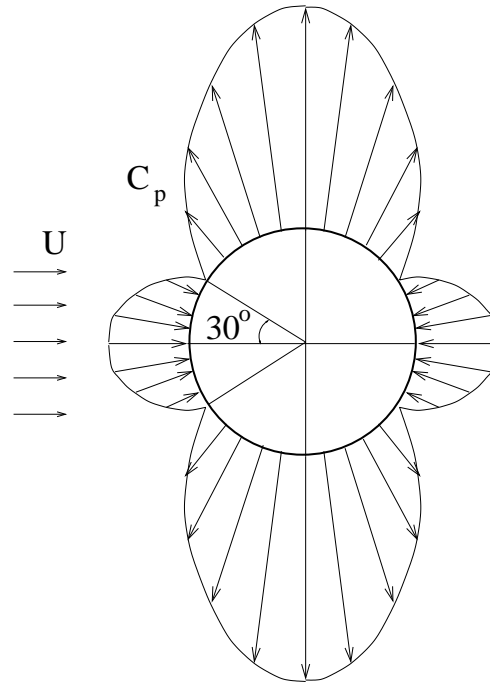


Figura 8.14: Distribuzione del coefficiente di pressione sulla superficie del cilindro (flusso potenziale).

dovuta al fatto che pur essendo potenziale riesce a generare una forza sul corpo diversa da zero; questa circostanza è dovuta ad una particolarità del flusso indotto dal vortice libero che verrà spiegata in dettaglio successivamente.

Aggiungendo il potenziale di vortice libero a quello del cilindro della sezione precedente si ottiene, rispettivamente, per il potenziale e le velocità:

$$\phi = - \left(Ur + \frac{k}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (8.38)$$

$$u_r = - \left(U - \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = \left(U + \frac{k}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (8.39)$$

Poiché la velocità radiale u_r è rimasta invariata rispetto al caso senza rotazione, il flusso sarà ancora quello intorno ad un cilindro di raggio $R = \sqrt{k/U}$. Al contrario, risulta mutata la velocità azimutale che sulla superficie del cilindro vale

$$u_\theta = 2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (8.40)$$

La prima conseguenza della rotazione è lo spostamento dei punti di ristagno avendo sulla superficie del cilindro $u_\theta = 0$ per

$$\sin \theta = - \frac{\Gamma}{4\pi RU} \quad \text{ossia} \quad \theta = - \sin^{-1} \left(\frac{\Gamma}{4\pi RU} \right), \quad (8.41)$$

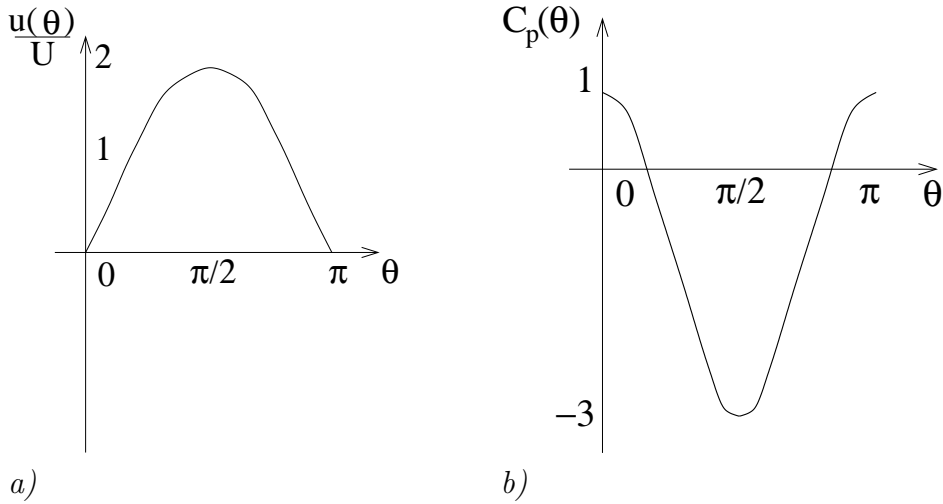


Figura 8.15: Diagrammi della distribuzione di velocità e coefficiente di pressione sulla superficie di un cilindro. In figura è riportata solo la metà superiore, la metà inferiore si ottiene per riflessione.

con la condizione che risulti $\Gamma/(4\pi RU) \leq 1$. Quando questo fattore è proprio uguale ad 1 i due punti di ristagno saranno coincidenti in un solo punto a $\theta = -\pi/2$ e $3\pi/2$ (per $\Gamma > 0$). Se infine risulta $\Gamma/(4\pi RU) > 1$ il punto di ristagno non sarà più sulla superficie del cilindro ma nel flusso sulla linea $\theta = -\pi/2$ (dove comunque $u_r = 0$) e per un valore del raggio r tale che

$$U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (8.42)$$

Uno schema delle tre situazioni è riportato in figura 8.17.

Non è superfluo notare che la circolazione si può determinare dalla velocità di rotazione Ω del cilindro come $\Gamma = 2\pi\Omega R^2$; tenendo fissa la velocità della corrente U e le dimensioni del cilindro R la posizione dei punti di ristagno può essere determinata semplicemente variando la velocità di rotazione del cilindro.

Dagli schemi di figura 8.17 è evidente che la rotazione del cilindro rompe la simmetria rispetto al diametro orizzontale e questa dissimmetria dovrà riflettersi anche nella pressione. Dall'equazione di Bernoulli si ottiene infatti:

$$p(\theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - 2\rho U^2 \sin^2 \theta - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 R^2} - \frac{\rho U \Gamma \sin \theta}{\pi R}, \quad (8.43)$$

in cui l'ultimo termine, avendo una dipendenza lineare in $\sin \theta$, riflette proprio la mancanza di simmetria.

Riferendoci alla figura 8.13, e ricordando che le forze di pressione hanno direzione opposta alla normale uscente, possiamo scrivere per le componenti della forza

$$F_x = \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta = 0, \quad F_y = \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta = \rho U \Gamma. \quad (8.44)$$

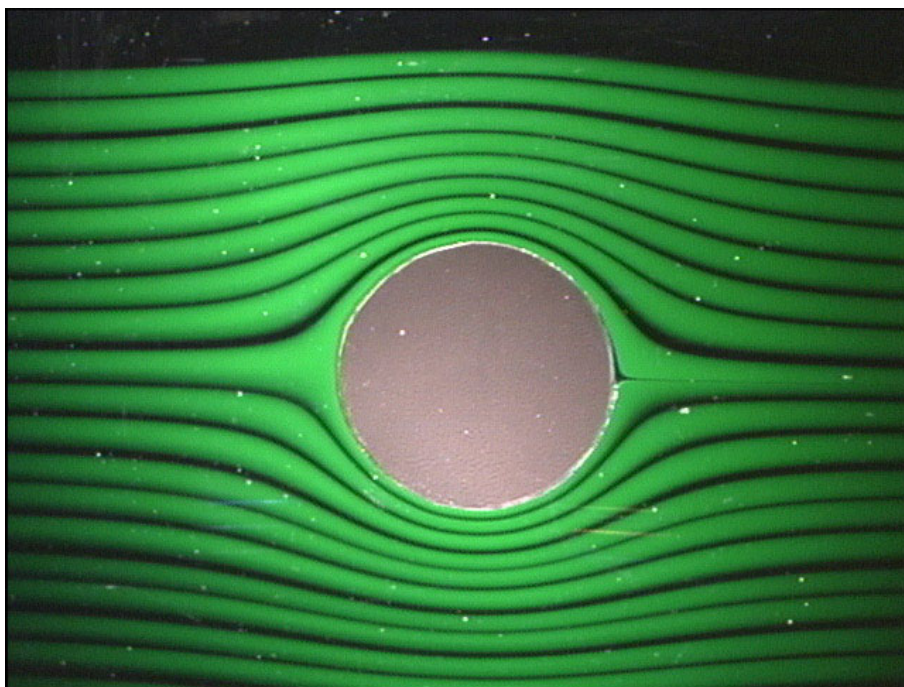


Figura 8.16: Visualizzazione sperimentale tramite l’analogia di Hele–Shaw delle linee di corrente nel flusso potenziale bidimensionale intorno ad un cilindro.

Ai due risultati di sopra si perviene facilmente sostituendo la (8.43) nelle (8.44) ed osservando che l’unico termine ad integrale non nullo è l’ultimo della (8.43) moltiplicato per $\sin \theta$. Lo svolgimento analitico degli integrali in (8.44) viene lasciato come facile esercizio.

Il risultato trovato sulla forza è un caso particolare del teorema di Kutta–Joukowski che dà come espressione della forza $\mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \mathbf{\Gamma}$ in cui $\mathbf{\Gamma}$ è un vettore che ha la circolazione come intensità e la stessa direzione e verso della vorticità associata. Il risultato più importante di questo teorema è che non è possibile generare una forza (di pressione) su un corpo se non si ha una circolazione netta. A questo punto appare chiaro l’effetto del vortice libero che generando una circolazione nel cilindro è in grado di produrre una forza, altrimenti impossibile nell’ambito della teoria potenziale.

La generazione della forza indotta dalla rotazione di un cilindro investito da una corrente è anche nota come effetto Magnus che ha notevoli implicazioni nella balistica (moto di proiettili e missili in rapida rotazione, lanci e tiri ‘ad effetto’ nello sport, etc.). In passato si è anche provato a sfruttare questa forza per fini propulsivi come è mostrato in figura 8.18 con la ‘Flettner–rotorship’ un’imbarcazione ideata da Anton Flettner nel 1922 in cui una spinta addizionale era fornita dai due cilindri rotanti che fungevano da fumaioli. Sebbene tale sistema non sia stato utilizzato successivamente si è comunque visto che, in linea di principio, poteva essere vantaggioso.

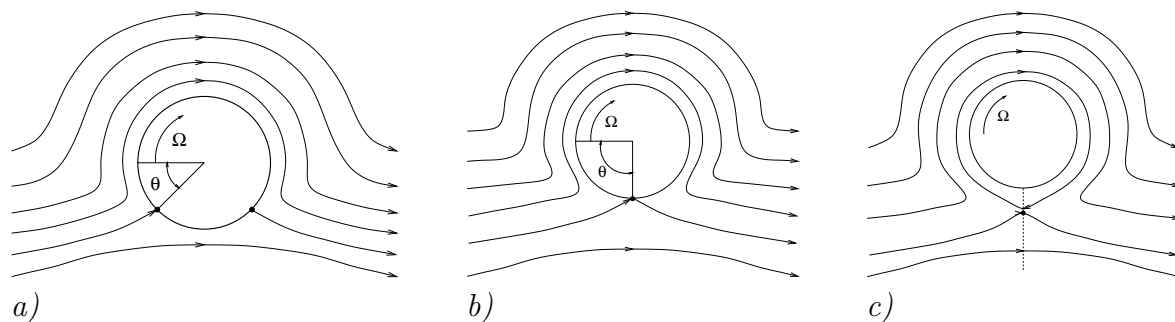
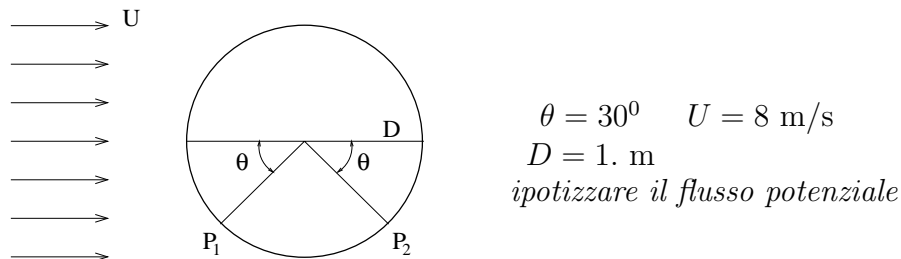


Figura 8.17: Schema delle linee di corrente per un cilindro rotante potenziale bidimensionale: a) $\Gamma < 4\pi RU$, b) $\Gamma = 4\pi RU$, c) $\Gamma > 4\pi RU$.

ESEMPIO

Dato un cilindro a sezione circolare di diametro D investito da una corrente d'acqua uniforme a velocità U , quale deve essere la velocità di rotazione Ω del cilindro in modo da avere i due punti di ristagno come in figura? Quanto vale la forza per unità di lunghezza in tali condizioni?



Soluzione

Per il flusso potenziale intorno ad un cilindro circolare si ha che la velocità tangenziale sulla superficie del corpo è $u_\theta = 2U \sin \theta + \Gamma/(2\pi R)$, la posizione angolare dei punti di ristagno è quindi data da $u_\theta = 0$, ossia $\sin \theta = -\Gamma/(4\pi UR)$. Essendo per le condizioni della figura i punti di ristagno a $\theta = -\pi/3$ e $\theta = 7\pi/6$ si ricava $\Gamma = 25.132 \text{ m}^2/\text{s}$. Dovendo quindi risultare $\Gamma = 2\pi R\Omega \cdot R$ si ricava $\Omega = 16 \text{ rad/s}$. Infine dal teorema di Kutta-Joukowski si ha $F = \rho U \Gamma = 201056 \text{ N/m}$ diretta verso l'alto.

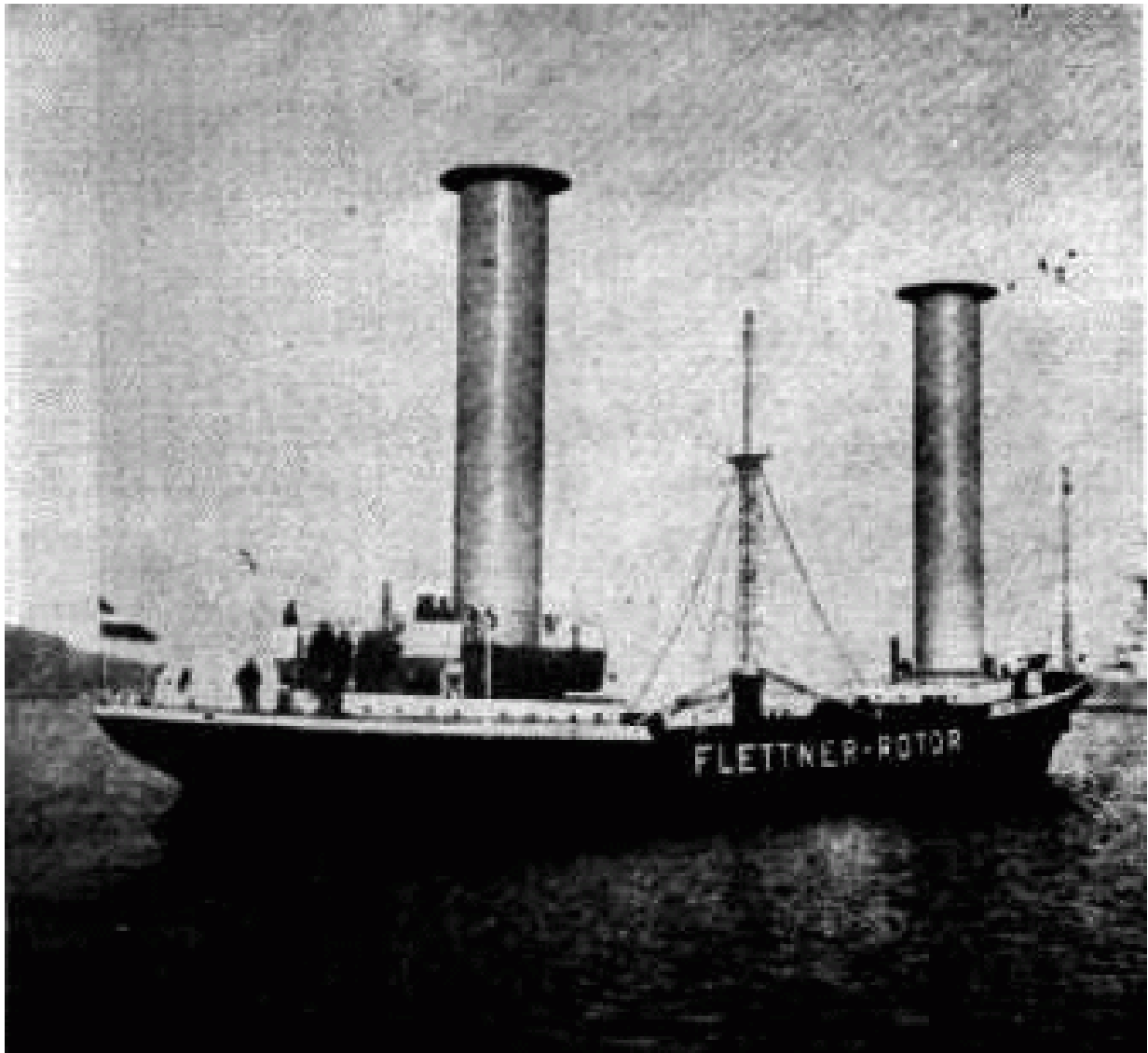


Figura 8.18: Immagine dell'imbarcazione ideata da Flettner con sistema di propulsione basato sull'effetto Magnus.

Capitolo 9

Strato Limite

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, sotto alcune ipotesi, il flusso intorno ad un corpo può essere analizzato con un modello di flusso non viscoso il che semplifica notevolmente la trattazione conducendo alla formulazione potenziale. Sebbene questo approccio fornisca delle informazioni molto utili, esso presenta delle pesanti limitazioni come l'impossibilità di calcolare le forze esercitate dal flusso sul corpo (paradosso di d'Alembert). Evidentemente, l'ipotesi di trascurare i termini viscosi dalle equazioni del moto non è applicabile ovunque; in particolare, in un flusso reale il fluido a contatto con il corpo deve avere la stessa velocità del corpo (condizione di aderenza) che non coinciderà con la velocità potenziale. Questa differenza di velocità genera dei forti gradienti in prossimità del corpo che renderanno non trascurabili gli sforzi viscosi. Il sottile strato di fluido adiacente al corpo dove i termini viscosi non si possono trascurare (o più precisamente dove i termini viscosi sono dello stesso ordine di grandezza di quelli inerziali nel bilancio della quantità di moto) viene detto strato limite (figura 9.1).

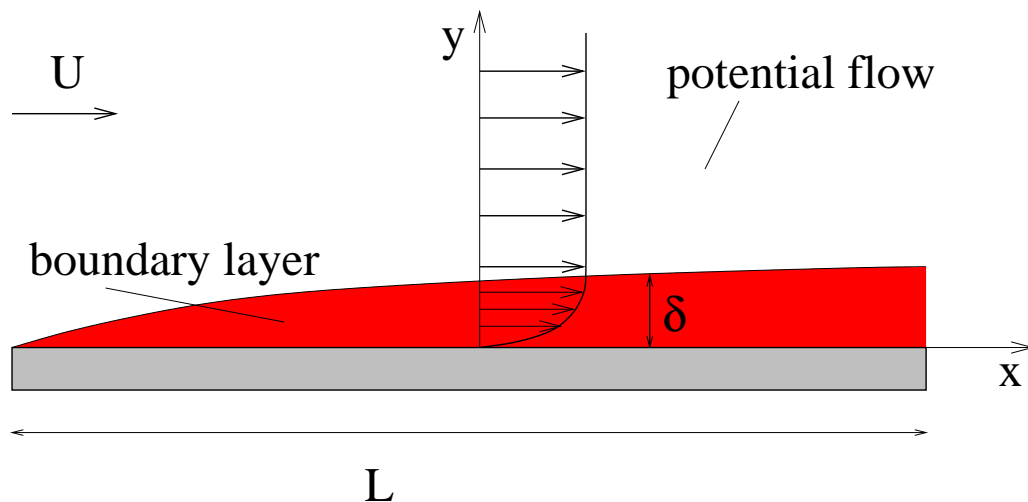


Figura 9.1: Flusso uniforme su una lastra piana: la zona indicata in rosso è la zona 'viscosa' dove non può essere applicata la teoria potenziale.

Per comprendere i punti essenziali della fisica di questo fenomeno, consideriamo il flusso stazionario su una lastra piana ad incidenza nulla come in figura 9.1 ed ipotizziamo per semplicità tale flusso incomprimibile e bidimensionale. Dalle equazioni di conservazione della massa e bilancio della quantità di moto si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

avendo indicato, rispettivamente, con u e v le componenti di velocità u_x e u_y .

Richiamando il concetto che nello strato limite i termini viscosi sono dello stesso ordine di grandezza di quelli inerziali, possiamo quantificare il suo spessore δ . Riferiamoci alla seconda delle (9.1) che rappresenta il bilancio di quantità di moto nelle direzione della corrente x ; detta L la lunghezza della lastra in x dovrà risultare $\delta \ll L$ da cui si intuisce che il secondo termine viscoso deve essere molto più grande del primo. D'altra parte, dei due termini convettivi il primo ci dà il trasporto di quantità di moto parallelamente alla lastra che sarà ostacolato appunto dai termini viscosi all'interno dello strato limite. Da queste considerazioni ne segue che possiamo porre

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \implies \quad \frac{U^2}{L} \simeq \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (9.2)$$

da cui

$$\delta \simeq \left(\frac{\nu L}{U} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}, \quad (9.3)$$

avendo assunto che la velocità parallela alla lastra sia dello stesso ordine di U e definendo il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$ (con $Re \gg 1$).

Noto lo spessore δ è possibile calcolare la relazione tra u e v . Dovendo infatti i due termini dell'equazione di conservazione della massa essere dello stesso ordine di grandezza si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \implies \quad \frac{U}{L} \simeq \frac{v}{\delta} \simeq \frac{v\sqrt{Re}}{L}, \quad \implies \quad v \simeq \frac{U}{\sqrt{Re}}, \quad (9.4)$$

da cui si vede immediatamente che nello strato limite, oltre ad avere una dimensione molto più piccola dell'altra $\delta \ll L$ si ha anche una velocità molto più piccola dell'altra $v \ll u$. Questa caratteristica fu intuuta per la prima volta da Prandtl all'inizio del secolo che formulò la teoria dello strato limite basandosi sul fatto che il fenomeno avviene nelle due direzioni x ed y con scale differenti.

Volendo dare una stima sulle forze viscosi si può calcolare lo sforzo di parete

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \simeq \mu \frac{U}{\delta} = \mu \frac{U}{L} \sqrt{Re} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{L}} \quad (9.5)$$

da cui si vede che questo cresce come $U^{3/2}$ mentre diminuisce all'aumentare della lunghezza della lastra L . Per il calcolo della resistenza totale si può integrare lo sforzo di parete su tutta la superficie della lastra per cui detta b la dimensione della lastra in figura 9.1 nella direzione ortogonale al foglio si ha

$$D = b \int_0^L \tau dx = 2b\sqrt{\mu\rho U^3 L}, \quad (9.6)$$

da cui emerge che la resistenza aumenta solo come \sqrt{L} . Ciò è dovuto al fatto che lo spessore dello strato limite cresce con la coordinata x e lo sforzo di parete diminuisce per cui le regioni più lontane dal bordo d'attacco contribuiscono meno alla resistenza rispetto a quelle più vicine. Se vogliamo infine calcolare il coefficiente d'attrito possiamo scrivere

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 b L} = 4\sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{4}{\sqrt{Re}}. \quad (9.7)$$

Bisogna notare che queste relazioni sono basate su considerazioni sull'ordine di grandezza delle varie quantità quindi danno delle informazioni solo qualitative sul fenomeno. Per avere delle informazioni quantitative è necessario risolvere in qualche modo le equazioni (9.1) cercando di introdurre le semplificazioni delle ipotesi di strato limite.

9.1 equazioni di Prandtl

Abbiamo a questo punto a disposizione gli elementi per derivare le equazioni nelle ipotesi di strato limite. Le lunghezze nelle direzioni x ed y , verranno infatti scalate rispettivamente con L e $\delta = L/\sqrt{Re}$ mentre le velocità u e v con U ed U/\sqrt{Re} . Introducendo allora delle lunghezze e velocità adimensionali definite come

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L}\sqrt{Re}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{U} = \frac{v}{U}\sqrt{Re} \quad (9.8)$$

si ottiene per sostituzione nelle (9.1)

$$\frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{Re}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U^2}{\sqrt{Re}} \frac{\sqrt{Re}}{L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\rho U^2}{L} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U Re}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \\ \frac{U^2}{L\sqrt{Re}} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{U^2}{L\sqrt{Re}} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\rho U^2 \sqrt{Re}}{L} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu \left(\frac{U}{\sqrt{Re} L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U\sqrt{Re}}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right). \end{aligned}$$

Da queste relazioni, facendo il limite per $Re \rightarrow \infty$ e ricordando che $Re = UL/\nu$ si ricava

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (9.10)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}},$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re}\right) \longrightarrow 0,$$

dove l'ultima equazione deriva dall'osservazione che nella terza delle (9.9) il gradiente di pressione deve essere dello stesso ordine di grandezza degli altri termini ($\mathcal{O}(1/\sqrt{Re})$)¹.

Dal confronto delle equazioni (9.10) con le (9.1) si vede che ci sono evidenti differenze con notevoli semplificazioni delle seconde rispetto alle prime. Come prima osservazione notiamo che la pressione ha variazione nulla nella direzione ortogonale alla corrente che quindi non varia attraverso lo strato limite: $\partial p^*/\partial y^* = 0$. Ciò indica che la pressione nello strato limite è imposta dal campo esterno che può essere facilmente determinato dalla teoria potenziale; inoltre il termine di pressione nella seconda delle (9.10) non solo è una derivata ordinaria perché dipendente solo da x ma non è nemmeno un'incognita del problema visto che viene dal flusso esterno.

L'altra caratteristica importante è che la seconda delle (9.10) ha un solo termine viscoso avendo perso il termine di derivata seconda nella direzione x . Da un punto di vista fisico questo significa che il flusso ad una certa coordinata \bar{x} nella direzione della corrente dipende solo da ciò che succede per $x \leq \bar{x}$ al contrario delle (9.1) la cui soluzione in un punto dipende dal flusso in tutto il resto del campo. Matematicamente ciò si esprime dicendo che le equazioni (9.10) sono paraboliche in x mentre le (9.1) sono ellittiche, avendo questa distinzione anche profonde implicazioni nelle metodologie di soluzione che risultano molto più difficili per le seconde rispetto alle prime.

Un'altra caratteristica importante delle equazioni (9.10) è che la loro forma è indipendente dal numero di Reynolds. Ciò implica che una volta trovata la soluzione questa sarà applicabile a tutte le situazioni geometricamente simili potendo poi trovare i valori dimensionali di velocità e lunghezze attraverso le definizioni (9.8).

9.2 separazione dello strato limite

Analizzando le equazioni di Prandtl per lo strato limite abbiamo visto che portano a delle notevoli semplificazioni pur fornendo tutta l'informazione necessaria all'analisi del flusso. Ci chiediamo ora fino a che punto possiamo usare le equazioni semplificate e quale fenomeno fisico ne precluda la validità. Ripercorrendo le ipotesi che ci hanno portato alle equazioni (9.10) notiamo che risulta essenziale la forte differenza di scala $\delta \ll L$; da un punto di vista fisico, infatti ciò ha implicato che tutte le variazioni in y fossero molto più intense di quelle in x permettendo di trascurare alcuni termini. Si può verificare tuttavia che, a causa dell'azione frenante dell'attrito, il flusso tenda a separare ed una particella fluida inizialmente in prossimità della parete venga trasportata lontano da essa; in questi casi l'approssimazione di strato limite cessa di essere valida.

¹Nello sviluppare tutti questi passaggi abbiamo anche supposto che la scala di adimensionalizzazione delle pressioni sia $P = \rho U^2$ ossia che il numero di Ruark $\rho U^2/P = Ru$ sia uguale ad 1. Ciò si verifica sempre a meno che nel problema non subentri una forzante di pressione imposta dall'esterno.

Analizziamo più in dettaglio lo schema di figura 9.2 osservando che a causa della diffusione lo spessore dello strato limite δ cresce con la coordinata x nei primi 3 profili. Con la crescita di δ diminuisce progressivamente il gradiente di velocità alla parete fino ad un punto in cui questo valore può diventare nullo. Nella figura 9.2 ciò accade in S dove si osserva che, dovendo necessariamente il profilo di velocità recuperare il valore U per $y \rightarrow \infty$, il profilo in questo punto deve avere un cambio di concavità. Si osservi che anche nel terzo profilo la concavità non è unica per cui il cambio di concavità non può essere utilizzato come criterio per l'identificazione della separazione. Al contrario si può affermare che essendo un punto di separazione caratterizzato dalla condizione $\partial u / \partial y|_w = 0$ il cambio di concavità nel profilo di velocità è condizione necessaria per la separazione.

Se utilizziamo il fatto che alla parete ($y^* = 0$) la condizione di aderenza implica $u^* = v^* = 0$ la seconda delle (9.10) alla parete diventa

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)_w, \quad (9.11)$$

da cui si vede che la concavità del profilo di velocità alla parete dipende dal gradiente di pressione imposto dal flusso esterno. In particolare se il gradiente di pressione è sempre negativo, ossia se il flusso è sempre accelerato, il profilo di velocità sarà convesso e la situazione illustrata in figura 9.2 non potrà mai verificarsi.

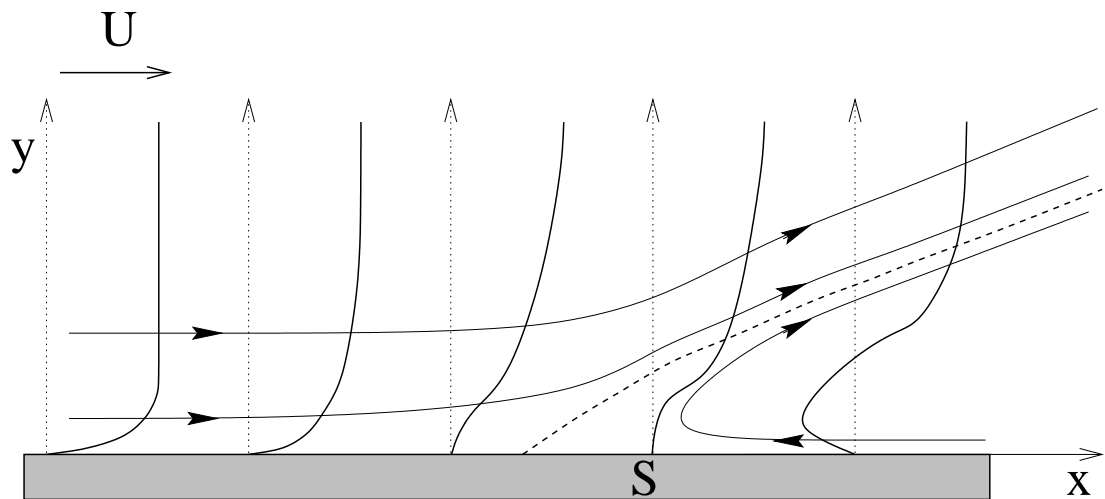


Figura 9.2: Separazione dello strato limite su una lastra piana.

Al contrario se il flusso si muove da zone a pressione minore verso zone a pressione maggiore il gradiente di pressione sarà positivo e la concavità del profilo di velocità a parete sarà positiva. In questo contesto, si può verificare che in qualche punto il profilo raggiunga la condizione di gradiente nullo a parete e quindi il flusso separi.

Nelle figure 9.3 e 9.4 sono riportate due visualizzazioni di laboratorio di separazioni di strato limite. Nella prima la separazione avviene in un divergente a causa della diminuzione di velocità del flusso esterno e conseguente aumento di pressione. In figura 9.4

viene mostrato, invece, che proprio a causa dell'effetto del gradiente di pressione sullo strato limite le situazioni di contrazione ed espansione non sono simmetriche verificandosi il distacco del flusso dalla parete solo nel secondo caso.

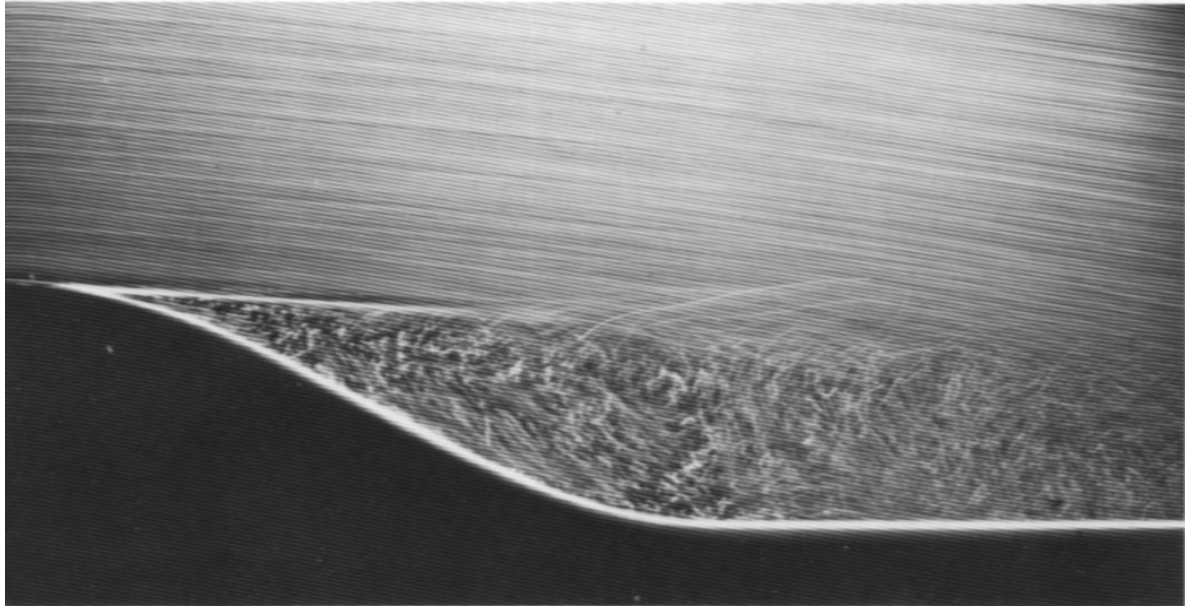


Figura 9.3: Visualizzazione sperimentale della separazione dello strato limite all'inizio di un divergente.

Evidentemente dall'insorgere della zona di separazione in poi non sarà più vero che le variazioni nella direzione y saranno più grandi di quelle in x e quindi non si potranno più usare le equazioni (9.10) ma piuttosto le (9.1).

Riguardo alla relazione (9.11) si deve notare che non è necessario conoscere effettivamente la pressione ma basta conoscere il campo esterno di velocità. Considerando infatti la prima delle (9.1) e ricordando che il flusso esterno ha solo la componente di velocità parallela al corpo e che i termini viscosi sono trascurabili si ottiene $-(1/\rho)dp/dx = U dU/dx$.

Osserviamo infine che la separazione dello strato limite è un fenomeno che si cerca di evitare nelle applicazioni pratiche in quanto provoca delle perdite di energia meccanica. Per esempio nell'aerodinamica esterna degli autoveicoli la presenza di bolle di separazione aumenta il coefficiente di resistenza e quindi il consumo di carburante.

9.3 * soluzione simile

Una delle possibilità per risolvere le equazioni (9.10) è di fare ricorso alle soluzioni simili. In particolare, poiché nella direzione x non c'è una scala di lunghezze assegnata si può ipotizzare che il profilo di velocità assuma una forma simile in x . Matematicamente ciò si esprime dicendo che prese due coordinate x_1 ed x_2 ed il campo di velocità $u(x, y)$ deve

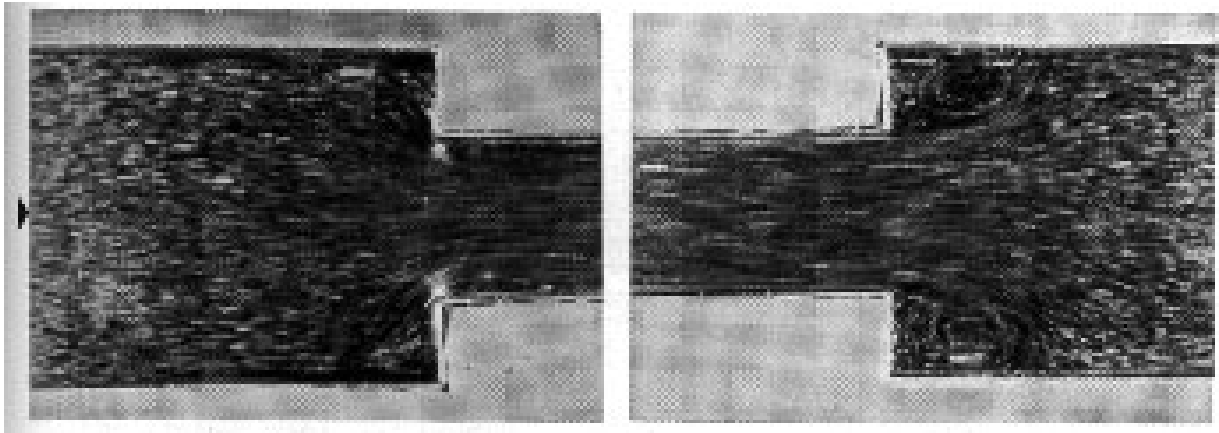


Figura 9.4: Visualizzazione sperimentale del flusso attraverso un'improvvisa contrazione e successiva espansione.

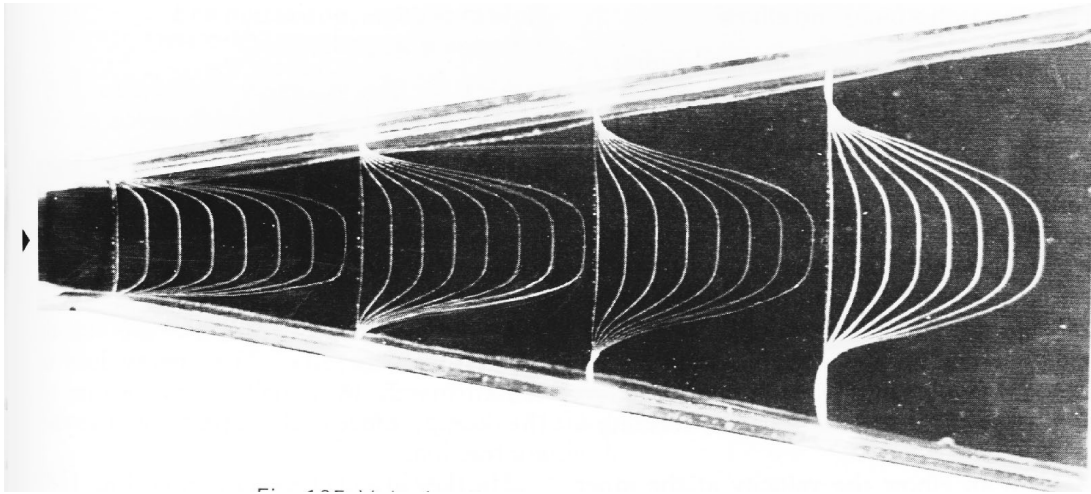


Figura 9.5: Profili di velocità a varie sezioni ed evoluzione della regione di separazione per il flusso all'interno di un condotto divergente.

valere

$$\frac{u\left(x_1, \frac{y}{f(x_1)}\right)}{g(x_1)} = \frac{u\left(x_2, \frac{y}{f(x_2)}\right)}{g(x_2)}, \quad (9.12)$$

dove f e g sono due funzioni di forma. In altre parole la soluzione $u(x, y)$ è simile se è possibile far coincidere i profili di velocità per due sezioni qualunque introducendo un fattore di scala per la velocità e per la coordinata y . Dato il problema in esame, il fattore di scala per la velocità è la velocità del flusso esterno U mentre la funzione con cui scalare la y sarà lo spessore dello strato limite δ .

Se ora introduciamo la funzione di corrente possiamo porre per le velocità $u = \partial\psi/\partial y$

e $v = -\partial\psi/\partial x$ per cui la seconda delle (9.10) (in forma dimensionale) diviene

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad (9.13)$$

in cui si possono fare le seguenti posizioni

$$f(x) = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad \psi(x, \eta) = \sqrt{\nu x U} f(\eta) \quad (9.14)$$

e per le velocità

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U} f'(\eta) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U f', \quad (9.15)$$

$$-v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\nu U}{2\sqrt{\nu x U}} f(\eta) - \sqrt{\nu x U} f'(\eta) \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [f(\eta) - \eta f'(\eta)].$$

Sostituendo queste velocità nella (9.13) ed assumendo un gradiente esterno di pressione nullo (UdU/dx) si ricava

$$U f' \left(-\frac{U}{2} f'' \frac{\eta}{x} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [\eta f' - f] U f'' \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \nu U f''' \frac{U}{\nu x} \quad (9.16)$$

che opportunamente semplificata si riduce a

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0. \quad (9.17)$$

Questa equazione è nota come equazione di Blasius che può essere risolta con le seguenti condizioni al contorno

$$u(y=0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0, \quad v(y=0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0, \quad (9.18)$$

$$u(y \rightarrow \infty) = U \Rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1;$$

abbiamo così un'equazione differenziale ordinaria non lineare del 3° ordine con 3 condizioni al contorno che permettono di risolvere il problema (per esempio per integrazione numerica).

In figura 9.6 viene riportata una visualizzazione in acqua del profilo di strato limite di Blasius da cui si può dedurre l'andamento della funzione $f'(\eta)$ al variare di η .

I valori di f sono di solito tabulati ed alcuni dati sono riportati nella tabella 9.1, da cui si possono fare alcune considerazioni. Il valore di $f'(\eta)$ (e quindi di u/U) parte da 0 per $\eta = 0$ e tende asintoticamente ad 1; convenzionalmente si può definire lo spessore dello strato limite come la distanza dalla parete a cui la velocità u raggiunge il 99% della U . Dalla tabella si vede che ciò accade per $\eta \simeq 5$ per cui si ha $\delta \simeq 5\sqrt{\nu x/U}$. Il

η	f	f'	f''
0	0	0	0.332
1	0.166	0.3298	0.323
3	1.397	0.8461	0.161
5	3.28	0.991	0.01591
7	5.28	0.99992	0.00022
8	6.279	1.0000	0.00001

Tabella 9.1: Valori tabulati per la funzione f e le sue derivate

valore $u = 0.99U$ è tuttavia arbitrario e se si scegliesse $u = 0.999U$ si otterrebbe $\eta \simeq 6$ per cui nasce l'esigenza di una definizione più oggettiva di spessore che prescindendo dalla determinazione di valori di soglia arbitrari.

Osserviamo a tal fine che a causa della condizione di aderenza, considerata una distanza h dalla parete tale che $u \simeq U$ si ha che la portata in volume Q risulta più piccola di quella che si avrebbe se il flusso fosse potenziale (figura 9.7). Ci si può allora chiedere quale sia la distanza dalla parete δ^* tale che considerando il flusso tra δ^* ed h costante ed uniforme si ottiene esattamente il flusso Q . Questa distanza si trova semplicemente imponendo che

$$U(h - \delta^*) = \int_0^h u dy, \implies U\delta^* = \int_0^h (U - u) dy, \implies \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad (9.19)$$

essendo stato esteso l'integrale all'infinito in quanto $u/U = 1$ per $y > h$. Usando la soluzione di Blasius si può quindi scrivere

$$\delta^* = \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta \sqrt{\nu x} U = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [\eta - f(\eta)]_{\eta \rightarrow \infty} = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad (9.20)$$

ossia circa $1/3$ di δ . Da un punto di vista fisico questa distanza ci dice di quanto dovremmo spostare verso l'esterno il contorno del corpo in un'ipotetico flusso potenziale per compensare la perdita di flusso di massa dovuto alla condizione di aderenza; questa distanza è chiamata spessore di spostamento. Riferendoci alla figura 9.1 si tratta di trovare la distanza δ^* per cui le due aree indicate abbiano lo stesso valore.

Sempre a causa della condizione di aderenza si ha una diminuzione di flusso di quantità di moto per cui seguendo il ragionamento precedente si può trovare uno spessore analogo θ (detto spessore di quantità di moto) tale che:

$$\rho U^2 \theta = \rho \int_0^\infty u(U - u) dy \implies \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta \sqrt{\nu x} U \quad (9.21)$$

che integrato numericamente dà $\theta = 0.664 \sqrt{\nu x / U}$.

Al bordo dello strato limite la quantità $\eta f' - f \sim v$ è sempre positiva quindi la velocità normale al bordo dello strato limite non è nulla. La linea $y = \delta(x)$ non è conseguentemente una linea di corrente non essendo verificata la relazione $v/u = dy/dx$.

Per l'attrito di parete si ha

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu f''(0) \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}} \quad (9.22)$$

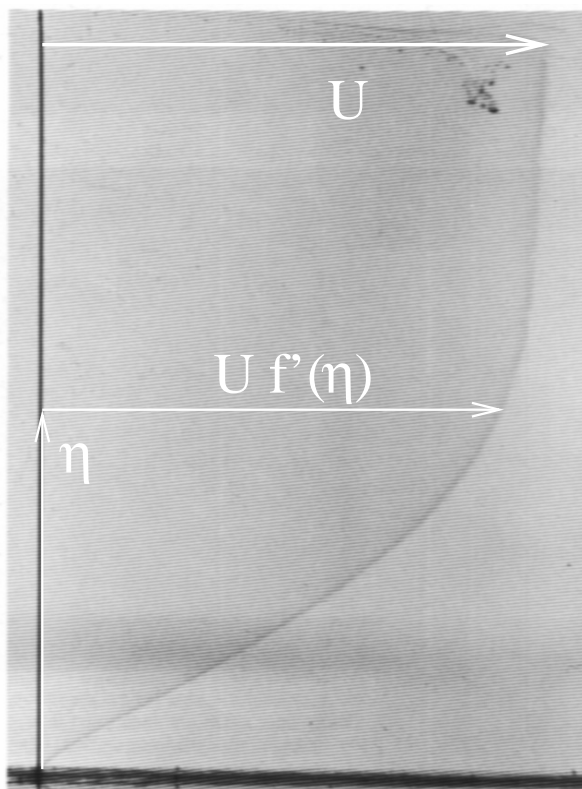


Figura 9.6: Visualizzazione sperimentale di un profilo di Blasius in acqua.

mentre per la resistenza

$$D = b \int_0^L \tau_w dx = 0.332b\sqrt{\rho\mu U^3} \int_0^L \frac{d}{\sqrt{x}} = 0.664b\sqrt{\rho\mu U^3 L}. \quad (9.23)$$

Per il coefficiente d'attrito si può infine scrivere

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 b L} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}. \quad (9.24)$$

Vogliamo ricordare che tutte queste considerazioni sono valide nel caso in cui il flusso sia bidimensionale, stazionario ed in assenza di gradiente di pressione imposto dal flusso esterno. Queste condizioni sono eccessivamente restrittive per le applicazioni pratiche, tuttavia il fatto di disporre di una soluzione esatta ci permette di utilizzare lo strato limite su una lastra piana come flusso test per validare eventuali metodi approssimati che permettano di risolvere più facilmente anche casi più complessi.

Come ultima osservazione dobbiamo sottolineare che i risultati trovati valgono per flussi laminari, flussi cioè in cui il fluido scorre sopra la lastra come se fosse formato da tante lamine parallele che scorrono una rispetto all'altra. Ciò si verifica nella realtà solo per numeri di Reynolds minori di $2 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5$ ed il valore esatto dipende dalle perturbazioni nel flusso esterno e dalla rugosità della lastra. Per valori superiori del

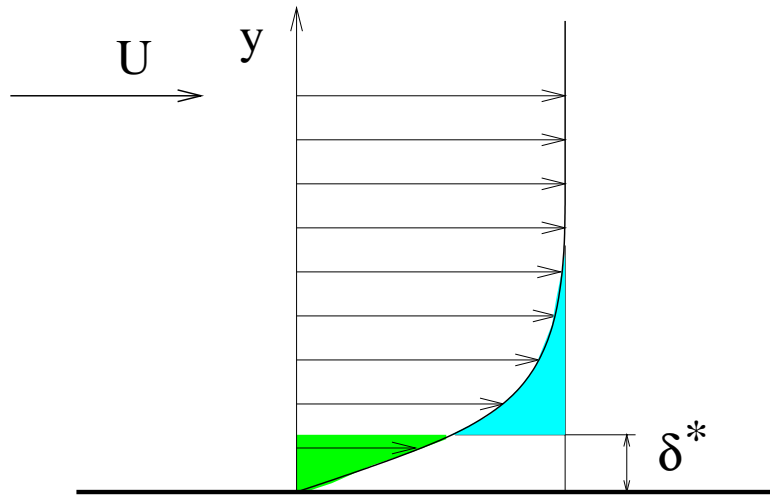
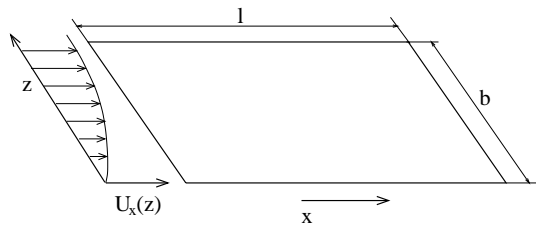


Figura 9.7: Definizione di spessore di spostamento.

numero di Reynolds si ha la transizione del flusso alla turbolenza condizione in cui il flusso è completamente tridimensionale e non stazionario. A questa condizione si accennerà in un capitolo successivo.

ESEMPIO

Data la lastra in figura investita da un profilo di velocità $U_x(z)$, calcolare la densità del fluido sapendo che la forza sulla lastra (considerata bagnata da un solo lato) è F .



$$U_x(z) = 5z^2 \text{ m/s} \quad l = 1 \text{ m} \quad b_2 = 0.5 \text{ m}$$

$$F = 6\hat{x} \text{ N} \quad \mu = 10^{-1} \text{ Ns/m}^2$$

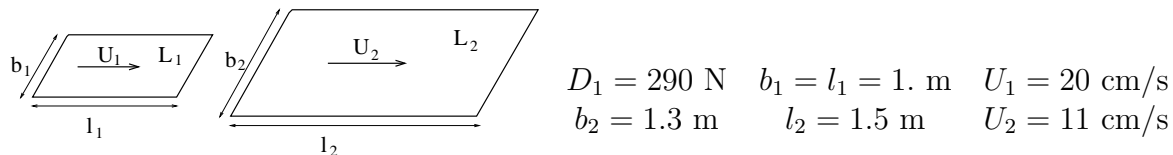
Essendo il flusso laminare e non essendo prescritto alcun profilo di velocità approssimato si possono usare le formule di Blasius che danno per lo sforzo di parete $\tau_w = 0.332\sqrt{\rho\mu U^3/x}$, con x la coordinata nella direzione della corrente misurata a partire dal bordo d'attacco della lastra. Per la forza sulla lastra si avrà quindi

$$F = \int_0^b \int_0^l \tau_w dx dz = 0.332\sqrt{\rho\mu 5^3} \int_0^b z^3 dz \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0.332\sqrt{\rho\mu 5^3} \frac{b^4}{4} 2\sqrt{l}.$$

Ricavando da questa relazione ρ si ottiene $\rho = 26755 \text{ Kg/m}^3$.

ESEMPIO

La resistenza di una lastra piana L_1 ad incidenza nulla ed investita da una corrente a velocità U_1 è pari a D_1 . Calcolare la resistenza di una seconda lastra L_2 investita dallo stesso fluido della lastra precedente ma a velocità U_2 .



$$D_1 = 290 \text{ N} \quad b_1 = l_1 = 1. \text{ m} \quad U_1 = 20 \text{ cm/s}$$

$$b_2 = 1.3 \text{ m} \quad l_2 = 1.5 \text{ m} \quad U_2 = 11 \text{ cm/s}$$

Soluzione

Essendo il flusso laminare su lastre piane ad incidenza nulla (e non essendo specificato alcun tipo di profilo di velocità approssimato) si può usare la soluzione di Blasius che fornisce

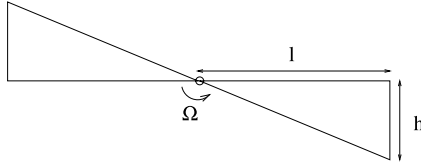
$$\tau_w = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}, \quad D = \int_0^b \int_0^l \tau_w dS = 0.664 \sqrt{\rho \mu U^3} b \sqrt{l}.$$

Per la prima lastra si ha $D_1 = 0.664 \sqrt{\rho \mu} b_1 \sqrt{l_1 U_1^3}$ da cui si ricava $\sqrt{\rho \mu}$. Per la seconda lastra si potrà quindi scrivere

$$D_2 = 0.664 \sqrt{\rho \mu} b_2 \sqrt{l_2 U_2^3} = D_1 \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^{\frac{1}{2}} = 188.3 \text{ N}.$$

ESEMPIO

La ‘ventola’ in figura ha due pale ad incidenza nulla e ruota in aria a velocità costante Ω . Calcolare la potenza necessaria a mantenere la ventola in rotazione supponendo il flusso laminare e localmente bidimensionale (ossia ogni striscia di pala parallela al lato h si comporta indipendentemente dalle altre).



$$h = 20 \text{ cm} \quad l = 0.5 \text{ m} \quad \Omega = 150 \text{ giri/min}$$

Soluzione

Prendendo un asse y allineato con il bordo d’attacco della pala ed un asse x ortogonale, Essendo lo strato limite laminare e bidimensionale, risulterà

$$dF = \tau dx dy = 0.332 \sqrt{\frac{\rho \mu \Omega^3 y^3}{x}} dx dy$$

con $U(y) = \Omega y$ la velocità che investe ogni striscia di pala ed x la distanza dal bordo d’attacco. Per il momento rispetto all’asse di rotazione risulta

$$dM = y dF, \quad M = \int_0^l \int_0^{yh/l} 0.332 \sqrt{\rho \mu \Omega^3 y^5} x^{-1/2} dx dy = \frac{0.332}{2} \sqrt{\frac{\rho \mu \Omega^3 h}{l}} l^4.$$

Considerando ora che ogni pala ha 2 superfici bagnate ed il rotore ha due pale ne risulta che la potenza sarà data da

$$W = 4M\Omega = 0.664 \sqrt{\rho \mu h \Omega^5} l^{7/2} = 0.1232 \text{ W.}$$

9.4 equazione integrale dello strato limite

Nella sezione precedente abbiamo visto un caso in cui l’equazione per lo strato limite può essere risolta in modo esatto trovando la soluzione in ogni punto del campo. In generale questa procedura non può essere seguita in quanto la soluzione analitica presenta delle difficoltà insormontabili. Una possibile alternativa consiste nel richiedere che l’equazione non sia soddisfatta puntualmente ma che lo sia una sua media effettuata su tutto lo spessore dello strato limite. Partendo allora dalle equazioni per lo strato limite ed integrando in direzione normale alla parete fino ad un’altezza h (essendo h grande abbastanza da essere per qualunque x al di fuori dello strato limite) si ottiene:

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \int_0^h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy. \quad (9.25)$$

Il secondo membro dopo l'integrazione può essere immediatamente posto uguale a $-\tau_w/\rho$ risultando $\partial u/\partial y = 0$ per $y = h$. Dall'equazione di continuità ricaviamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \implies v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (9.26)$$

che possiamo sostituire nel primo membro della (9.25)

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}. \quad (9.27)$$

Integrando il secondo termine per parti

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} (U - u) dy. \quad (9.28)$$

Risostituendo l'espressione trovata nella (9.27), aggiungendo e sottraendo il termine $\partial u U/\partial x$ nell'integrale e combinando opportunamente i termini si ottiene

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] dy + \int_0^h \frac{dU}{dx} (U - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (9.29)$$

Osserviamo ora che poiché h non dipende da x le derivazioni in x possono essere portate fuori dal segno di integrale. Inoltre per $y > h$ tutte le funzioni integrande vanno a zero quindi gli integrali si possono estendere fino all' ∞ da cui, ricordando le espressioni per lo spessore di spostamento e di quantità di moto si ottiene

$$\frac{d\theta U^2}{dx} + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (9.30)$$

Questa è l'equazione integrale dello strato limite anche detta equazione di von Karmán che mette in relazioni le grandezze integrali dello strato limite con lo sforzo di parete.

L'essenza della soluzione di questa equazione consiste nell'assumere un profilo di velocità che soddisfi le condizioni al contorno e la continuità con la soluzione esterna e procedere con il calcolo di δ^* , θ e τ_w i cui valori saranno funzione della coordinata x e dei parametri liberi assunti nel profilo di velocità. Sostituendo il risultato in (9.30) si otterrà un'equazione differenziale dalla cui soluzione si ottengono le formule per δ^* , θ e τ_w e quindi per le quantità derivate.

A titolo di esempio consideriamo il flusso intorno ad una lastra piana ad incidenza nulla per il quale abbiamo la soluzione esatta di Blasius come termine di paragone. Risultando il gradiente di pressione esterno nullo ($dU/dx = 0$) l'equazione integrale si riduce a

$$U^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (9.31)$$

Assumendo come profilo di velocità $u/U = y/\delta = \eta$ si ha che questo soddisfa la condizione di aderenza alla parete ($u = 0$ per $y = 0$) e la continuità con la soluzione esterna ($u = U$ per $y = \delta$). Dalle definizioni di θ e τ_w abbiamo

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^1 \eta(1 - \eta) \delta d\eta = \frac{\delta}{6}, \quad \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta}, \quad (9.32)$$

e sostituendo queste espressioni nella (9.31) si ottiene una semplice equazione differenziale in δ

$$\frac{U^2}{6} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu U}{\rho \delta} \implies \delta = \sqrt{12} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad (9.33)$$

che ci dà l'espressione per lo spessore dello strato limite in funzione di x . Noto $\delta(x)$ è possibile procedere a ritroso e calcolare tutte le altre quantità

$$\theta = 0.557 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \delta^* = 1.732 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \tau_w = 0.288 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}, \quad (9.34)$$

mentre per il coefficiente d'attrito e la resistenza si ottiene

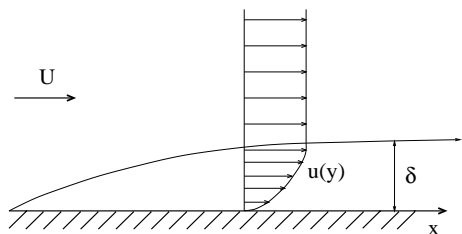
$$c_f = 1.152 \sqrt{\frac{\nu}{UL}}, \quad D = 0.576b \sqrt{\rho \mu U^3 L}. \quad (9.35)$$

Tutti questi valori vanno confrontati con la soluzione esatta di Blasius e dal confronto si vede che nonostante il profilo $u/U = \eta$ sia il più semplice che si possa usare i valori numerici non vengono troppo dissimili da quelli esatti. Valori ancora più prossimi a quelli esatti si possono comunque ottenere utilizzando profili di velocità più complicati che replichino anche le caratteristiche di curvatura del profilo di Blasius (funzioni cubiche, seno oppure funzioni a tratti).

Vogliamo infine ricordare che se il contorno del corpo non è di forma semplice, se il gradiente di pressione non è nullo o se il profilo non è simile la procedura di soluzione (concettualmente identica) si complica notevolmente e si deve ricorrere a diverse funzioni a seconda del gradiente di pressione. Alla fine si giunge comunque ad un'equazione differenziale per $\delta(x)$ dalla cui soluzione si ricavano δ^* , θ e τ_w .

ESEMPIO

Data una lastra piana ad incidenza nulla investita da una corrente uniforme d'aria a velocità U , considerando il flusso laminare ed assegnato l'andamento del profili di velocità $u(y)$, determinare l'andamento dello sforzo di parete in funzione di x



$$\frac{u(y)}{U} = -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \delta \geq y$$

$$\frac{u(y)}{U} = 1 \quad \delta < y$$

$$U = 1.5 \text{ m/s}$$

Soluzione

Partendo dall'equazione integrale dello strato limite (nel caso di gradiente di pressione nullo) $\tau_w/\rho = U^2 d\theta/dx$, per il profilo di velocità assegnato su ha $\tau_w = \mu du/dy|_{y=0} = 3\mu U/(2\delta)$ e per θ

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{39\delta}{280}.$$

Questi valori risostituiti nell'equazione di partenza forniscono

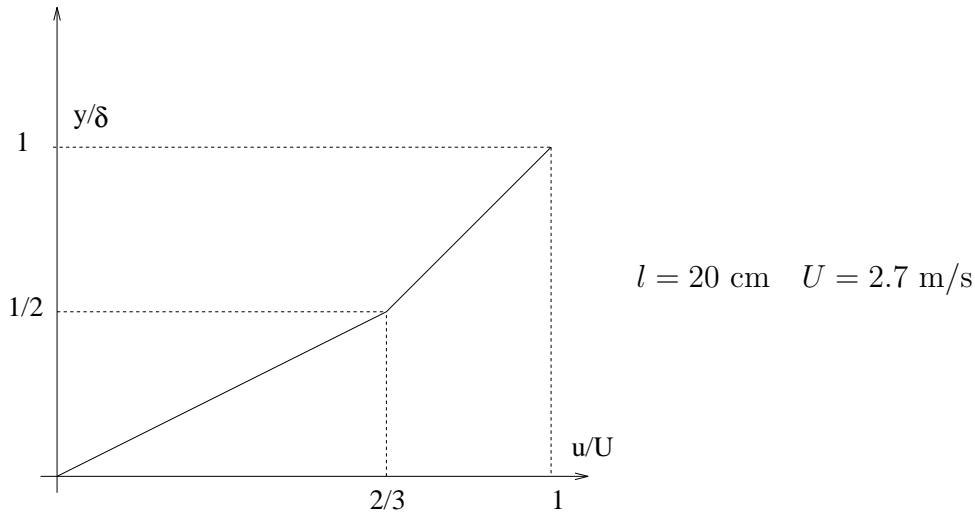
$$\frac{3\mu U}{2\delta} = \frac{39\rho U^2}{280} \frac{d\delta}{dx} \implies \frac{140\nu}{13U} dx = \delta d\delta \implies \delta = \sqrt{\frac{280\nu}{13U}} \sqrt{x} = 0.0145\sqrt{x} \text{ m},$$

da cui

$$\tau_w = \sqrt{\frac{117\rho\mu U^3}{1120}} \sqrt{\frac{1}{x}} = 0.00284 \sqrt{\frac{1}{x}} \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2\text{m}}.$$

ESEMPIO

Su una lastra piana con un gradiente di pressione nullo scorre dell'acqua a velocità U . Supponendo il profilo di velocità nello strato limite simile ed approssimabile con due tratti rettilinei come in figura, calcolare lo spessore dello strato limite ad una distanza l dal bordo d'attacco.

**Soluzione**

Per il profilo di velocità si ha: $u/U = 4y/(3\delta)$ per $0 \leq y \leq \delta/2$ e $u/U = (2y + \delta)/(3\delta)$ per $\delta/2 \leq y \leq \delta$. Lo sforzo di parete è $\tau_w = \mu 4U/(3\delta)$ mentre lo spessore di quantità di moto sarà $\theta = 0.1574\delta$. Dall'equazione integrale per lo strato limite si scrive

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx}, \quad \delta d\delta = \frac{4\nu}{3U \cdot 0.1574} dx, \quad \delta = 0.00177\sqrt{x},$$

da cui $\delta(0.2) = 1.12 \text{ mm}$.
