

Appunti di Turbolenza



Roberto Verzicco

Note scritte per il corso dell'anno accademico 2006–2007.

Foto in copertina: “Adresovat a obrácený kaskáda” (‘Cascata diretta ed inversa’), carboncino su cartone di Crôzevic Töerbor, 1696

Indice

1	Turbolenza	5
1.1	fenomenologia della turbolenza	5
1.2	cascata di energia e dissipazione	9
1.3	equazione di Burgers	12
1.4	significato fisico dei termini delle equazioni di Navier–Stokes	18
1.5	vorticità e cascata dell’energia	20
1.5.1	dinamica tridimensionale	21
1.5.2	dinamica bidimensionale	23
1.5.3	cascata diretta ed inversa	24
1.6	turbolenza, frattali e leggi di scala	27
1.7	turbolenza omogenea ed isotropa	31
1.8	equazioni di Reynolds	34
1.9	Ipotesi di Boussinesq: la viscosità turbolenta	38
1.10	viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento	39
1.11	cascata dell’energia, ipotesi di continuo e relazioni costitutive	42
1.12	simulazione numerica della turbolenza	46
1.12.1	Simulazione Diretta (DNS)	47
1.12.2	Modellistica RANS	48
1.12.3	Large–Eddy–Simulation (LES)	49
1.12.4	Risoluzione a parete	53

Capitolo 1

Turbolenza

1.1 fenomenologia della turbolenza

L'osservazione di flussi turbolenti è un'esperienza quotidiana che identifichiamo con il moto non stazionario, irregolare ed apparentemente caotico di un fluido. Le volute formate dal fumo di una sigaretta nel suo moto ascensionale, il miscelamento tra latte e caffè all'interno di una tazza o la scia irregolare di un fiume a valle del pilone di un ponte sono solo alcuni esempi tra un'innumerabile quantità.

Sebbene il concetto di turbolenza sia abbastanza chiaro per ognuno di noi, non è altrettanto chiaro l'effetto che ha la turbolenza sulle caratteristiche globali di un flusso.

Si consideri, per esempio l'accensione di una sigaretta all'interno di una stanza; è esperienza comune che dopo pochi secondi la presenza del fumo può essere avvertita in tutta la stanza, indicando che il fumo ha “diffuso” ovunque. Un'interpretazione ingenua potrebbe indurre a pensare che la diffusione sia la causa di questo fenomeno ma una stima delle scale temporali esclude inequivocabilmente questo fattore. Detta infatti ν la viscosità cinematica dell'aria ed L la distanza percorsa dal fumo, il tempo impiegato dal fumo per percorrere tale lunghezza risulta $T_\nu = L^2/\nu$ che, utilizzando i parametri dell'aria ed ipotizzando $L = 4\text{m}$ fornisce $T_\nu \simeq 1.07 \cdot 10^6\text{s}$ (circa 12 giorni)! In realtà il tempo risulterebbe leggermente minore in quanto per tale calcolo non bisognerebbe considerare ν che dà la diffusività della quantità di moto ma la diffusività κ del fumo in aria; potendo porre $\kappa = \nu/Sc$ (essendo Sc il numero di Schmidt che vale circa $Sc = 0.7$ per l'aria) si otterrebbe $T_\nu \simeq 8.4$ giorni, che comunque non cambia l'ordine di grandezza.

Si potrebbe comunque osservare che poiché il fumo di sigaretta è più caldo dell'aria circostante, la convezione naturale ha un ruolo rilevante nella diffusione del fumo. Una stima dimensionale, tuttavia fornisce delle velocità dell'ordine dei cm/s che, combinata con l'osservazione che il fumo caldo sale verso l'alto e non si propaga orizzontalmente, porta comunque a dei tempi di ore in netto contrasto, con l'esperienza quotidiana.

La ragione della discrepanza tra l'esperienza pratica e le due stime quantitative è che in entrambi i casi, si è trascurata la presenza della turbolenza. Le fluttuazioni di velocità indotte nel fluido dal moto turbolento, infatti, hanno la capacità di trasportare una quantità (scalare o vettoriale) molto rapidamente anche in assenza di moto medio. Ciò porta ad assimilare l'effetto della turbolenza con un notevole aumento della diffusività del fluido che arriva ad essere anche due o tre ordini di grandezza maggiore rispetto al valore

molecolare. Un studio più attento dei fenomeni turbolenti mostrerà comunque che questo è solo l'effetto più visibile di una dinamica molto complessa che coinvolge principalmente i termini non lineari delle equazioni di Navier–Stokes.

Per fornire un altro esempio sugli effetti macroscopici della turbolenza consideriamo la portata di un fluido attraverso un tubo a sezione circolare di raggio R e lunghezza L per una data differenza di pressione Δp . In base alla soluzione laminare di Hagen–Poiseuille si potrebbe scrivere $Q = \pi R^4 \Delta p / (8\mu L)$ indicando che sarebbe sufficiente una differenza di pressione di un Pascal per ogni metro di lunghezza per avere in un tubo di raggio $R = 0.5$ m una portata d'acqua di $Q \simeq 20$ m³/s. Questo risultato sovrastima in modo molto grossolano la portata reale che risulta ¹ invece $Q \simeq 0.25$ m³/s. Il motivo di tale differenza è che il numero di Reynolds del flusso è $Re \simeq 3 \cdot 10^5$ ossia molto al di sopra del limite $Re = 2100$ di validità della soluzione laminare; in tali condizioni, il flusso all'interno del condotto non può considerarsi nè stazionario nè tantomeno piano (ossia contenente la sola componente di velocità nella direzione della corrente) e le intense fluttuazioni di velocità “diffondono” la quantità di moto verso la parete del condotto in modo molto efficiente di quanto non farebbe la sola viscosità molecolare comportando un consistente aumento degli sforzi viscosi.

Questo fenomeno è quantificato in modo empirico dal diagramma di Moody che viene riportato in figura 1.1 con la soluzione relativa al flusso laminare evidenziata e prolungata per numeri di Reynolds maggiori di 2000 ossia al di fuori del regime laminare. La discrepanza quantitativa nell'esempio sopra riportato è essenzialmente la differenza che passa tra valutare f lungo la soluzione laminare per qualunque valore del numero di Reynolds e valutarla sulle curve sperimentali. Si può notare come già per $Re \simeq 3 \cdot 10^5$ la soluzione laminare sottostimi f di un fattore maggiore di 30 e le differenze crescono per valori più elevati del numero di Reynolds.

Esperienze di laboratorio sul flusso all'interno di tubi a sezione circolare sono state condotte per la prima volta in modo sistematico da O. Reynolds nel 1883 il quale, osservò che combinando la velocità media del flusso U , il diametro del tubo d e la viscosità cinematica del fluido ν nel fattore Ud/ν (che in seguito prese il nome di numero di Reynolds) si poteva descrivere la dinamica del flusso in 3 categorie differenti. Per $Re \leq 2100$ il flusso si manteneva stazionario e si comportava come se delle lamine rettilinee (da cui il termine flusso laminare) scorressero le une sulle altre interagendo solo attraverso degli sforzi tangenziali. Questo comportamento fu notato osservando l'evoluzione di una “streakline” di inchiostro rilasciata da una posizione fissa all'interno del condotto; la linea di colorante, infatti, si manteneva rettilinea diffondendo molto debolmente mentre si allontanava dalla sorgente.

Per $2100 \leq Re \leq 4000$ la linea di colorante perdeva la sua stazionarietà e si propagava lungo una traiettoria ondulata con caratteristiche dipendenti dal tempo. In questo regime transizionale, tuttavia la traccia di colorante preservava la sua coerenza spaziale rimanendo confinata in una linea sottile.

Al contrario, per $Re \geq 4000$, dopo un tratto iniziale con oscillazioni di ampiezza crescente la traccia d'inchiostro veniva diffusa vigorosamente in tutta la sezione trasversale del tubo fino a distribuirsi omogeneamente in tutto il flusso. Quest'ultimo regime è detto

¹Questo risultato è stato determinato utilizzando il valore del fattore d'attrito f determinato dal diagramma di Moody ipotizzando una rugosità relativa delle superfici del tubo pari a $\epsilon/D = 10^{-3}$.

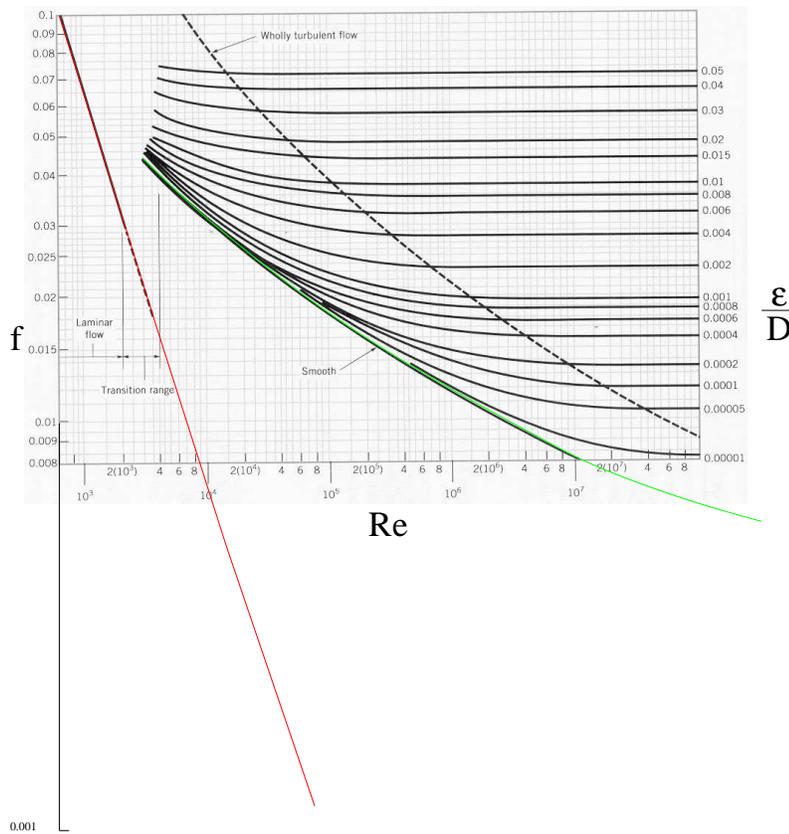


Figura 1.1: Diagramma di Moody con evidenziata la retta che dà il fattore d'attrito f per un flusso laminare e la curva relativa al flusso in un tubo liscio

turbolento ed è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.

Un tipico esempio di segnale turbolento di velocità è mostrato in figura 1.3 da cui si vede che la velocità oscilla intorno ad un valore medio senza alcuna frequenza specifica. Un'altra caratteristica comune a tutti i flussi turbolenti è che se si ripete lo stesso esperimento e si misura la stessa quantità nello stesso punto per lo stesso intervallo temporale si ottengono dei segnali notevolmente differenti se confrontati istantaneamente mentre essi hanno le stesse caratteristiche statistiche (valore medio, deviazione standard, etc.).

Questa osservazione sembra a prima vista inconciliabile con la natura delle equazioni che governano il fenomeno, cioè le equazioni di Navier–Stokes; essendo infatti le equazioni di tipo deterministico ed avendo condizioni iniziali ed al contorno definite si ha che anche la soluzione deve essere deterministica nello spazio e nel tempo. Questo dilemma è stato risolto da Lorenz che nel 1963 mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti ².

A tale scopo si consideri il sistema di equazioni

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (1.1)$$

²Questo esempio è stato preso dal testo 'Turbulent Flows' by S.B. Pope, Cambridge Univ. Press, 2000).

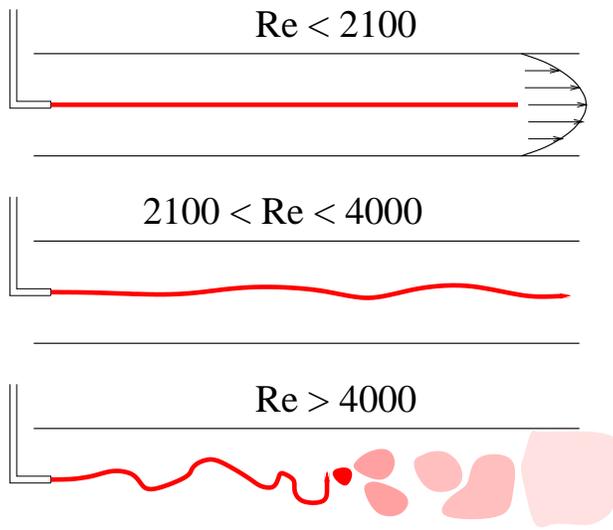


Figura 1.2: Disegno schematico dell'esperimento di Reynolds.

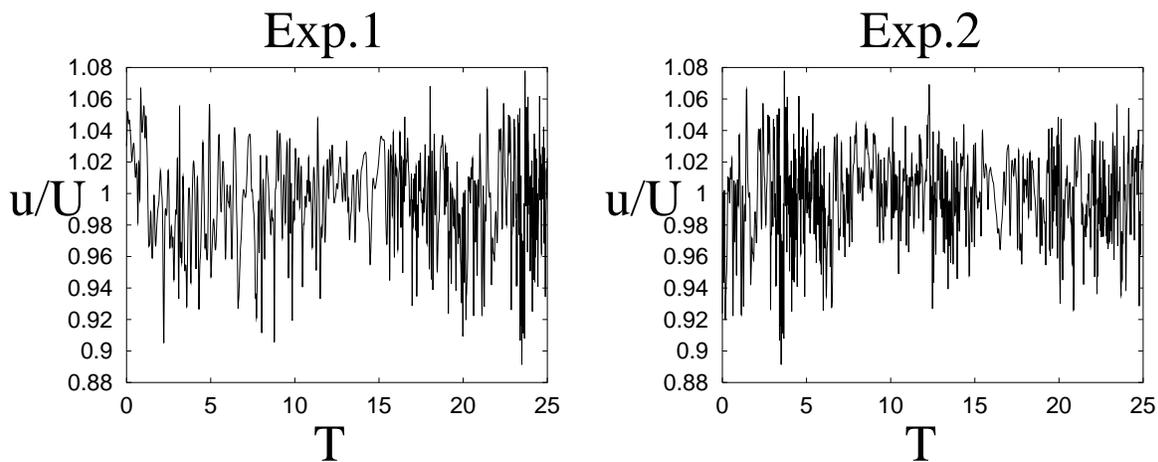


Figura 1.3: Segnali turbolenti di velocità per due realizzazioni successive dello stesso esperimento.

$$\dot{y} = \rho x - y - xz,$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy,$$

in cui i parametri valgono $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 35$ con le condizioni iniziali $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.1$ e $z(0) = 0.3$; la soluzione di questo sistema è riportata in figura 1.4 dove il tempo è il parametro lungo la curva si può osservare il noto attrattore di Lorenz. In figura 1.5, viene riportata invece con una linea continua l'andamento temporale per una della variabile $y(t)$ del sistema (1.1).

Se, lasciando tutto invariato, si considerano le condizioni iniziali $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.100001$ e $z(0) = 0.3$ si nota che dopo un intervallo di tempo iniziale (in questo caso $t \geq 15$ ma il valore dipende dalle condizioni iniziali e dai parametri σ , β e ρ) le due soluzioni differiscono nei valori istantanei e possono essere confrontate solo nei valori medi e nell'ampiezza delle fluttuazioni (figura 1.5, linea tratteggiata).

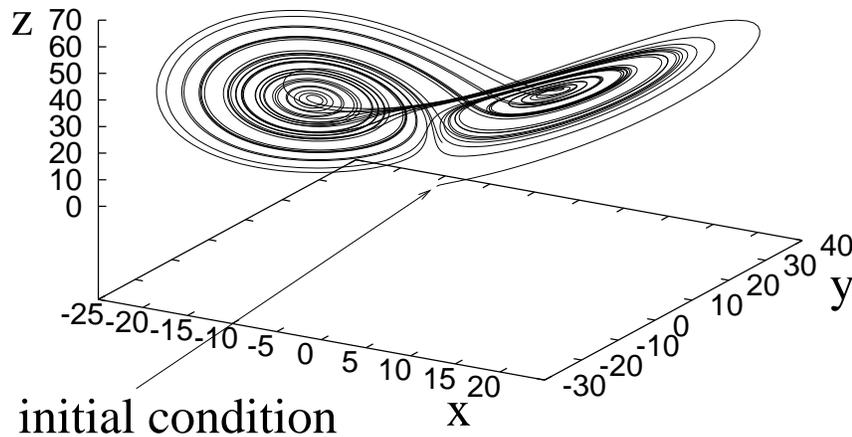


Figura 1.4: Attrattore di Lorenz nello spazio tridimensionale $x-y-z$.

Facendo un parallelo con le equazioni di Navier–Stokes possiamo annoverare tra i parametri iniziali sicuramente il campo di velocità, la pressione e la geometria del condotto, ma anche la distribuzione iniziale di temperatura (che determina la viscosità del fluido) la presenza di eventuali impurità e le condizioni di finitura superficiale del tubo. Questi ultimi parametri non possono essere controllati in modo arbitrariamente preciso e ciò determina (attraverso la non linearità delle equazioni) la dinamica non deterministica precedentemente descritta. In altre parole, per quanto si cerchi di mantenere controllati tutti i parametri di un esperimento è impossibile che due relizzazioni successive dello stesso fenomeno abbiano le condizioni iniziali replicate con una precisione infinita e ciò porta inevitabilmente, per numeri di Reynolds sufficientemente grandi, a soluzioni divergenti nel tempo.

I termini non lineari sono anche gli artefici della produzione di fluttuazioni ‘locali’ di velocità che comportano la generazione di strutture fluidodinamiche di piccola scala. Riconsiderando infatti l’esempio del flusso nel condotto, ci si convince facilmente che la differenza di pressione imposta Δp fornisce energia solamente al moto medio, mentre la dispersione dell’inchiostro in tutto il flusso richiede l’azione di strutture piccole rispetto al diametro del tubo in grado di miscelare localmente il colorante con il fluido non marcato; è lecito quindi chiedersi come viene trasferita l’energia dal moto a grande scala fino alle strutture più piccole. Nella sezione successiva verrà trattata questa fenomenologia, prima da un punto di vista fisico e quindi con un modello matematico semplificato.

1.2 cascata di energia e dissipazione

Il processo di trasferimento di energia dalle grandi strutture vorticosi verso scale sempre più piccole che ne causano la dissipazione è un fenomeno che osserviamo quotidianamente

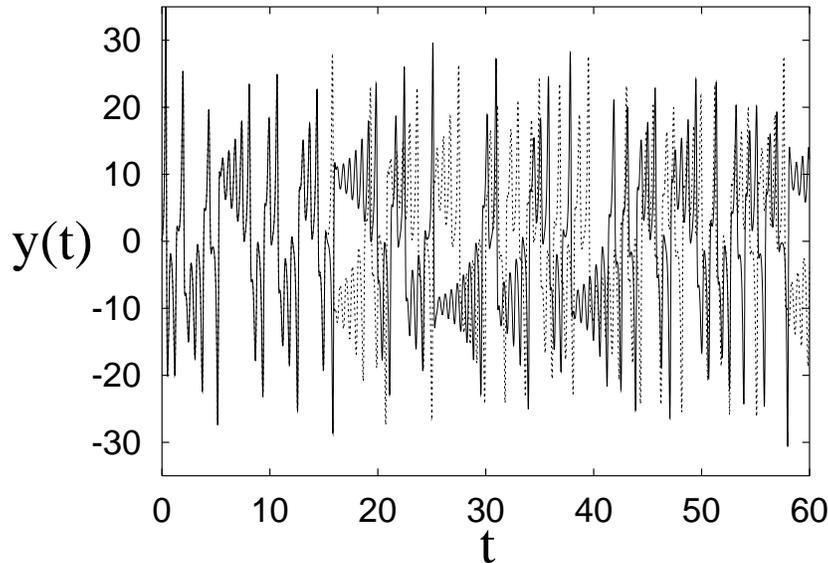


Figura 1.5: Evoluzione temporale della variabile $y(t)$ soluzione dell'equazione di Lorentz: — condizioni iniziali originali, condizioni iniziali perturbate.

in molte azioni usuali. Quando per esempio misceliamo il latte con il caffè in una tazza, sappiamo di dover agitare il liquido con un cucchiaino per ottenere un cappuccino; osservando però il l'evento con un "occhio fluidodinamico" si comprende che per ottenere un miscelamento omogeneo bisogna che vengano generate delle scale di moto tanto piccole da portare a contatto a livello microscopico le particelle fluide di latte e quelle del caffè. Le dimensioni di un cucchiaino non sono certamente compatibili con un miscelamento microscopico, ci deve quindi essere un meccanismo che avviene all'interno del fluido tale da trasportare l'energia inizialmente contenuta in grandi vortici (delle dimensioni del cucchiaino e della tazza) fino a dimensioni tali da far avvenire il miscelamento. D'altra parte, a miscelamento avvenuto il cappuccino non conserva alcuna traccia del moto iniziale evidenziando che l'energia cinetica impartita al sistema è stata completamente dissipata a causa dell'attrito³. Ad ulteriore conferma del fatto che è necessario il moto a piccole scale per ottenere la miscelazione completa si può osservare cosa avviene sulla superficie di un cappuccino del bar. In quel caso, la presenza di schiuma non consente la generazione in superficie di moti a piccole scale e, come conseguenza, la schiuma del latte e del caffè formano un intricato disegno di spirali intrecciate, traccia della storia temporale del miscelamento, che ancora permettono di distinguere i due fluidi separatamente (figura 1.6).

Fenomeni del tutto analoghi avvengono quando si mescolano due colori di una vernice per ottenerne un terzo, oppure quando combustibile e comburente si portano a contatto

³Un'analisi completa di questo flusso evidenzerebbe che solo una parte dell'energia impartita al fluido dal cucchiaino viene dissipata dalla turbolenza del vortice centrale in rotazione. Ciò accade in quanto l'attrito tra fluido e pareti della tazza agiscono in modo più efficiente ed in aggiunta, se si considera che mescolando del fluido in una tazza si genera una rotazione di tutto il sistema, si deve considerare anche l'Ekman layer (ossia uno strato limite aggiuntivo che si produce nei flussi rotanti) che supera tutti gli altri fenomeni nella dissipazione dell'energia.

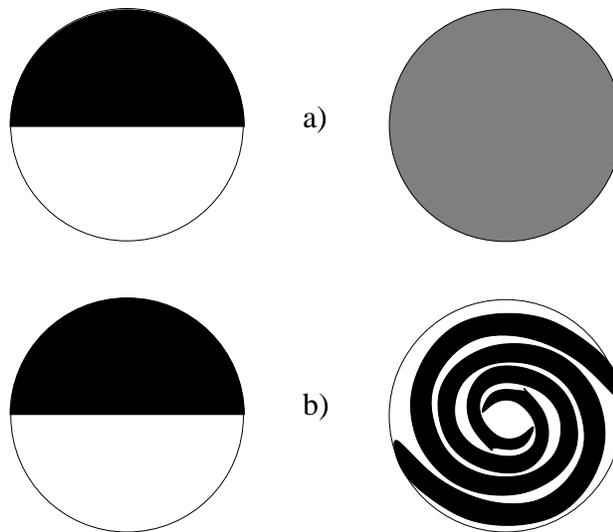


Figura 1.6: Mescolamento tra due fluidi inizialmente segregati (a sinistra) in presenza di turbolenza *a)* ed in sua assenza *b)*.

in un motore a razzo prima di far avvenire la combustione. In tutti questi casi si utilizza la turbolenza come un utile meccanismo per mescolare sempre più finemente due fluidi fino ad ottenere una miscela nella quale i costituenti originari non sono più individuabili. Alla base di questo fenomeno c'è l'*instabilità* dei vortici grandi dimensioni che si frammentano in strutture sempre più piccole producendo la *cascata* di energia dalle grandi verso le piccole scale. Riferendoci infatti alla figura 1.7 possiamo pensare che un vortice di dimensione L durante la sua rotazione, è sottoposto a delle instabilità che ne alterano la forma fino alla sua rottura in più strutture le cui dimensioni sono una frazione α (con $\alpha < 1$) di quella originale originale. Le prime, a loro volta hanno delle instabilità che producono vortici di dimensioni $L'' = \alpha L' = \alpha^2 L$, e così via. Naturalmente questo scenario è possibile a patto che il tempo di sopravvivenza della singola struttura sia superiore al tempo caratteristico di crescita delle instabilità. Un'analisi quantitativa della fenomenologia descritta richiederebbe la conoscenza della forma iniziale della struttura e del meccanismo di crescita dell'instabilità; tuttavia osservando che le strutture più piccole avranno sopravvivenza più breve mentre la crescita delle instabilità sarà la stessa a tutte le scale ⁴ possiamo asserire che dopo un certo numero di 'frammentazioni' il meccanismo di cascata si arresterà in quanto le strutture avranno dimensioni così piccole da venire dissipate prima che l'instabilità abbia avuto il tempo di amplificarsi. Il fatto che sia la dissipazione a porre un limite alla cascata di energia ci fa intuire che la viscosità del flusso deve avere un ruolo importante nella dinamica della turbolenza.

I concetti di cascata di energia e dissipazione viscosa verranno resi più rigorosi in seguito parlando della turbolenza omogenea ed isotropa (§1.7). In tale contesto, però, bisognerà analizzare le equazioni complete di Navier–Stokes che sono notevolmente complesse e non favoriscono una comprensione intuitiva della dinamica di base della turbolenza. Ci chiediamo quindi se sia possibile visualizzare matematicamente i fenomeni precedentemente

⁴Ciò presuppone che il tipo di instabilità sia lo stesso per le strutture di tutte le dimensioni e che la velocità di crescita dell'instabilità sia indipendente o almeno scarsamente influenzata dalla viscosità.

descritti mediante un modello ridotto che contenga le principali caratteristiche della turbolenza ma sia al contempo matematicamente semplice: tale modello è rappresentato dall'equazione di Burgers che verrà analizzata nella sezione successiva.

1.3 equazione di Burgers

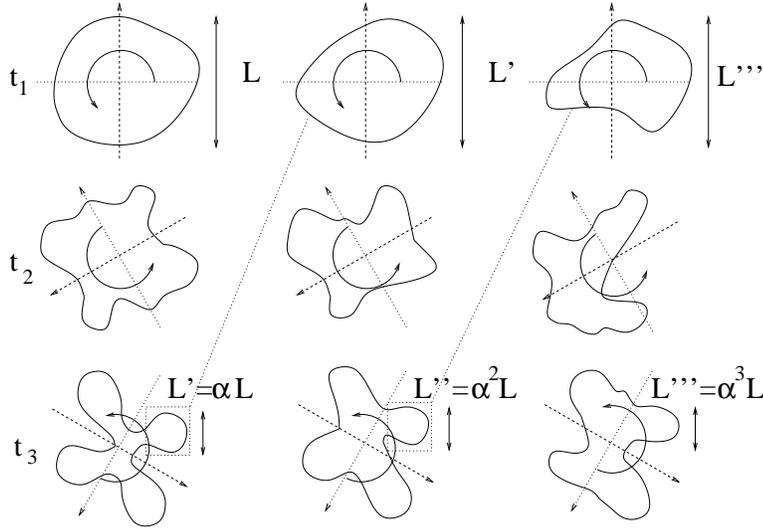


Figura 1.7: Disegno schematico dell'instabilità di un vortice che lo suddivide in strutture sempre più piccole (meccanismo di cascata).

Consideriamo l'equazione di Burgers, un'equazione monodimensionale, che ha tutte le caratteristiche principali delle equazioni di Navier–Stokes tranne il termine di pressione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

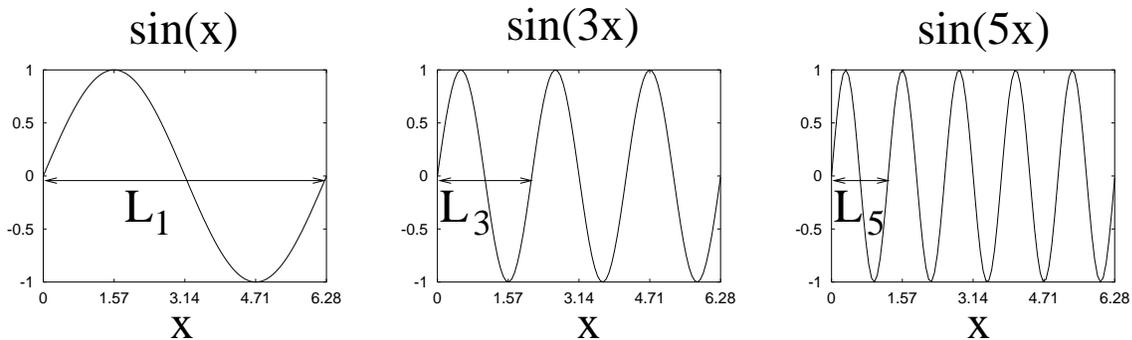


Figura 1.8: Esempio di variazione di lunghezza d'onda L_k con il numero d'onda k .

Immaginiamo ora che l'intervallo di definizione della sua soluzione sia $x \in [0, 2\pi)$ e che la soluzione sia periodica in x con media nulla; con queste ipotesi è possibile espandere la

$u(x, t)$ con una serie di seni

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx), \quad (1.3)$$

in cui la dinamica temporale della soluzione è tenuta in conto dai coefficienti $A_k(t)$ mentre la base di seni soddisfa automaticamente le condizioni al contorno. A titolo di esempio vengono riportate in figura 1.8 le funzioni seno per $k = 1, 3, 5$ da cui si può notare che la lunghezza della singola onda (detta appunto lunghezza d'onda) è pari ad $L_k = 2\pi/k$ e che il gradiente della curva diventa tanto più ripido quanto più aumenta k . Con questo semplice esempio abbiamo quindi imparato che l'indice k ci dà l'informazione sulla dimensione della struttura di base (ossia la singola onda) e sui gradienti spaziali che, rispettivamente, diminuiscono ed aumentano al crescere di k .

Dopo aver fatto questa precisazione, possiamo utilizzare la sommatoria (1.3) per esprimere i singoli termini della (1.2) ed ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx), & (1.4) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k \cos(kx), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx), \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_l(t) A_m(t) m \sin(lx) \cos(mx) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \}. \end{aligned}$$

Questi termini possono essere risostituiti nell'equazione (1.2) che diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \} = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx). \quad (1.5)$$

Osservando ora la proprietà di ortogonalità delle funzioni seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \pi(\delta_{pq} - \delta_{-p,q}),$$

abbiamo che moltiplicando l'equazione (1.5) per $\sin(kx)$ ed integrando tra 0 e 2π si ottiene

$$\dot{A}_k(t) \pi + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi A_l(t) A_m(t) m}{2} = -\nu k^2 A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

essendo la doppia sommatoria ristretta ai soli m ed l tali che $l+m = k$, $l-m = k$, $l-m = -k$ ed $l+m = -k$ (quest'ultima condizione non dà alcun contributo in quanto nel nostro esempio porta solamente ad $l < 0$) ossia

$$\dot{A}_k + \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{A_m A_{k-m}}{2} + \frac{A_m A_{k+m}}{2} - \frac{A_m A_{m-k}}{2} \right) = -\nu k^2 A_k, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.6)$$

L'equazione appena trovata indica che le variazioni nel tempo della quantità di moto nel modo k -esimo (\dot{A}_k) hanno due cause, una lineare ed una non lineare. Per comprendere meglio l'effetto dei due termini sorgente immaginiamo per un istante di cancellare dall'equazione di partenza (1.2) i termini non lineari, ottenendo che la (1.6) diventa

$$\dot{A}_k = -\nu k^2 A_k, \implies A_k(t) = A_k(0)e^{-\nu k^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1.7)$$

da cui si nota che ogni componente A_k decresce inesorabilmente nel tempo tanto più rapidamente quanto più è viscoso il fluido e quanto più è piccola la struttura (ossia quanto più grande è k). L'altro risultato notevole è che in assenza di termini non lineari l'evoluzione di ogni modo A_k è indipendente dagli altri; ciò implica che una condizione iniziale che contenesse solamente un numero finito di $A_k(0)$ (per esempio $k = 1, 3, 8$) evolverebbe unicamente con i modi 1, 3, 8 ognuno decrescendo nel tempo indipendentemente dagli altri secondo la soluzione appena ricavata. In figura 1.9 è riportata la soluzione in termini di $u(x, t)$ e di $A_k(t)$ dell'equazione (1.7) in cui si vede che effettivamente solo i coefficienti A_k presenti nella condizione iniziale determinano la dinamica del fenomeno e che questi decrescono nel tempo tanto più rapidamente quanto più è grande k .

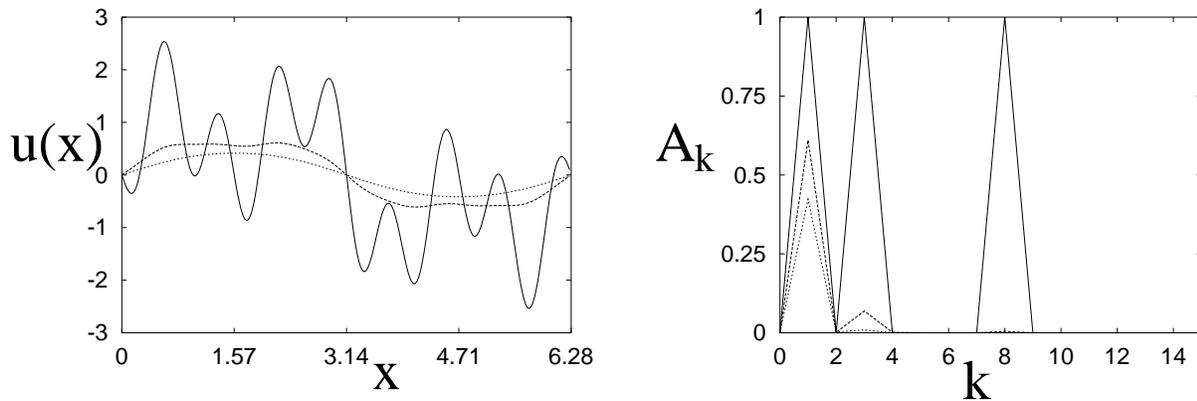


Figura 1.9: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers (senza i termini non lineari) $\nu = 10$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

Al contrario, la presenza dei termini non lineari modifica completamente la dinamica del fenomeno, trasferendo quantità di moto dalla componente k alle componenti $k - m$, $k + m$ ed $m - k$. Per illustrare più in dettaglio questo concetto, immaginiamo che il numero di termini della sommatoria (1.3) sia limitato a 3 invece che infinito. L'equazione (1.6) scritta per componenti risulterebbe allora:

$$\dot{A}_1 + (A_1 A_0 + A_1 A_2 - A_1 A_0) \frac{1}{2} + (A_2 A_{-1} + A_2 A_3 - A_2 A_1) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-2} + A_3 A_4 - A_3 A_2) \frac{3}{2} = -\nu A_1, \quad (1.8)$$

$$\dot{A}_2 + (A_1 A_1 + A_1 A_3 - A_1 A_{-1}) \frac{1}{2} + (A_2 A_0 + A_2 A_4 - A_2 A_0) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-1} + A_3 A_5 - A_3 A_1) \frac{3}{2} = -\nu 4 A_2,$$

$$\dot{A}_3 + (A_1 A_2 + A_1 A_4 - A_1 A_{-2}) \frac{1}{2} + (A_2 A_1 + A_2 A_5 - A_2 A_{-1}) \frac{2}{2} + (A_3 A_0 + A_3 A_6 - A_3 A_0) \frac{3}{2} = -\nu 9 A_3,$$

e osservando che risulta $A_p \equiv 0$ per $p \leq 0$ e $p > 3$ si riducono a

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 - \frac{A_1 A_2}{2} - \frac{A_2 A_3}{2} &= -\nu A_1, \\ \dot{A}_2 + \frac{A_1 A_1}{2} - A_1 A_3 &= -4\nu A_2 \\ \dot{A}_3 + \frac{3A_1 A_2}{2} &= -9\nu A_3. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se ora consideriamo una condizione iniziale contenente solo A_1 (per esempio un seno come il primo pannello di figura 1.10) si vede che a causa del termine $A_1 A_1/2$ risulterà nell'istante iniziale $\dot{A}_2 \neq 0$ indicando che parte della quantità di moto viene trasferita nella componente A_2 . D'altra parte, quando risulta $A_2 \neq 0$, anche il termine $3A_1 A_2/2$ verrà attivato nell'equazione per A_3 e quindi anche la terza struttura verrà interessata dal moto del flusso. Se ricordiamo quindi che al crescere di k diminuisce la dimensione della struttura, abbiamo che i termini non lineari hanno come effetto quello di trasferire il 'moto' (e quindi l'energia) dalle strutture grandi a quelle più piccole⁵ con il meccanismo di 'cascata' dai moti a grande scala verso quelli più piccoli e locali.

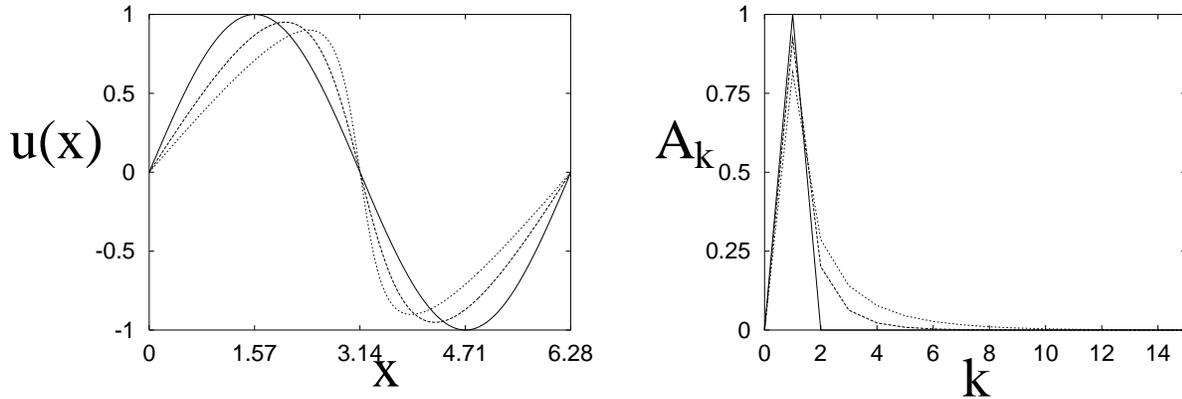


Figura 1.10: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-1}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

In particolare se nell'esempio precedente invece di limitare a 3 il numero di termini ne avessimo infiniti, avremmo un trasferimento di energia verso strutture sempre più piccole (k grandi) in un tempo tanto più lungo quanto più distante risulterebbe k dal modo $k = 1$ contenente energia nella condizione iniziale. Questa osservazione ci pone quindi un nuovo interrogativo e cioè se il trasferimento dell'energia procede indefinitamente fino a $k = \infty$ oppure se interviene qualche meccanismo in grado di bloccare questa cascata.

La risposta è fornita dalla soluzione analitica (1.7) da cui si vede come la viscosità diminuisca rapidamente il contenuto energetico del modo k -esimo all'aumentare di k . Se

⁵Ciò non è vero nella turbolenza bidimensionale dove l'effetto combinato dei termini non lineari ed i termini viscosi crea un trasferimento medio in direzione opposta rispetto al caso monodimensionale e tridimensionale. Questo spiega la formazione di strutture di grande scala nell'atmosfera e negli oceani (grandi circolazioni e correnti).

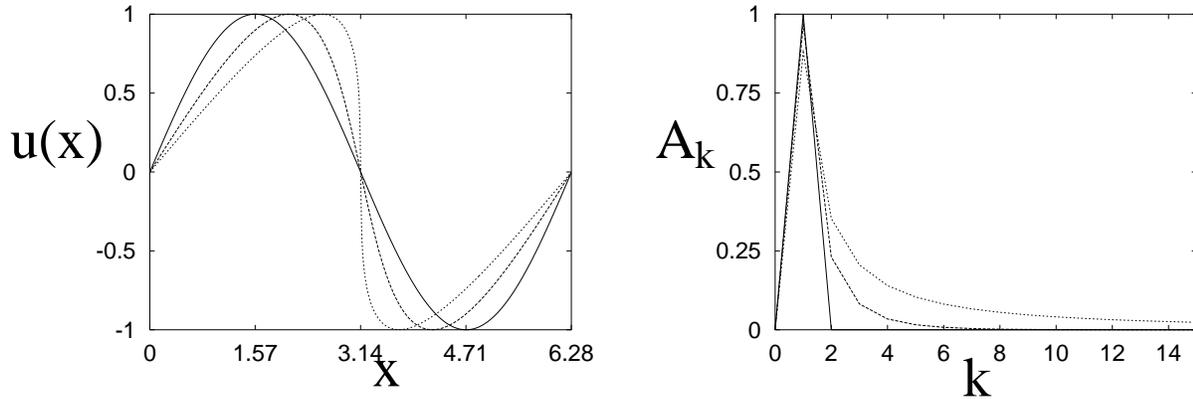


Figura 1.11: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-3}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

in particolare questa diminuzione è sufficientemente rapida, si può inibire il trasferimento di energia verso numeri d'onda k elevati semplicemente perché l'energia viene dissipata prima ancora che riesca ad essere trasferita. In pratica la viscosità opera un 'taglio' sulla dimensione minima della struttura che è possibile generare (o sul k massimo) in un flusso e questo taglio dipende sia dal valore della viscosità ν sia da quanto velocemente l'energia viene trasferita da un modo all'altro; si potrebbe verificare, infatti, che il flusso di energia verso le piccole scale è così rapido che la viscosità è costretta a 'spostare' il k di taglio verso valori maggiori dove può agire più efficientemente.

Le considerazioni appena fatte sono mostrate mediante due esempi in cui si riporta la soluzione dell'equazione di Burgers, entrambe con la medesima condizione iniziale, ma con due diversi valori di viscosità. Confrontando le figure 1.10 e 1.11 si nota come nel caso a viscosità minore la curva presenti un gradiente più ripido in corrispondenza del punto $x = \pi$. Ragionando in termini di A_k abbiamo quindi che la soluzione con viscosità piccola conterrà A_k con k più elevati rispetto alla soluzione più viscosa. Ciò è confermato dai pannelli di destra delle figure 1.10 e 1.11 che riportano l'evoluzione temporale della distribuzione degli A_k , consistentemente con gli argomenti precedentemente discussi.

È ora interessante osservare che se ognuna delle equazioni (1.9) viene moltiplicata per la propria A_i , notando che risulta $A_i \dot{A}_i \equiv (\dot{A}_i^2/2)$, si ottiene

$$\frac{\dot{A}_1^2}{2} - \frac{A_1^2 A_2}{2} - \frac{A_1 A_2 A_3}{2} = -\nu A_1^2, \quad (1.10)$$

$$\frac{\dot{A}_2^2}{2} + \frac{A_1^2 A_2}{2} - A_1 A_2 A_3 = -4\nu A_2^2$$

$$\frac{\dot{A}_3^2}{2} + \frac{3A_1 A_2 A_3}{2} = -9\nu A_3^2,$$

che sommata membro a membro dà

$$\frac{\dot{A}_1^2 + \dot{A}_2^2 + \dot{A}_3^2}{2} = -\nu(A_1^2 + 4A_2^2 + 9A_3^2). \quad (1.11)$$

Questa relazione suggerisce che il contenuto ‘energetico’ del sistema $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)/2$ non viene alterato dai termini non lineari il cui unico compito è di ridistribuire l’energia tra i vari modi A_i . Al contrario i termini viscosi fanno diminuire l’energia attraverso un processo puramente dissipativo (perché contribuiscono al bilancio solo con variazioni negative) che è tanto più efficace quanto più piccole sono le scale contenute nel sistema.

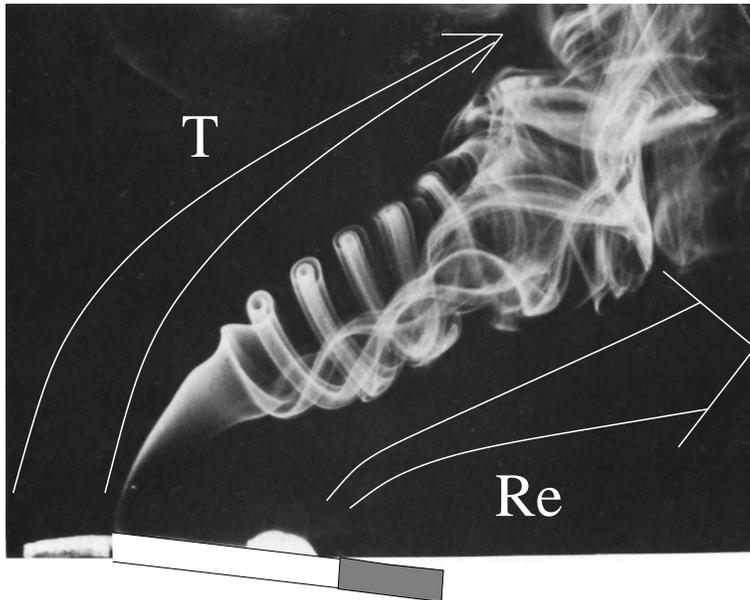


Figura 1.12: Evoluzione del fumo di sigaretta che risulta laminare, transizionale e quindi turbolento con l’aumentare della distanza dal punto di rilascio.

Riconsiderando con quest’ottica l’esperimento di Reynolds per il flusso all’interno di tubi, si comprende che se il numero di Reynolds è piccolo ($Re < 2100$) gli effetti viscosi prevalgono su quelli inerziali (non lineari) e, essendo inibito ogni trasferimento di energia, il moto medio a grande scala non degenera in strutture più piccole. Al contrario, quando gli effetti inerziali prevalgono su quelli viscosi ($Re > 4000$) il trasferimento tra i modi sarà attivato ed il moto inizialmente uniforme produrrà strutture fluidodinamiche più piccole.

La discussione precedente permette ora di comprendere facilmente il fenomeno osservato quotidianamente e riportato in figura 1.12 in cui del fumo di sigaretta si genera in modo estremamente laminare e stazionario, oscilla per un breve tratto e quindi diventa irregolare e caotico generando ampie volute dalla dinamica imprevedibile. Tutto ciò si spiega considerando che in prossimità della sigaretta la temperatura del fumo è circa 400–600 °C e la viscosità cinematica dell’aria è circa 7 volte più grande del valore a temperatura ambiente. In aggiunta, appena il fumo si libera dalla sigaretta, la forza di galleggiamento prodotta dall’espansione termica del gas non ha ancora avuto il tempo di accelerare il fluido che avrà una bassa velocità; la conseguenza è che il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$ risulterà piccolo ed il flusso laminare. Al contrario, lontano dalla sigaretta, il fumo avrà assunto una temperatura solo poco superiore a quella dell’aria circostante ed avrà raggiunto la velocità limite comportando un numero di Reynolds sensibilmente superiore rispetto al valore iniziale che permette la transizione alla turbolenza. Queste osservazioni giustificano il fatto che il fumo abbia un’evoluzione laminare appena viene

prodotto mentre la sua dinamica diviene progressivamente più disordinata allontanandosi dalla sigaretta fino a raggiungere un comportamento turbolento quando il suo numero di Reynolds aumenta abbastanza da permettere il fenomeno della cascata dell'energia.

Queste ultime osservazioni costituiscono la base di partenza della teoria della turbolenza tridimensionale che illustreremo brevemente in una sezione successiva.

1.4 significato fisico dei termini delle equazioni di Navier–Stokes

La fisica dei fenomeni descritti in precedenza, ossia il trasferimento di energia dalle grandi alle piccole scale dove viene infine dissipata, è contenuta interamente nelle equazioni di Navier–Stokes; in questa sezione deriveremo un'espressione per l'evoluzione temporale dell'energia cinetica in un volume di fluido che ci consentirà di identificare l'effetto dei singoli termini delle equazioni sull'energia oltre che il suo comportamento globale.

Partendo dall'equazione di bilancio della quantità di moto per un flusso viscoso ed incomprimibile,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.12)$$

è possibile scrivere un'equazione di bilancio per l'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = \frac{1}{2} \rho \int_V |\mathbf{u}|^2 dV, \quad (1.13)$$

moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} l'equazione (1.12). Risultando infatti

$$\frac{dK}{dt} = \rho \int_V \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV, \quad (1.14)$$

si ricava il termine di derivata temporale dalla (1.12) ed, utilizzando l'equazione di conservazione della massa che per flussi incomprimibili si scrive $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, si giunge a

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \int_V [-\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] dV. \quad (1.15)$$

Alcuni termini di questa equazione si possono nuovamente trasformare con la conservazione della massa ottenendo

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2), \quad \mathbf{u} \cdot \nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - |\nabla \mathbf{u}|^2. \quad (1.16)$$

I termini in questa forma consentono di applicare il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \int_V [-\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}] dV &= \int_V [-\frac{\rho}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2) - \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mu |\nabla \mathbf{u}|^2] dV \\ &= \int_S [-\frac{\rho}{2} (\mathbf{u}|\mathbf{u}|^2) - p\mathbf{u} + \rho \nu (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \rho \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV = - \int_V \rho \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV, \end{aligned} \quad (1.17)$$

dove S è la superficie del volume V e l'integrale di superficie si è posto uguale a zero in quanto le componenti di velocità o si annullano all'infinito oppure in corrispondenza del contorno ⁶. Mettendo quindi insieme i termini precedentemente manipolati si può scrivere

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \rho \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 dV. \quad (1.18)$$

L'ultimo termine di questa equazione contiene la definizione della 'velocità di dissipazione dell'energia cinetica per unità di massa'

$$\epsilon = \nu |\nabla \mathbf{u}|^2, \quad (1.19)$$

per cui l'equazione (1.18) si può riscrivere nella forma compatta

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \rho \epsilon dV. \quad (1.20)$$

Questa relazione permette di fare alcune interessanti osservazioni sulle equazioni di Navier–Stokes che serviranno come base di partenza per l'analisi della dinamica della turbolenza. Nell'equazione (1.20) sono presenti solamente i termini derivati dalle forze di volume e dal termine viscoso, mentre non è rimasta alcuna traccia dei termini non lineari e di pressione. Poiché K è l'energia cinetica del sistema fluido integrata su V , ciò implica che i termini convettivi e di pressione non alterano il bilancio globale di energia ma agiscono solo sul suo trasferimento, sia da un punto all'altro dello spazio, sia attraverso le varie scale di moto del flusso. L'altra osservazione è legata alla definizione (1.19) di ϵ che, risultando definita positiva, indica la continua diminuzione di energia cinetica del sistema a causa di questo termine. In altre parole, se nella relazione (1.20) non ci fosse il termine contenente \mathbf{f} allora l'energia cinetica diminuirebbe inesorabilmente nel tempo fino ad ottenere un flusso in quiete. Al contrario se un flusso è statisticamente stazionario ⁷ allora la sua energia cinetica è costante e l'equazione (1.20) implica che $\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV = \int_V \rho \epsilon dV$ ossia, l'energia immessa nel sistema in quantità costante nel tempo (potenza costante) viene dissipata con la stessa velocità dalla viscosità del fluido.

Data la definizione (1.19) di ϵ si potrebbe pensare che quando la viscosità tende a zero, ossia per numeri di Reynolds molto elevati, il termine viscoso diventa trascurabile e l'energia cinetica si conserva in assenza di lavoro delle forze di massa. L'evidenza sperimentale ha mostrato che le cose non stanno in questo modo in quanto quando la viscosità diminuisce decresce anche la dimensione minima delle scale di moto che si generano nel flusso e quindi aumentano i gradienti. Questo fenomeno fa sì che il termine viscoso non sia mai trascurabile per quanto elevato sia il numero di Reynolds rendendo la turbolenza un fenomeno intrinsecamente dissipativo. D'altra parte, vedendola da un

⁶L'integrale di superficie è nullo anche se le condizioni al contorno sono periodiche in quanto prese due superfici contrapposte si avrebbe lo stesso valore per qualunque grandezza ma normali opposte. In casi del tutto particolari, tuttavia, come superfici mobili o traspiranti, l'integrale di superficie in (1.17) non si annulla ed il suo contributo deve essere tenuto in conto nel bilancio globale.

⁷La turbolenza è un fenomeno di natura intrinsecamente non stazionaria, la sua stazionarietà deve quindi sempre essere intesa in senso statistico. Considerando infatti la definizione (1.13) per l'energia cinetica K , il fatto che questa risulti costante nel tempo non preclude alla velocità \mathbf{u} di fluttuare nel tempo all'interno del volume V .

punto di vista prettamente matematico, la cancellazione del termine viscoso nell'equazione (1.12) abbassa di grado il suo ordine e ne cambia la fisica ⁸.

Prima di concludere questa sezione vogliamo notare a margine che solamente delle forze \mathbf{f} non conservative possono contribuire al bilancio di energia cinetica. Infatti, se \mathbf{f} contenesse solo forze conservative allora si potrebbe porre $\mathbf{f} = -\nabla G$ ed, utilizzando l'incomprimibilità si potrebbe porre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} = -\mathbf{u} \cdot \nabla G = -\nabla \cdot (\mathbf{u}G)$. Il teorema della divergenza permetterebbe quindi di trasformare l'integrale di volume $\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV$ nell'integrale di superficie $-\int_S \mathbf{u}G \cdot \mathbf{n} dS$ che si annullerebbe sotto le stesse condizioni che hanno permesso di annullare i termini in (1.16).

1.5 vorticità e cascata dell'energia

Nelle sezioni precedenti è stata acquisita a livello intuitivo l'idea che un flusso turbolento è caratterizzato dall'interazione di vortici di dimensione variabile attraverso i quali fluisce l'energia (preferenzialmente verso le strutture più piccole in tre dimensioni) che viene dissipata in calore dalla viscosità. In tale contesto appare evidente che un flusso che non contenga vorticità non può essere turbolento in quanto vengono a mancare i vortici che costituiscono l'ingrediente essenziale di tutta la dinamica precedentemente descritta. D'altra parte, dalle nozioni di base della fluidodinamica, è ben noto che un flusso irrotazionale, con azioni viscosi trascurabili, forze di massa conservative ed in condizioni di barotropicità, rimane indefinitamente irrotazionale (teorema di Kelvin) e può essere descritto dalla teoria dei flussi potenziali. In questo caso, la velocità deriva dal gradiente di un potenziale scalare $\mathbf{u} = \nabla \phi$ (il cui rotore è identicamente nullo $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \phi \equiv 0$) e l'incomprimibilità è assicurata dal soddisfacimento dell'equazione di Laplace $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$. Poiché nell'equazione di Laplace non c'è dipendenza esplicita dal tempo, un'eventuale non stazionarietà del flusso può essere contenuta unicamente nelle condizioni al contorno alle quali il potenziale si adegua istante per istante ed allo stesso modo si comporta la velocità vista la relazione di natura puramente cinematica tra potenziale e velocità. In altre parole, in un flusso potenziale ogni configurazione istantanea di velocità è indipendente dalle precedenti e le successive ed in tali condizioni non possono emergere spontaneamente le configurazioni complesse dei flussi turbolenti. La situazione è completamente ribaltata per un flusso rotazionale e lo scopo di questa sezione è mostrare come la dinamica della turbolenza sia essenzialmente la dinamica della vorticità e da essa dipendono le differenze rilevanti tra configurazioni bidimensionali e tridimensionali.

Per derivare un'equazione di evoluzione della vorticità basta ricordare la sua definizione $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ e fare quindi il rotore dell'equazione di bilancio della quantità di moto ⁹ per

⁸Questo è il motivo per cui le equazioni di Eulero non sono il limite delle equazioni di Navier–Stokes per $Re \rightarrow \infty$. Infatti la viscosità moltiplica il termine di ordine più elevato e trascurare la dissipazione cambia l'ordine dell'intera equazione. A titolo di esempio non è così nel caso dell'oscillatore armonico di massa m , rigidità k e coefficiente d'attrito μ proporzionale alla velocità. Per questo sistema, infatti, l'equazione del moto è $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$ e la cancellazione del termine d'attrito non cambia la natura dell'equazione.

⁹A tal fine, ricordiamo che il termine convettivo può essere scritto utilizzando l'accelerazione di

un flusso incomprimibile ottenendo:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \times \mathbf{f} + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}). \quad (1.21)$$

Sfruttando le proprietà commutative dei vari operatori e relazioni vettoriali note si può scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.22)$$

che è l'equazione del trasporto della vorticità. I termini a primo membro della (1.22) sono quelli della derivata materiale di $\boldsymbol{\omega}$ e quantificano la sua variazione per una particella fluida, misurata da un osservatore che si muove con la particella stessa. I termini a secondo membro sono invece le cause della variazione ed il primo termine rappresenta la diffusione, analogamente all'equazione della quantità di moto.

Riprendendo per un istante il parallelo con i flussi potenziali notiamo che in questo caso il trasporto della vorticità è determinato dal campo di velocità \mathbf{u} (attraverso la derivata materiale a primo membro) mentre la distribuzione di velocità è a sua volta determinata dal campo di vorticità attraverso l'equazione di Biot-Savart che, per flussi tridimensionali risulta:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dV + \nabla \phi, \quad (1.23)$$

in cui $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e l'ultimo termine a secondo membro tiene conto della componente potenziale di velocità, per esempio indotta dalla presenza di pareti. Il meccanismo di retroazione presente tra le equazioni (1.22) e (1.23), totalmente assente nei flussi potenziali, è la causa della generazione di campi fluidodinamici complessi (caotici) che caratterizzano la turbolenza.

1.5.1 dinamica tridimensionale

Dall'equazione (1.22) è evidente che il termine di pressione costituisce una sorgente di vorticità solo se ∇p non è parallelo a $\nabla \rho$ (flussi baroclini) mentre le forze di massa generano vorticità solo se sono non conservative (ossia se \mathbf{f} non è esprimibile come il gradiente di una funzione scalare). Anche escludendo queste eventualità l'equazione di trasporto della vorticità assume la forma

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.24)$$

Lagrange e che il rotore di un gradiente è identicamente nullo da cui

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \nabla \times \left(\nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}).$$

Utilizzando un'identità vettoriale si può porre ulteriormente

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

in cui gli ultimi due termini sono nulli, il primo in quanto la divergenza di un rotore è identicamente nulla, il secondo perché ipotizziamo per semplicità il flusso incomprimibile.

in cui \mathbf{E} è la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità¹⁰ mentre l'ultimo termine a secondo membro è il vortex stretching e continua ad essere presente come meccanismo di autoamplificazione della vorticità anche in assenza di forzanti esterne (e di pareti).

L'effetto del vortex stretching può essere meglio visualizzato scrivendone una componente, per esempio la componente x in un sistema di assi cartesiani, ed analizzando i vari termini:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \hat{x} = \omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (1.25)$$

Il primo termine agisce quando c'è un gradiente di velocità nella stessa direzione della vorticità ed avrà quindi un'azione di stiramento (vortex stretching). Riferendoci alla figura 1.13 vediamo che se un tubo fluido viene allungato, per la conservazione del momento angolare la sua velocità di rotazione deve aumentare e di conseguenza la vorticità. Questo meccanismo è quindi di autoamplificazione a causa dei gradienti di velocità e senza necessità di sorgenti esterne. Gli altri termini tendono invece a ruotare parte della vorticità preesistente da una componente all'altra a causa di gradienti trasversali di velocità (vortex tilting). Sempre riferendoci alla figura 1.13 vediamo infatti che in presenza di un gradiente di u_x nella direzione y una struttura contenente inizialmente solo ω_y dopo un certo tempo cambia direzione convertendo parte della sua ω_y in ω_x .

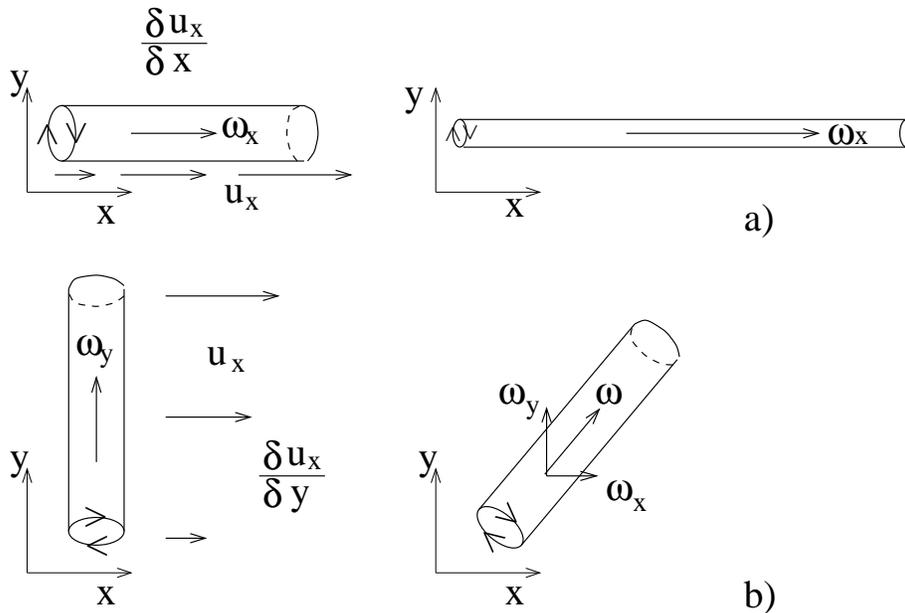


Figura 1.13: Schema del meccanismo di azione del termine di vortex stretching: *a)* vortex stretching, *b)* vortex tilting.

Poiché la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità \mathbf{E} può essere sicuramente messo in forma diagonale e nel sistema di riferimento degli autovettori (\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}) risulta

¹⁰In questo caso è stata sfruttata l'identità vettoriale

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

valida per qualunque vettore \mathbf{a} ; se in particolare $\mathbf{a} \equiv \boldsymbol{\omega}$ allora $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

$tr(\mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_a / \partial x_a + \partial u_b / \partial x_b + \partial u_c / \partial x_c = \alpha + \beta + \gamma = 0$, si ha che almeno uno degli elementi deve essere necessariamente positivo (trascurando il caso banale in cui gli elementi sono tutti nulli e quindi o il flusso ha una velocità costante ovunque o è tutto fermo). Per una configurazione come quella in figura 1.13a, supponendo che α sia l'autovalore positivo associato all'autovettore \mathbf{a} , l'equazione (1.24) in assenza dei termini viscosi diventa

$$\frac{\partial \omega_a}{\partial t} = \alpha \omega_a \quad \Longrightarrow \quad \omega_a(t) = \omega_a(0) e^{\alpha t}. \quad (1.26)$$

Eventuali componenti di vorticità nelle direzioni \mathbf{b} e \mathbf{c} decadono se gli autovalori relativi β e γ sono negativi, tuttavia il fatto che almeno α debba essere positivo assicura che la vorticità possa essere amplificata nel tempo. Riconsiderando il meccanismo delineato in figura 1.13a si nota come l'aumento di una componente di vorticità sia accompagnato necessariamente dalla diminuzione di sezione del tubo vorticoso, ossia una produzione di scale di moto sempre più piccole. La crescita esponenziale di vorticità ottenuta in (1.26) è conseguenza del fatto che l'equazione è stata privata del termine diffusivo. Da un punto di vista fisico, tale crescita indefinita è chiaramente impossibile anche in considerazione del fatto che prima o poi si avrebbero strutture così piccole da non rendere più applicabili le ipotesi di continuo. In realtà la presenza dei termini viscosi arresta la crescita esponenziale di ω_a molto prima che si verifichi tale eventualità ed, in particolare, si raggiunge uno stato di equilibrio in cui l'aumento di vorticità prodotto dall'allungamento assiale viene bilanciato dalla diffusione in direzione radiale. Questo bilanciamento produce una soluzione stazionaria (vortice di Burgers¹¹) in cui il raggio del vortice è dato da $r_B = \sqrt{\nu/\alpha}$; è interessante notare che in turbolenza omogenea ed isotropa, detto ω' il valore quadratico medio delle fluttuazioni di vorticità, risulta $\alpha \approx \omega' = \sqrt{\epsilon/\nu}$ da cui risulta $r_B = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ che è la definizione di scala di Kolmogorov discussa più in dettaglio in §1.7. Riassumendo, con l'esempio precedente abbiamo visto che nella dinamica della vorticità tridimensionale è presente un meccanismo di autoamplificazione della vorticità a cui è associata la produzione di scale di moto via via più piccole; tale produzione viene arrestata solo ad una dimensione caratteristica r_B dove vortex stretching e diffusione annullano reciprocamente i loro effetti.

1.5.2 dinamica bidimensionale

Gli argomenti appena esposti non possono più essere applicati ai flussi bidimensionali in quanto risulta $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv 0$ e l'assenza del termine di vortex stretching stravolge completamente la dinamica. La motivazione per lo studio della turbolenza bidimensionale, oltre

¹¹In un sistema di coordinate cilindriche r, θ, x dato un vettore velocità \mathbf{u} di componenti $-\alpha r/2, u_\theta(r), \alpha x$, che soddisfa automaticamente la condizione $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ per qualunque funzione $u_\theta(r)$, si può verificare facilmente che per un flusso stazionario ed assialsimmetrico la componente azimutale delle equazioni di Navier–Stokes risulta soddisfatta se

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}} \right], \quad \text{ossia} \quad \omega_x(r) = \frac{\Gamma \alpha}{4\pi \nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}},$$

essendo Γ la circolazione totale del vortice. Questa soluzione, trovata da Burgers nel 1940, è governata dall'equilibrio esatto tra diffusione (verso l'esterno del vortice) e trasporto convettivo (verso l'interno) nella direzione radiale e vortex stretching nella direzione assiale.

che per ragioni puramente teoriche o statistiche, viene principalmente dai flussi geofisici. Ci sono infatti essenzialmente tre modi per forzare la bidimensionalità di un flusso; il primo è facendone avvenire l'evoluzione in uno spazio ambiente in cui una delle dimensioni è molto più piccola delle altre, il secondo è produrre una stratificazione stabile (in cui il gradiente di densità è diretto come il vettore gravità) ed il terzo è con una rotazione nel piano ortogonale a quello del moto (teorema di Taylor–Proudman). Se si considera che l'atmosfera e l'oceano sono delle 'sfoglie' di spessore di qualche migliaio di metri con estensioni orizzontali di decine di migliaia di chilometri, con stratificazioni prodotte dalla pressione o dalla temperatura e sottoposte alla rotazione planetaria, si nota come questi effetti siano tutti presenti contemporaneamente. Ciò giustifica l'ipotesi di flusso bidimensionale per i moti geofisici a grande scala e quindi uno studio approfondito di tale modello.

Iniziamo con l'osservare che in due dimensioni il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha solo la componente ω ortogonale al piano del moto, risultando inoltre nullo il termine di vortex stretching, in assenza dei termini viscosi l'equazione (1.24) diventa

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0. \quad (1.27)$$

Questa equazione stabilisce che la vorticità di ogni particella fluida è una quantità conservata lungo la sua traiettoria e moltiplicando l'equazione (1.27) per ω^n si ricava facilmente che risulterà conservata anche qualunque potenza della vorticità. Inoltre, la (1.27) può essere integrata sul piano del moto da cui ne segue la conservazione della circolazione $\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} dS$, dell'enstrofia $\Omega = \int_S \omega^2 dS/2$ e di tutti i momenti di qualunque ordine della vorticità. In altre parole, se il flusso è bidimensionale, l'equazione (1.27) garantisce l'esistenza di infiniti invarianti del moto (sia in forma locale che integrale) mentre la sua controparte tridimensionale (equazione 1.24) implica solamente la conservazione della circolazione. Tale disparità di invarianti si riflette in profonde differenze nelle caratteristiche del moto, una delle quali è il trasferimento di energia tra le varie scale del moto.

È stato infatti mostrato in precedenza che l'effetto del vortex stretching è quello di produrre scale di moto sempre più piccole nelle quali contemporaneamente aumenta la vorticità e quindi la velocità angolare. Siccome nel 'mondo' bidimensionale tale effetto è assente non esiste alcun modo per ridurre la dimensione di un vortice mantenendone costante la circolazione. L'equazione (1.27) implica infatti che la $\omega(t)$ (in assenza di pareti) non possa mai superare il valore iniziale $\omega(0)$ mentre, considerando anche i termini viscosi la $\omega(t)$ può solo diminuire nel tempo. Con tali limitazioni ciò che può succedere è al più che un vortice di dimensioni iniziali L si frammenti in strutture più piccole ma, come vedremo tra breve, ciò non comporta un reale trasferimento di energia verso le scale più piccole in quanto la vorticità in queste ultime rimane limitata dal valore che il flusso aveva inizialmente.

1.5.3 cascata diretta ed inversa

In questa sezione vedremo con semplici passaggi come la conservazione o meno dell'energia cinetica K e dell'enstrofia Ω di un flusso sia da sola sufficiente a stabilire la direzione del trasferimento di energia internamente al flusso tra le varie scale del moto. Definendo

infatti

$$K = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dS \quad \text{e} \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} dS \quad (1.28)$$

e detta $E(k)$ la densità d'energia cinetica contenuta dalle strutture con numero d'onda compreso tra k e $k + dk$ ($dK = E(k)dk$) risulta

$$K = \int_0^\infty E(k)dk \quad \text{e} \quad \Omega = \int_0^\infty k^2 E(k)dk, \quad (1.29)$$

dove la seconda relazione è stata ottenuta dalla definizione di enstrofia, dall'equazione (1.24) e dall'identità vettoriale $|\nabla \mathbf{u}|^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2 + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u})$ che si riduce a $|\nabla \mathbf{u}|^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2 + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ se il flusso è incomprimibile.

Nella sezione §1.3 è stato verificato per l'equazione di Burgers (ma lo stesso potrebbe essere fatto in modo rigoroso per le equazioni di Navier–Stokes¹²) che l'effetto dei termini non lineari è di trasferire energia tra le varie scale del moto senza alterarne il contenuto totale. In particolare è stato visto come il modo k -esimo interagisca con tutti i modi l ed m tali che $l + m = \pm k$ ed $l - m = \pm k$ permettendo il trasferimento di energia tra queste triadi modali. Se ora immaginiamo che ad un certo istante iniziale sia assegnato uno spettro $E_0(k)$ caratterizzato da una certa distribuzione di densità d'energia intorno ad un numero d'onda medio k_0 è facile comprendere che l'effetto dei termini non lineari sarà quello di trasferire energia sia a destra che a sinistra di k_0 generando delle distribuzioni di $E(k)$ che nel tempo tendono ad avere delle 'code' sempre più lontane da k_0 . D'altra parte, in assenza di effetti viscosi, la conservazione dell'energia cinetica K garantisce solo che l'area sottesa da ognuna delle curve di figura 1.14 sia uguale a quella iniziale ma non fornisce alcuna informazione sull'eventuale deriva nel tempo del numero d'onda medio della distribuzione $E(k)$, ossia se esiste un verso preferenziale per il trasferimento di energia.

Definiamo, a tal fine, il numero d'onda medio $\bar{k}(t)$ come il baricentro della distribuzione $E(k)$

$$\bar{k}(t) = \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}, \quad (1.30)$$

dove la dipendenza temporale di $\bar{k}(t)$ deriva dall'evoluzione di $E(k)$ e risultando $\bar{k}(0) = k_0$. Volendo calcolare ora l'evoluzione temporale del momento centrato di ordine 2 di $E(k)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty (k - k_0)^2 E(k) dk &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty k^2 E(k) dk + k_0^2 \frac{d}{dt} \int_0^\infty E(k) dk - 2k_0 \frac{d}{dt} \int_0^\infty k E(k) dk = \\ &= \frac{d\Omega}{dt} + k_0^2 \frac{dK}{dt} - 2k_0 \frac{d}{dt} \int_0^\infty k E(k) dk. \end{aligned} \quad (1.31)$$

¹²Scrivendo le equazioni di Navier–Stokes nelle componenti di Fourier per la velocità e combinandole opportunamente si ottiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E(k) = - \int \text{Im} \{ [\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{m})][\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{l})] + [\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{l})][\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{m})] \} d\mathbf{l} d\mathbf{m},$$

in cui \mathbf{k} , \mathbf{l} ed \mathbf{m} sono i vettori dei numeri d'onda e $\hat{\mathbf{u}}$ la trasformata di Fourier del vettore velocità ed $\text{Im}(\bullet)$ è la parte immaginaria dell'argomento.

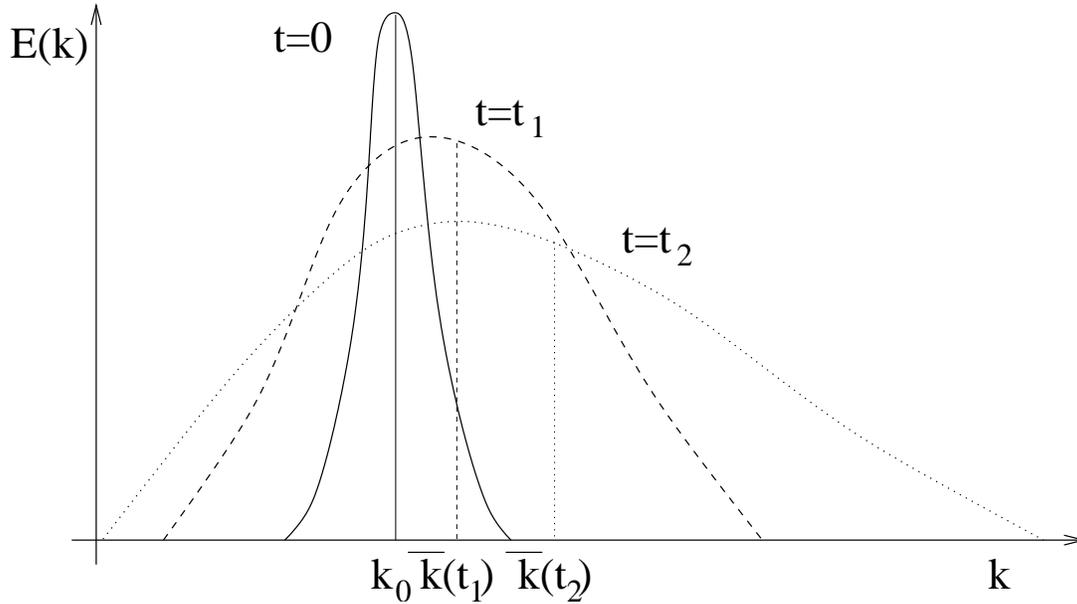


Figura 1.14: Schema del meccanismo di allargamento delle code nel tempo dello spettro di energia.

Se il flusso è bidimensionale, risultando conservata sia l'energia K che l'enstrofia Ω , dividendo l'equazione (1.31) per K si ottiene

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\frac{1}{2k_0} \frac{\frac{d}{dt} \int_0^\infty (k - k_0)^2 E(k) dk}{K} < 0, \quad (1.32)$$

dove la disuguaglianza è assicurata dal fatto che se le code della distribuzione $E(k)$ si allargano nel tempo il suo momento centrato del secondo ordine sarà una funzione crescente e quindi la sua derivata temporale positiva. Il fatto che in due dimensioni risulti $d\bar{k}/dt < 0$ implica che la deriva di \bar{k} avviene verso valori di k minori di k_0 , ossia che il trasferimento di energia avviene preferenzialmente verso le grandi scale del moto.

Se, al contrario, il flusso è tridimensionale solo l'energia K è conservata per cui, dividendo l'equazione (1.31) per K si ottiene

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\frac{1}{2k_0} \frac{\frac{d}{dt} [\int_0^\infty (k - k_0)^2 E(k) dk - \int_0^\infty k^2 E(k) dk]}{K} > 0. \quad (1.33)$$

Il termine aggiuntivo nell'equazione (1.33) rispetto alla (1.32) è dovuto al fatto che per un flusso tridimensionale l'enstrofia non risulta più una quantità conservata e ciò inverte il segno della derivata temporale di \bar{k} . Tale conclusione si ottiene asintoticamente osservando che per $k_0 > 0$ risulta evidentemente $k^2 E(k) > (k - k_0)^2 E(k)$ e quindi per un noto teorema sugli integrali risulta necessariamente

$$\int_0^\infty (k - k_0)^2 E(k) dk - \int_0^\infty k^2 E(k) dk < 0. \quad (1.34)$$

Questa condizione non comporta alcun vincolo sulla variazione istantanea dei singoli integrali ma, al contrario, impone che *asintoticamente* il termine $\int_0^\infty (k - k_0)^2 E(k) dk$ non

possa crescere nel tempo più rapidamente di $\int_0^\infty k^2 E(k) dk$. In caso contrario, infatti, sarebbe possibile trovare un tempo t^* oltre il quale la disuguaglianza (1.34) non risulterebbe verificata. Con tale osservazione la (1.34) implica una relazione analoga per le derivate temporali dei singoli integrali notando però che la condizione non deve necessariamente essere verificata istantaneamente ma solo asintoticamente. Tale circostanza implica che, sempre asintoticamente, deve risultare $d\bar{k}/dt > 0$, ossia che il baricentro dello spettro di energia deve spostarsi nel tempo verso $k > k_0$ implicando il trasferimento di energia verso le piccole scale del moto.

1.6 turbolenza, frattali e leggi di scala

Si consideri ora il grafico del coefficiente di resistenza per un cilindro circolare in funzione del numero di Reynolds (che si può considerare come prototipo per tutti i corpi tozzi investiti da una corrente) e si ricordi che la forza di resistenza può essere scritta come

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_D,$$

in cui S è la superficie frontale del cilindro (o superficie per unità di lunghezza assiale per cilindri infiniti). La potenza meccanica dissipata da tale flusso sarà:

$$P = FU \implies P = \frac{1}{2} \rho U^3 S C_D,$$

che per elevati numeri di Reynolds diventa indipendente dalla viscosità cinematica ν del fluido in quanto C_D risulta indipendente dal numero di Reynolds (figura 1.15).

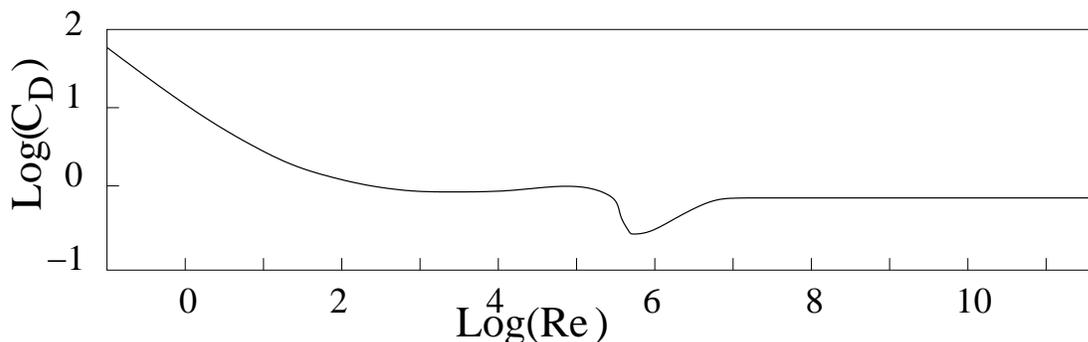


Figura 1.15: Andamento del coefficiente di resistenza C_D in funzione del numero di Reynolds Re per un cilindro a sezione circolare.

Questo comportamento è caratteristico di quasi tutti i flussi in regime turbolento ed è noto sin dal diciannovesimo secolo quando Hagen e Poiseuille effettuando i loro esperimenti sui flussi nei tubi a sezione circolare notarono che una parte delle perdite di carico risultava proporzionale al quadrato della velocità del flusso ed indipendente da ν .

Considerando la struttura delle equazioni di Navier–Stokes e la relazione (1.20) precedentemente illustrata, l'indipendenza dalla viscosità della potenza dissipata appare paradossale in quanto l'unico termine delle equazioni in grado di dissipare energia è quello

viscoso la cui espressione è $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Ricordando che quando questo termine viene integrato su tutto il volume di fluido si ottiene

$$\int_V \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} dV = \int_V \rho \epsilon dV = P,$$

si evince che al tendere a zero della viscosità ($Re \rightarrow \infty$) l'unico modo per mantenere costante la potenza dissipata è far crescere il gradiente di velocità. In altre parole, se P rimane costante quando ν tende a zero è necessario che il campo di velocità produca variazioni su scale spaziali sempre più piccole fino a divenire un campo continuo nello spazio ma in nessun punto differenziabile.

Fenomeni con tali caratteristiche vanno sotto il nome di frattali e costituiscono una classe di problemi molto diffusa nella scienza e nella tecnologia che solo recentemente è stata reinterpretata come conseguenza naturale delle equazioni della dinamica piuttosto che come un comportamento patologico di sistemi fisici descritti da modelli incompleti. Senza alcuna pretesa di essere esaustivi si supponga di avere N_0 segmenti di lunghezza ℓ_0 e di dividerli in n parti uguali; ne risulteranno un numero $N_n = N_0 n$ di segmenti ognuno di lunghezza $\ell_n = \ell_0/n$. Se si ripete la stessa operazione per N_0 quadrati (o cubi) di lato ℓ_0 , dopo l' n -esima suddivisione di avranno $N_n = n^2 N_0$ (o $N_n = n^3 N_0$) quadrati (o cubetti) di lato $\ell_n = \ell_0/n$.

Definendo la quantità

$$D = - \frac{\ln \left(\frac{N_n}{N_0} \right)}{\ln \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)} \quad (1.35)$$

questa risulterà, rispettivamente, $D = 1, 2$ o 3 per i segmenti i quadrati ed i cubi e D è quindi la 'dimensione' dell'oggetto considerato.

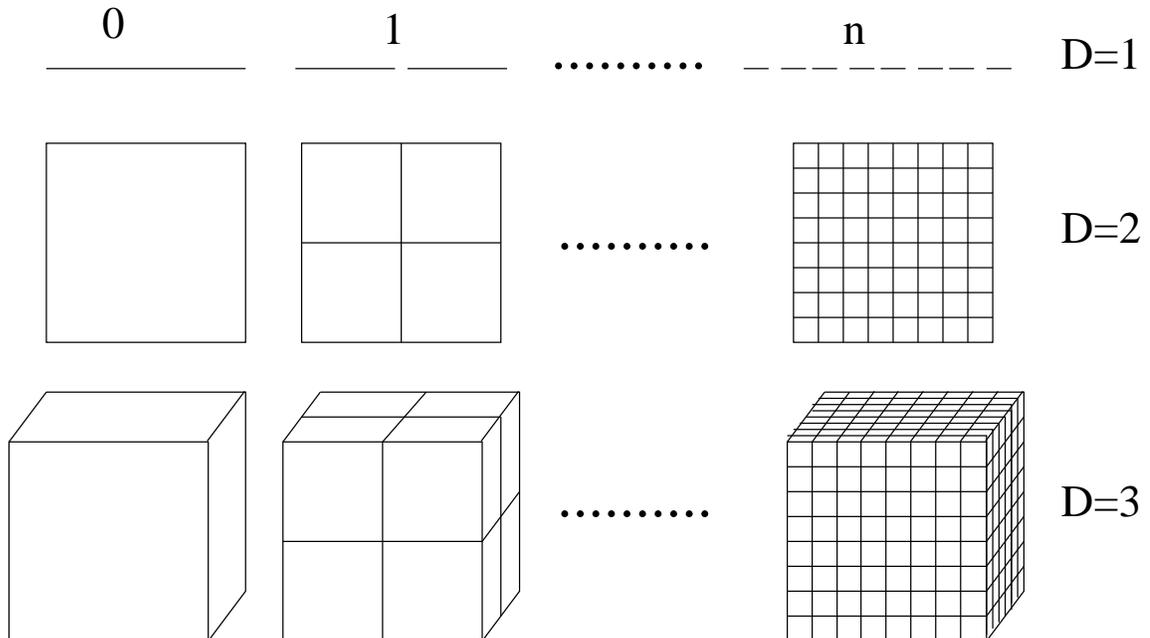


Figura 1.16: Esempi di figure a dimensione intera.

Il dover ricorrere ad un'espressione come la (1.35) per calcolare la dimensione di un oggetto potrebbe sembrare un'inutile complicazione in quanto è noto dalla geometria elementare che una linea, una superficie ed un solido hanno 1, 2 e 3 dimensioni.

La dimensione intera, tuttavia è solo un caso particolare di una definizione più generale che riguarda un numero sorprendentemente elevato di esempi della realtà quotidiana.

Se, per esempio, si prende un segmento inizialmente lungo ℓ_0 e, dopo averlo diviso in tre parti se ne sostituisce il segmento centrale con altri due di pari lunghezza si ottiene la spezzata di figura 1.17b. Ripetendo tale costruzione per ognuno dei segmenti si giunge ad una figura di crescente complessità composta da un numero $N_n = 4^n$ segmenti di lunghezza $\ell_n = \ell_0/(3^n)$. Per tale figura il calcolo della dimensione fornisce $D = \ln(4)/\ln(3) \simeq 1.261$ che suggerisce intuitivamente che la figura 1.17 è più complessa di una curva regolare monodimensionale ma ancora non abbastanza complessa da riempire completamente uno spazio a due dimensioni. Questa curva pur essendo continua ovunque non è differenziabile in nessun punto (per $n \rightarrow \infty$) e pur avendo una lunghezza infinita racchiude un'area finita (*riesci a calcolarle?*).

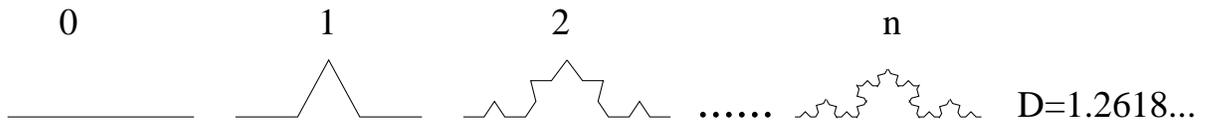


Figura 1.17: Costruzione di Koch con dimensione $D = 1.2618\dots$

In modo del tutto analogo è possibile costruire delle figure con una dimensione minore di 1; si prenda infatti un segmento di lunghezza ℓ_0 e, dopo averlo diviso in tre parti se ne elimini la parte centrale. Se si ripete questa operazione per ognuno dei segmenti residui si perviene ad una sequenza di segmenti di lunghezza $\ell_n = \ell_0/(3^n)$ in numero pari a $N_n = 2^n$. Il calcolo della dimensione in questo caso fornisce $D = \ln(2)/\ln(3) = 0.6309\dots$ ed è minore di 1 suggerendo che la figura pur avendo un numero infinito di discontinuità (per $n \rightarrow \infty$) è comunque più 'densa' di una successione di punti.



Figura 1.18: Insieme di Cantor con dimensione $D = 0.6309\dots$

Questa è solo una delle possibili definizioni di dimensione frattale che viene anche detta 'capacità di Kolmogorov'. Tale definizione ha anche un'interpretazione probabilistica che risulta estremamente utile quando bisogna calcolare la dimensione frattale di oggetti che non sono ottenuti da semplici costruzioni geometriche come negli esempi precedenti. Brevemente si può riassumere dicendo che (per esempio in due dimensioni, $d = 2$) se il nostro oggetto può essere racchiuso da un quadrato di lato L , lo stesso spazio può essere coperto da $N = n^d$ quadrati di lato $\ell = L/n$. Se l'oggetto in questione non è abbastanza 'compatto' da coprire tutto lo spazio a disposizione il numero di quadratini elementari che intercettano la figura saranno $\tilde{N} \sim n^D < n^d$. La probabilità P che un campione di

dimensione ℓ intersechi l'oggetto in analisi è quindi

$$P = \frac{\tilde{N}}{N} \sim \ell^{d-D} \quad (1.36)$$

che è controllata da $d - D$ detta codimensione frattale ed indica come la probabilità di intesecare l'oggetto dipende dalla misura ℓ dello 'strumento' con cui lo si misura. In tale scenario, contando come eventi multipli i punti in cui una curva interseca se stessa è anche possibile costruire curve con dimensione frattale maggiore di 2 pur essendo interamente contenute in un piano.

Sebbene oggetti con tale comportamento potrebbero sembrare costruzioni artificiali o, al più, eccezioni patologiche questi sono invece estremamente frequenti. La superficie delle nuvole o la superficie di frattura di un materiale fragile, il percorso seguito da un fiume dalla sorgente alla foce, la distribuzione degli alveoli polmonari di tutti gli animali, la disposizione dei rami di un albero sono solo alcuni esempi tra un'innumerabile moltitudine; in figura 1.19 viene riportata la fotografia di un cavolfiore che mostra una struttura di base ripetuta identicamente a scale differenti così come previsto dalla distribuzione frattale.

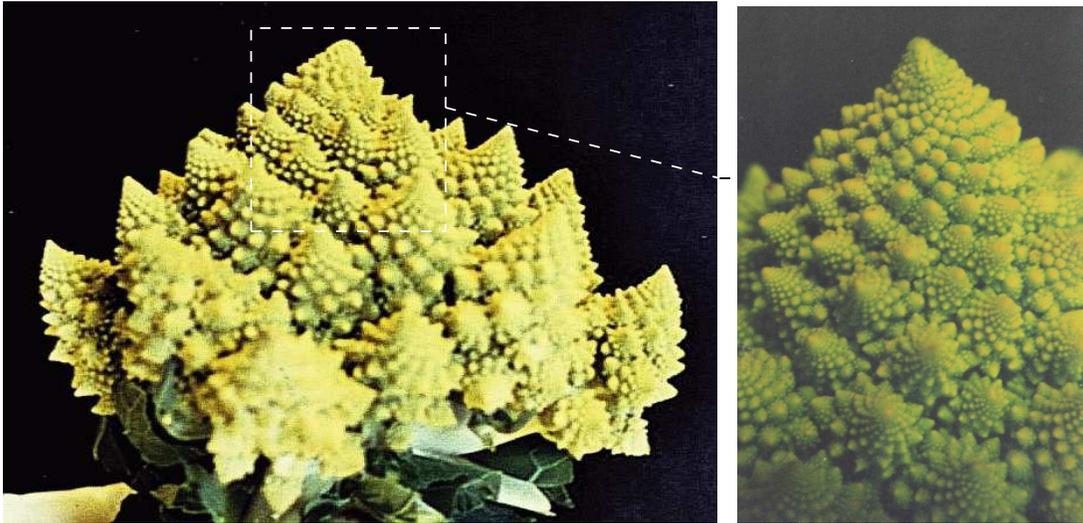


Figura 1.19: Fotografia di un cavolfiore ed ingrandimento di un suo particolare dove è mostrato che la struttura di base si ripete in successione alle varie scale.

È bene notare che un comportamento puramente frattale, con leggi di potenza come quelle in (1.36) può essere osservato solo se il fenomeno evolve in completa assenza di scale di lunghezza intrinseche del problema. Si consideri infatti una qualunque quantità Q che sia funzione di x , $Q = f(x)$; in assenza di scale di lunghezza, scalando la variabile x con un quantità arbitraria α , potrà al più succedere che la funzione f risulti scalata da un'altra funzione dipendente unicamente da α , ossia $Q = g(\alpha)f(x/\alpha)$. Differenziando quindi questa relazione rispetto ad α si ottiene:

$$0 = g'f - g \frac{df}{dx} \frac{x}{\alpha^2} \implies \frac{df}{f} = \frac{g'\alpha^2}{g} \frac{dx}{x} \implies f(x) = f(0)x^{\frac{g'\alpha^2}{g}},$$

avendo indicato con l'apice la differenziazione rispetto ad α .

In un fenomeno fluidodinamico l'assenza totale di scale di lunghezza non si verifica mai (si pensi, ai due estremi, alla dimensione massima del dominio in cui è contenuto il fenomeno sotto osservazione ed alle dimensioni minime della particella fluida per ritenere valide le ipotesi di continuo). Nella turbolenza, in particolare, si vedrà che queste scale sono molto distanti dai limiti precedentemente citati in quanto sono date dalla dimensione L in cui l'energia viene immessa nel sistema (scala integrale dell'energia), ad un estremo, e dalla scala dissipativa η (di Kolmogorov) dall'altro. Ciò rende possibile un comportamento frattale solo in un range intermedio di lunghezze sufficientemente distante sia da L che da η in modo da non risentire direttamente né delle modalità di immissione di energia nel sistema né dei fenomeni dissipativi. Tale intervallo di lunghezze prende il nome di 'range inerziale' ed i fenomeni che avvengono in questa regione costituiscono la base per la comprensione della turbolenza.

1.7 turbolenza omogenea ed isotropa

L'esempio della soluzione di Burgers ha mostrato come nelle equazioni di evoluzione di un fluido ci sono i termini viscosi e quelli non lineari che hanno meccanismi di azione completamente diversi ed in competizione tra loro. I primi, infatti, sono dissipativi ed hanno un'azione locale, interessano cioè singolarmente i vari modi senza implicare alcuna interazione. L'efficacia con cui viene dissipata l'energia cresce con il quadrato del numero d'onda k e quindi con l'inverso del quadrato della dimensione della struttura. I secondi, al contrario, data la loro natura non lineare sono responsabili del trasferimento di energia tra i vari modi senza alterarne il valore globale.

Sebbene le equazioni di Navier–Stokes abbiano una struttura più complessa dell'equazione di Burgers, l'azione dei termini non lineari e di quelli viscosi è analoga a quella appena descritta e questa dinamica ha dato spunto a molti scienziati del ventesimo secolo per ipotizzare lo scenario evolutivo della turbolenza. In particolare Richardson nel 1922 immaginò che l'energia entri nel flusso alle scale più grandi e, attraverso meccanismi di instabilità, vengano prodotti vortici più piccoli che a loro volta generano vortici ancora più piccoli e così via fino a quando le dimensioni non sono talmente piccole che la viscosità dissipa le strutture impedendo ogni ulteriore trasferimento¹³. Questa descrizione implica un trasferimento a cascata (essenzialmente non viscosa) dell'energia dalle scale più grandi del moto verso quelle sempre più piccole fino alle scale dissipative dove la viscosità trasforma tutta l'energia in calore.

Lo scenario appena presentato descrive in modo abbastanza fedele ciò che accade in un flusso turbolento anche se, senza ulteriori ipotesi, non è possibile quantificare il fenomeno descritto; per esempio, quanto piccole sono le dimensioni a cui prevalgono gli effetti viscosi, e cosa succede tra le scale in cui l'energia viene immessa nel flusso e quelle a cui viene dissipata? Questi quesiti hanno trovato una risposta solo recentemente quando Kolmogorov nel 1941 ha pubblicato i risultati di una sua teoria applicabile alla turbolenza omogenea ed isotropa¹⁴.

¹³L'asserzione di Richardson era: "Big whorls have little whorls, which feed on their velocity and little whorls have lesser whorls and so on to viscosity".

¹⁴La turbolenza si definisce omogenea ed isotropa, rispettivamente, quando le sue caratteristiche statistiche non dipendono dalla posizione nello spazio e sono uguali in tutte le direzioni. Tecnicamente la

È bene precisare subito che la turbolenza omogenea ed isotropa è un'astrazione concettuale e che non è mai riprodotta in modo esatto da alcun sistema fisico reale. Tuttavia la sua utilità per lo studio della turbolenza è duplice in quanto da un lato semplifica enormemente la trattazione teorica e permette quindi una migliore comprensione della fisica, dall'altro si osserva che tutti i sistemi reali soddisfano 'localmente' le condizioni di omogeneità ed isotropia.

Quest'ultima asserzione costituisce la prima ipotesi fondamentale di Kolmogorov e cioè "per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le strutture fluidodinamiche piccole in un flusso turbolento sono statisticamente isotrope". In questa affermazione 'strutture fluidodinamiche piccole' è inteso rispetto alle scale di moto in cui l'energia turbolenta viene immessa nel flusso e questa osservazione chiarisce anche perché vengano richiesti 'numeri di Reynolds sufficientemente elevati'. Ciò infatti implica che gli effetti inerziali siano di gran lunga più importanti di quelli viscosi rendendo possibile un lungo processo di cascata dell'energia dalle strutture più grandi alle più piccole. Se si ipotizza che ad ogni passo della cascata le strutture perdano sempre più memoria delle caratteristiche dei vortici che hanno innescato la cascata, si conclude facilmente che le strutture più fini di qualunque flusso turbolento hanno tutte le stesse caratteristiche. Si avrà quindi che le piccole scale generate dietro un cilindro o a valle di un getto hanno la stessa statistica nonostante le scale più grandi abbiano una dinamica completamente differente.

La seconda ipotesi di Kolmogorov trae spunto dall'osservazione che la dinamica della turbolenza dipende da quanto rapidamente l'energia viene trasferita dalle grandi alle piccole scale e dal valore della viscosità che fissa il numero d'onda k a cui viene operato il taglio nel trasferimento di energia. Se il fenomeno fluidodinamico è statisticamente stazionario, essendo la cascata dall'energia non viscosa, si deduce che, detta ϵ l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) prodotta nell'unità di tempo, questa sarà anche l'energia dissipata nell'unità di tempo¹⁵. Con questa osservazione si può comprendere la seconda ipotesi di Kolmogorov che dice: "per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, le caratteristiche delle piccole scale di tutti i flussi turbolenti sono universali e sono determinate dalla viscosità ν e dalla potenza dissipata ϵ ."

Questa osservazione potrebbe apparire di scarsa utilità per stime quantitative, tuttavia considerazioni di tipo dimensionale ci portano a concludere che con ϵ e ν c'è un solo modo per costruire delle scale di lunghezza, velocità e tempo. In particolare, osservando che ϵ è un'energia per unità di tempo e unità di massa si ottiene

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad t_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}, \quad (1.37)$$

rispettivamente per la lunghezza, velocità e tempo delle scale dissipative (le più piccole).

definizione rigorosa richiede l'introduzione di variabili random; detta infatti $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ una variabile random funzione della posizione \mathbf{x} (per esempio la velocità) questa è definibile mediante tutti i suoi momenti statistici (media, deviazione standard, etc.) $\langle \mathbf{u}^m \rangle = \int f(\mathbf{x}) \mathbf{u}^m d\mathbf{u}$ dove $f(\mathbf{x})$ è la funzione densità di probabilità. Un fenomeno si definisce omogeneo se la funzione $f(\mathbf{x})$ è indipendente dalla posizione \mathbf{x} . La definizione di isotropia richiede invece che $f(\mathbf{x})$ sia invariante sotto ogni rotazione e riflessione degli assi in \mathbf{x} .

¹⁵Infatti, se così non fosse, l'energia si dovrebbe accumulare alle scale intermedie che, avendo un contenuto di energia variabile nel tempo, non potrebbero essere statisticamente stazionarie.

Ricordiamo ora, che per un processo stazionario ϵ coincide con la potenza immessa nel flusso dalle scale di moto più grandi; dette quindi U ed L , rispettivamente, la velocità e la lunghezza caratteristiche di queste scale, si ottiene da considerazioni dimensionali $\epsilon = U^3/L$. È utile osservare che in questa stima dimensionale non è stata considerata la viscosità in quanto per le strutture più grandi gli effetti viscosi sono trascurabili e le questioni energetiche devono coinvolgere fattori puramente inerziali.

Dalla stima per ϵ e dalle relazioni (1.37), ricordando la definizione del numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, si ottiene:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}, \quad \frac{U}{u_\eta} = Re^{1/4}, \quad \frac{T}{t_\eta} = Re^{1/2}, \quad (1.38)$$

dove $T = L/U$ è la scala dei tempi dei moti a grande scala.

Queste relazioni permettono di stimare i rapporti tra le caratteristiche delle scale più grandi e quelle più piccole in un flusso turbolento in funzione del solo numero di Reynolds ed hanno ripercussioni di straordinaria importanza pratica per le misure sperimentali, per le simulazioni numeriche e per la possibilità di predizione di un flusso turbolento.

Dopo aver messo in relazione le strutture più piccole con le più grandi, rimane da analizzare la dinamica delle strutture intermedie con dimensione r tale che $L \gg r \gg \eta$.

In base a quanto visto finora, è facile convincersi che la viscosità avrà un'influenza trascurabile in quanto agisce solo alle scale più piccole. D'altra parte l'energia viene immessa nel flusso dalle scale più grandi da cui ne consegue che le scale intermedie vedranno solo un flusso di energia in transito, proveniente dai grandi vortici e trasferito verso i vortici dissipativi. In base a quanto detto, la terza ipotesi di Kolmogorov afferma che per numeri di Reynolds sufficientemente elevati le caratteristiche (la statistica) delle strutture di dimensione r (con $L \gg r \gg \eta$) sono universali e dipendono unicamente da ϵ (e quindi sono indipendenti da ν).

Ciò comporta che se u_r è la velocità delle scale di dimensione r si ottiene

$$\frac{u_r^3}{r} = \epsilon = \frac{U^3}{L}, \implies u_r = \frac{U}{L^{1/3}} r^{1/3}, \quad \text{e} \quad t_r = \frac{r}{u_r} = \frac{L^{1/3}}{U} r^{2/3}. \quad (1.39)$$

Queste stime indicano che le strutture con scale r intermedie tra L ed η hanno una velocità caratteristica che cresce solo come $r^{1/3}$ mentre i tempi caratteristici crescono come $r^{2/3}$. La conseguenza di ciò è che i vortici più grandi hanno le velocità più intense ed una dinamica più lenta mentre per i gradienti di velocità $\nabla u \sim u_r/r \approx r^{-2/3}$ si ha che quelli più intensi sono alle scale più piccole¹⁶.

Notiamo a margine che dall'ultima ipotesi si deriva la famosa legge di potenza ($k^{-5/3}$) per lo spettro di energia. Se infatti si definisce lo spettro come $E(k)$ tale che

$$K = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (1.40)$$

con K energia cinetica per unità di massa del flusso, dalla terza ipotesi di Kolmogorov e da argomenti dimensionali si ottiene $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$, in cui C è una costante universale¹⁷.

¹⁶Da questa stima sembrerebbe che i gradienti diventino infiniti per $r \rightarrow 0$, mentre in realtà bisogna ricordare che le formule (1.39) valgono solo per $L \gg r \gg \eta$. Viceversa quando $r \rightarrow 0$ risulta r dello stesso ordine di η ed il campo di velocità si 'regolarizza' essendo $u_r \sim r$ con dei gradienti finiti.

¹⁷A questo risultato si giunge facilmente ricordando che dimensionalmente k è l'inverso di una lunghezza

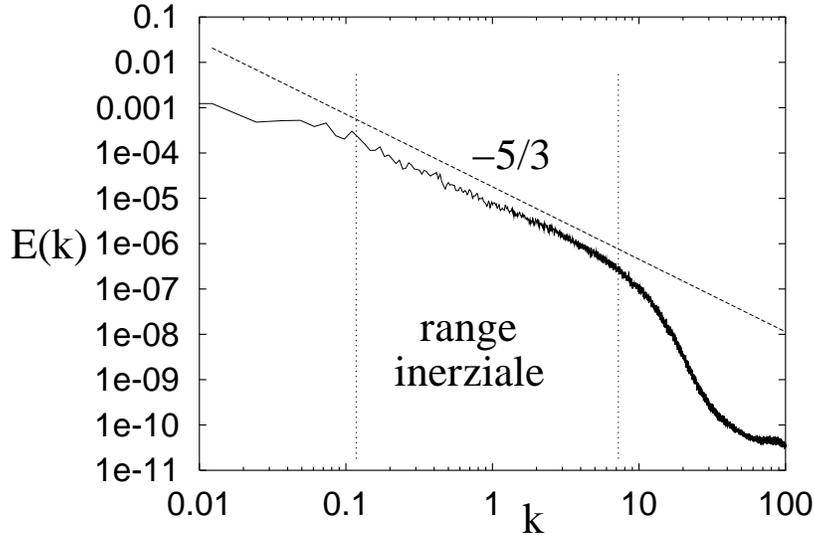


Figura 1.20: Spettro della turbolenza omogenea ed isotropa. La linea è la legge di potenza $k^{-5/3}$ riportata per confronto.

1.8 equazioni di Reynolds

Abbiamo visto in precedenza che in un flusso turbolento, anche con condizioni al contorno e forzanti stazionarie, il campo di velocità è non stazionario con oscillazioni non deterministiche intorno ad un valore medio che eventualmente può dipendere anch'esso dal tempo.

È utile chiarire immediatamente che questa dinamica così complessa è interamente contenuta nelle equazioni di Navier–Stokes che sono in grado di descrivere il moto e l'integrazione di tutte le scale di moto, fino alle più piccole e dissipative. Purtroppo dal punto di vista pratico, l'estremo dettaglio con cui queste equazioni descrivono il flusso costituisce al tempo stesso la debolezza del modello in quanto le risorse di calcolo necessarie per la risoluzione di queste equazioni crescono vertiginosamente con il numero di Reynolds ($\sim Re^3$). Se si considera che nei problemi pratici si ha $Re = 10^6 - 10^9$ si capisce immediatamente che una soluzione del problema con un metodo 'diretto' è tecnicamente impossibile.

D'altra parte per alcune applicazioni pratiche la sola conoscenza delle grandezze medie può essere sufficiente per la soluzione del problema, ci si chiede quindi se sia possibile, partendo dalle equazioni di Navier–Stokes, derivare delle equazioni più semplici per le sole grandezze medie.

A tal fine, iniziamo con l'osservare che dato un qualunque segnale dipendente dal tempo (nella fattispecie la velocità) è possibile decomporlo in un valore medio ed una fluttuazione. Nel caso in cui il valore medio sia costante nel tempo allora si può porre:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (1.41)$$

da cui ne consegue che le dimensioni di $E(k)$ sono una velocità al quadrato per una lunghezza (ossia quelle di un'energia cinetica per unità di massa moltiplicata per una lunghezza). D'altra parte nel range inerziale si dispone solo di ϵ per poter soddisfare requisiti dimensionali per cui ponendo $[E(k)] = C[\epsilon^\alpha k^\beta] = [U^2 L]$ si ricava $\alpha = 2/3$ e $\beta = -5/3$.

risultando

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad \text{e} \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}), \quad (1.42)$$

in cui tutta la non stazionarietà del segnale è nella fluttuazione (figura 1.21). Dalle definizioni risulta identicamente $\langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv 0$, proprietà che tornerà utile nella decomposizione delle equazioni del moto.

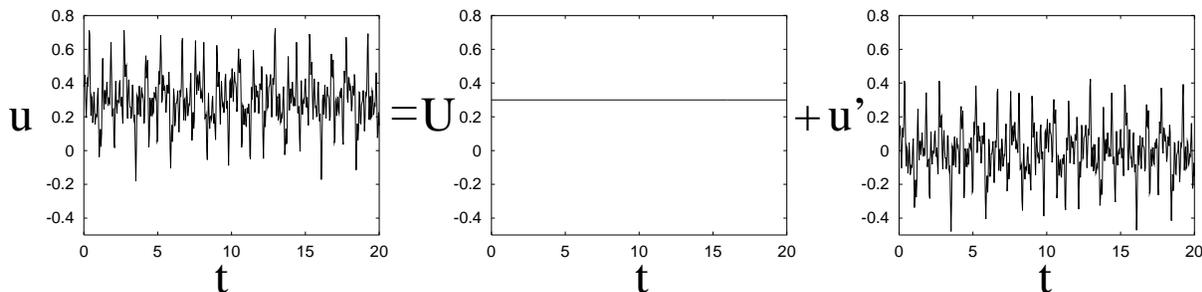


Figura 1.21: Decomposizione di un segnale statisticamente stazionario in parte media e parte fluttuante.

Se la velocità media risulta invece anch'essa funzione del tempo allora l'operazione di media non va effettuata per un tempo infinito ma su un'intervallo finito che risulti molto grande rispetto alle scale temporali delle fluttuazioni ma abbastanza breve se confrontato con i tempi di variazione del campo medio¹⁸ (figura 1.22).

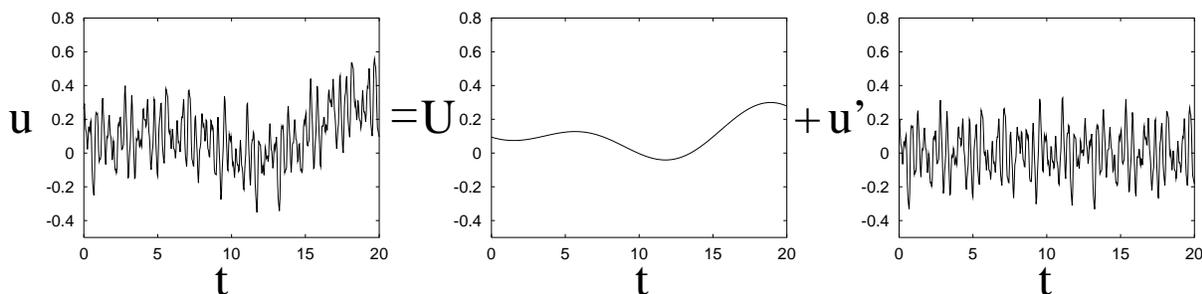


Figura 1.22: Decomposizione di un segnale statisticamente *non* stazionario in parte media e parte fluttuante.

La decomposizione appena illustrata può naturalmente essere effettuata per la pressione p e per tutte le altre variabili dipendenti delle equazioni di Navier–Stokes e di conservazione della massa. Per semplicità tratteremo solo il caso $\rho = \text{const.}$ (flusso incomprimibile omogeneo) per cui, l'equazione di continuità si può decomporre in

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{u}') = 0, \quad \implies \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (1.43)$$

¹⁸Questa operazione è ben definita quando esiste una netta separazione tra i periodi delle piccole fluttuazioni e quelli del campo medio. In turbolenza questa eventualità si verifica assai raramente (a meno che non ci siano forzanti periodiche imposte esternamente) e la decomposizione in parte media e parte fluttuante può presentare delle ambiguità.

rispettivamente per la velocità media e quella fluttuante. La seconda delle (1.43) è stata ottenuta dalla prima dopo aver effettuato un'operazione di media, aver notato che $\langle \mathbf{u}' \rangle \equiv 0$ e che l'operazione di media e di divergenza commutano (in quanto entrambi operatori lineari). La terza delle (1.43) è infine ottenuta semplicemente per sottrazione della seconda dalla prima.

Per decomporre in modo analogo le equazioni di Navier–Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.44)$$

osserviamo che per tutti i termini, tranne quello non lineare possiamo porre

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}, \quad \nabla p = \nabla P + \nabla p', \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (1.45)$$

Il termine non lineare si decompone invece secondo

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot [(\mathbf{U} + \mathbf{u}')(\mathbf{U} + \mathbf{u}')] = \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}'). \quad (1.46)$$

Se ora sostituiamo i termini così decomposti nell'equazione (1.44) e ne facciamo la media, osservando che risulta $\langle \mathbf{U}\mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{u}'\mathbf{U} \rangle \equiv 0$ mentre $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \neq 0$ si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (1.47)$$

e sottraendo questa equazione dalla (1.44) si ricava l'equazione per le fluttuazioni

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{u}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}'\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}', \quad (1.48)$$

L'equazione (1.47) e la seconda delle (1.43) costituiscono le equazioni della dinamica del campo medio e se non fosse per il termine $\nabla \cdot (\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle)$ queste sarebbero identiche alla (1.44) e la prima delle (1.43) che sono le equazioni di partenza. La differenza potrebbe sembrare marginale ma mentre il sistema originale di equazioni è chiuso (4 equazioni nelle 4 incognite \mathbf{u} e p) le equazioni del campo medio rimangono 4 a fronte di un numero di incognite che sale a 13, \mathbf{u} , p ed il tensore¹⁹ del secondo ordine $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$. Questo problema è noto come 'chiusura' della turbolenza e si presenta sempre con un numero di incognite superiore al numero delle equazioni ogni volta che si tenta di derivare un'equazione per la turbolenza. Una conferma di questa affermazione si può ottenere ricavando l'equazione per $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ dalla (1.48) dopo averla moltiplicata per \mathbf{u}' , averla sommata alla equazione trasposta ed averne effettuato la media. Infatti, poiché l'equazione (1.47) introduce un'incognita aggiuntiva, potremmo essere tentati di ricavarne un'equazione per chiudere il problema.

Procedendo come descritto si ottiene la relazione

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} + [\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U}]^T + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle = \quad (1.49)$$

¹⁹Notando evidenti proprietà di simmetria del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ il numero delle incognite si riduce a 10, non risolvendo comunque il problema della chiusura.

$$-\frac{1}{\rho}[\langle \mathbf{u}'\nabla p' \rangle + \langle \mathbf{u}'\nabla p' \rangle^T] + \nu[\langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle^T]$$

dalla quale si nota che l'evoluzione di $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ introduce la nuova incognita $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ e la procedura potrebbe essere ripetuta all'infinito senza mai riuscire a bilanciare il numero di incognite con le equazioni. Si otterrebbe cioè una gerarchia di equazioni in cui le incognite sono sempre superiori rispetto alle relazioni disponibili rendendo impossibile la soluzione esatta del problema.

L'equazione (1.49) si presta ad una interpretazione dei singoli termini permettendo di comprendere più in dettaglio la dinamica degli sforzi di Reynolds. I primi due termini a primo membro sono assimilabili ad una derivata materiale in cui, però, l'accelerazione convettiva è dovuta solo alla velocità media del flusso e non alla velocità totale \mathbf{u} . I due termini successivi, hanno un ruolo fondamentale nella evoluzione del tensore di Reynolds in quanto rappresentano l'interazione tra il tensore stesso ed il campo medio. Per esempio, nel caso di turbolenza omogenea ed isotropa, il gradiente del campo medio è nullo e questi termini di interazione sono nulli. Al contrario, in prossimità di superfici dove i gradienti di velocità sono massimi questi termini causano sia la produzione che la riorientazione delle varie componenti del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$. Il termine $\nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ fornisce infine il trasporto del tensore $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ da parte della componente fluttuante di velocità \mathbf{u}' .

I primi due termini a secondo membro rappresentano le interazioni velocità–pressione che conferiscono una natura non–locale al fenomeno. L'ultimo termine, infine tiene conto della diffusione e della dissipazione delle fluttuazioni turbolente attraverso la viscosità.

Un'ultima informazione interessante si può derivare dall'equazione (1.49) prendendone solo i termini diagonali e facendone una media. In altre parole, detta K l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) definita come

$$K = \frac{1}{2}(\langle u'_x u'_x \rangle + \langle u'_y u'_y \rangle + \langle u'_z u'_z \rangle) = \frac{3}{2}Tr(\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle), \quad (1.50)$$

si ottiene facilmente dall'equazione (1.49)

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K = - \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla \langle \mathbf{u}'p' \rangle - \nabla \cdot \langle K\mathbf{u}' \rangle + \nu \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle. \quad (1.51)$$

Osservando che risulta:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}' + [\nabla \mathbf{u}']^T), \quad \langle \mathbf{u}'\nabla^2 \mathbf{u}' \rangle = \nabla \cdot \langle 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{E}' \rangle - \langle \epsilon \rangle$$

$$\text{con} \quad \langle \epsilon \rangle = \langle 2\nu \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' \rangle$$

l'equazione (1.51) può essere scritta come

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U} - \langle \epsilon \rangle - \nabla \cdot [K\mathbf{U} + \langle K\mathbf{u}' \rangle + \langle p'\mathbf{u}' \rangle + \langle 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{E}' \rangle], \quad (1.52)$$

che si presta ad una facile interpretazione una volta che venga integrata su un volume V . Infatti, tutto l'ultimo termine a secondo membro, essendo scritto in forma di divergenza darà un contributo nullo all'integrale. D'altra parte, $\langle \epsilon \rangle$ è una quantità definita positiva

ed il suo contributo all'integrale sarà sicuramente negativo, consistentemente con il fatto che la dissipazione viscosa trasforma irreversibilmente energia meccanica in calore. Si conclude quindi che il bilancio di energia turbolenta (ossia l'integrale a primo membro) è affidato unicamente all'integrale del termine $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle \cdot \nabla \mathbf{U}$, ossia alle interazioni tra le fluttuazioni di velocità ed il gradiente del campo medio. Tra l'altro, se questo termine deve rifornire di energia il campo fluttuante deve necessariamente sottrarre energia dal campo medio; ciò risulta effettivamente vero in quanto lo stesso termine compare con il segno opposto nell'equazione dell'energia del campo medio, ottenuta in modo analogo alla (1.51) ma partendo dalle equazioni per \mathbf{U} .

1.9 Ipotesi di Boussinesq: la viscosità turbolenta

È stato visto nella sezione precedente che le equazioni di Navier–Stokes presentano un problema di chiusura che impedisce di fatto di avere un sistema in cui il numero delle equazioni uguaglia quello delle incognite. È quindi necessario pensare a qualche strategia che consenta, seppur in modo non esatto, di calcolare le informazioni di base di un flusso (come campo medio ed intensità delle fluttuazioni) senza necessariamente risolvere il problema completo.

La via comunemente utilizzata è quindi quella di troncare il numero di equazioni ad un certo ordine e modellare le incognite di ordine superiore con delle relazioni approssimate. Chiaramente maggiore è l'ordine a cui si tronca la gerarchia, maggiore sarà il numero delle incognite da modellare e conseguentemente la complessità del modello utilizzato. Lasciamo ai testi specialistici del settore la disamina dei numerosi modelli ed equazioni di ordine elevato mentre in queste note ci limiteremo al semplice caso in cui i termini $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ vengono modellati con una semplice ipotesi di 'gradiente diffusivo'.

Per comprendere il significato fisico di tale approssimazione, riconsideriamo l'equazione (1.47) e riscriviamola nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{E} - \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle), \quad \text{con} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (1.53)$$

da cui si osserva che i termini $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ possono essere considerati come degli sforzi aggiuntivi (detti sforzi di Reynolds) che sottraggono energia al campo medio per trasferirla alle fluttuazioni. Identificando queste fluttuazioni come la componente turbolenta del moto, detta K l'energia cinetica turbolenta (per unità di massa) definita in (1.50) si può, analogamente al caso laminare, porre per la parte deviatorica degli sforzi di Reynolds,

$$-\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle + \frac{2}{3}K\mathbf{I} = 2\nu_T \mathbf{E}, \quad (1.54)$$

in cui ν_T è la viscosità turbolenta ed è la nuova incognita del problema.

Con questa posizione l'equazione (1.47) assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P^* + \nabla \cdot (2\nu^* \mathbf{E}), \quad (1.55)$$

che è identica all'equazione originale avendo usato la pressione modificata $P^* = P + 2K/3$ ed avendo definito una viscosità 'totale' $\nu^* = \nu + \nu_T$. Sebbene le espressioni (1.54) e (1.55)

possano sembrare particolarmente attraenti data la loro semplicità, è bene sottolineare che nascondono diverse insidie, sia matematiche che fluidodinamiche. Infatti, mentre ν è una proprietà molecolare del *fluido* e nelle ipotesi $\rho = \text{const.}$ è costante in tutto il campo, ν_T è una proprietà del *flusso* il cui valore cambia in ogni punto del campo e nel tempo ($\nu_T = \nu_T(\mathbf{x}, t)$) ed il suo comportamento varia da problema a problema. Inoltre, anche se a prima vista la relazione (1.54) sembra solo aver spostato l'incognita $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ nell'incognita ν_T , dobbiamo osservare che la prima è un tensore del secondo ordine mentre la seconda è uno scalare. L'equazione (1.54) implica quindi che il primo e secondo membro abbiano le stesse direzioni principali ossia che gli autovettori dei due tensori siano paralleli. Questa proprietà non è giustificabile teoricamente ed infatti una verifica diretta della (1.54) attraverso simulazioni numeriche ed esperimenti di laboratorio ha mostrato che ciò non è verificato per la maggior parte dei flussi; questo 'disallineamento' porta in qualche caso a piccole differenze tra le soluzioni calcolate e quelle misurate, mentre altre volte induce errori grossolani. Ricordiamo infine che, anche accettando in modo acritico l'equazione (1.54), il problema non risulta ancora chiuso in quanto le equazioni sono sempre 4 mentre le incognite sono ancora 5 (\mathbf{U} , p e ν^* oppure ν_T).

A questo proposito abbiamo detto che ν_T dipende dal flusso, ossia a seconda che si stia studiando un flusso a valle di un'ostacolo, uno strato limite o un getto turbolento, esistono leggi empirico-euristiche (spesso con correzioni sperimentali o ad hoc) che permettono di calcolare la ν_T dalla geometria del problema o dalle caratteristiche del flusso medio e quindi di chiudere il sistema di equazioni. Anche in questo caso, la descrizione di tutti i modelli per la ν_T viene lasciata ai testi di modellistica della turbolenza mentre in queste note ci limiteremo a commentare un particolare modello algebrico basato sul concetto di lunghezza di mescolamento. Ricordiamo tuttavia che alcuni modelli possono essere tanto complicati da richiedere per il calcolo della ν_T un set di equazioni differenziali più complesse di quello per il calcolo del campo medio.

1.10 viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento

Uno dei primi tentativi effettuati per la determinazione della viscosità turbolenta è stato fatto costruendo un'analogia tra la turbolenza e la diffusione a livello molecolare della quantità di moto. Ricordiamo infatti brevemente che la diffusione molecolare avviene a causa degli urti casuali tra molecole dovuti al moto di agitazione termica. Dalla teoria cinetica dei gas ne consegue che, detta \mathcal{V} la metà della velocità media delle molecole e λ il libero cammino medio si ottiene $\nu \approx \mathcal{V}\lambda$.

Se allora si identificano i vortici più piccoli del flusso come le 'molecole' della turbolenza si può immaginare che questi, dopo aver percorso una distanza ℓ ad una velocità V , interagiscano mescolandosi tra loro e quindi diffondendo la quantità di moto. Il problema della determinazione di ν_T si tradurrà quindi nella valutazione di ℓ (detta appunto lunghezza di mescolamento) e di V .

In figura 1.23 è riportato uno schema di flusso (tipo strato limite) sul quale si possono effettuare semplici ragionamenti intuitivi per determinare l'andamento di ℓ e V . Per questo flusso, infatti, la velocità media U sarà prevalentemente orizzontale ed il suo profilo

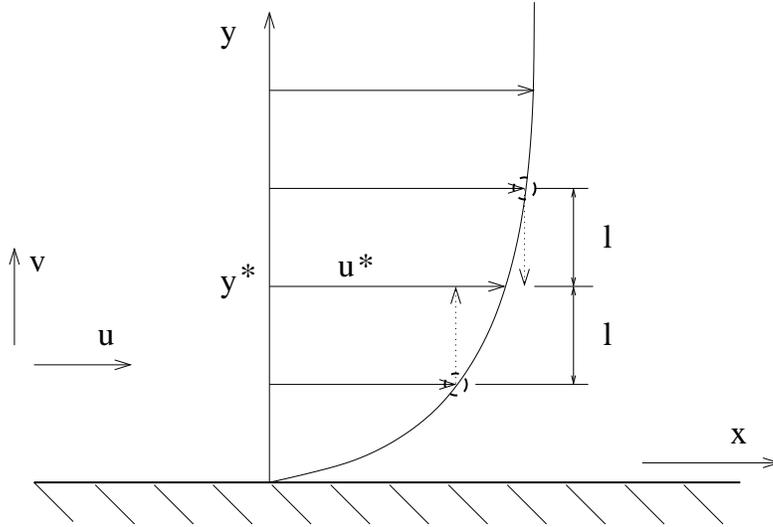


Figura 1.23: Schema di flusso per la definizione di lunghezza di mescolamento e viscosità turbolenta.

dipenderà dalla coordinata normale alla parete y ; se immaginiamo che il flusso abbia uno sviluppo omogeneo in x e statisticamente non ci sia una velocità media nella direzione y , l'unico componente del tensore di Reynolds diverso da zero risulterà $\langle u'_x u'_y \rangle$ che indicheremo per semplicità $\langle u'v' \rangle$. Per mettere in relazione questa quantità incognita alle caratteristiche del flusso medio, immaginiamo quindi di posizionarci alla distanza y^* dalla parete ed osservare in quel punto sia fluttuazioni di velocità verso il basso che verso l'alto. Nel primo caso, una particella inizialmente nella posizione $y^* + l$ verrà trasportata in y^* generando una fluttuazione di velocità orizzontale

$$u'_+ \approx \Delta U_+ = U(y^* + l) - U(y^*) \simeq l \frac{dU}{dy},$$

avendo troncato lo sviluppo in serie di Taylor per la velocità al primo ordine. Analogamente, le fluttuazioni verso l'alto porteranno una particella fluida inizialmente nella posizione $y^* - l$ in y^* inducendo una fluttuazione di velocità

$$u'_- \approx \Delta U_- = U(y^*) - U(y^* - l) \simeq -l \frac{dU}{dy}.$$

Statisticamente avremo quindi che le fluttuazioni di velocità orizzontale in y^* avranno un modulo pari a

$$u' = \frac{1}{2}(|u'_+| + |u'_-|) = l \left| \frac{dU}{dy} \right|.$$

Osserviamo ora che per la conservazione della massa, una variazione positiva di u (particella che si muove da $y^* + l$ ad y^*) induce una fluttuazione negativa di v mentre l'opposto accade per una particella che si muove da $y^* - l$ ad y^* . Ciò implica che si può porre $v' \approx -c_1 u'$ con c_1 costante di ordine uno e che il prodotto $u'v'$ deve essere sicuramente negativo. Con queste ipotesi si può scrivere

$$\langle u'v' \rangle = -c_2 |u'| |v'| = -c_1 c_2 l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 = -\ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2 \quad (1.56)$$

in cui c_2 è ancora una costante di ordine uno, ℓ è la lunghezza di mescolamento e $\ell|dU/dy| = V$ è la velocità cercata. Ciò si evince facilmente confrontando la relazione appena trovata con la (1.54) ed osservando che per questo semplice flusso risulta $2E_{12} = dU/dy$ da cui si ricava $\nu_T = \ell V = \ell^2|dU/dy|$.

L'ultimo punto che rimane da chiarire è come determinare ℓ in funzione della geometria del flusso. Prandtl nel 1925 osservò che risultando alla parete ($y = 0$) $\mathbf{u} \equiv 0$ anche gli sforzi turbolenti dovranno essere nulli in quel punto; con questo vincolo l'assunzione più semplice per la ℓ è

$$\ell = Ay. \quad (1.57)$$

Prandtl suppose anche che, tranne che per gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla parete, gli sforzi turbolenti fossero molto più grandi degli sforzi puramente viscosi, che quindi erano trascurabili, e che i primi si mantenessero di intensità costante. Indicando con $\tau_T/\rho = -\langle u'v' \rangle$ gli sforzi turbolenti l'assunzione (1.57) implica quindi

$$\frac{\tau_T}{\rho} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|^2, \implies \sqrt{\frac{\tau_T}{\rho}} = Ay \frac{dU}{dy} \implies U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_T}} = \frac{1}{A} \ln y + C, \quad (1.58)$$

che fornisce l'andamento della velocità media U in funzione della distanza dalla parete.

D'altra parte, queste ipotesi non possono essere applicate alla parete dove, a causa della condizione di aderenza, il flusso deve essere laminare. In quella regione infatti si deve assumere che gli sforzi turbolenti siano trascurabili, mentre quelli viscosi sono i più rilevanti e sono approssimativamente costanti (che è equivalente ad ammettere che il profilo di velocità alla parete sia linearizzabile). Indicando quindi lo sforzo viscoso di parete come

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0}, \quad (1.59)$$

è possibile definire delle scale di velocità e lunghezza $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ e $\delta_\tau = \nu/u_\tau$ dette, rispettivamente velocità e lunghezza d'attrito, con le quali è possibile adimensionalizzare le quantità della turbolenza di parete. In particolare, la relazione (1.59) con τ_w costante può essere facilmente integrata

$$\sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} U = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{y}{\nu} + c \implies U^+ = y^+, \quad (1.60)$$

dovendo risultare $c = 0$ per le condizioni alla parete ed avendo indicato

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} = U \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{y}{\delta_\tau} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.61)$$

dette quantità di parete.

Allo stesso modo, u_τ e δ_τ possono essere utilizzate per rendere adimensionale la (1.58) che assume la forma

$$U^+ = \frac{1}{\alpha} \ln y^+ + \beta \quad (1.62)$$

in cui $\alpha = 0.4$ e $\beta = 5.5$ sono delle costanti in cui sono compresi tutti i fattori di normalizzazione e risultano universali per tutti i flussi turbolenti di parete che ricadono nella tipologia della figura 1.23.

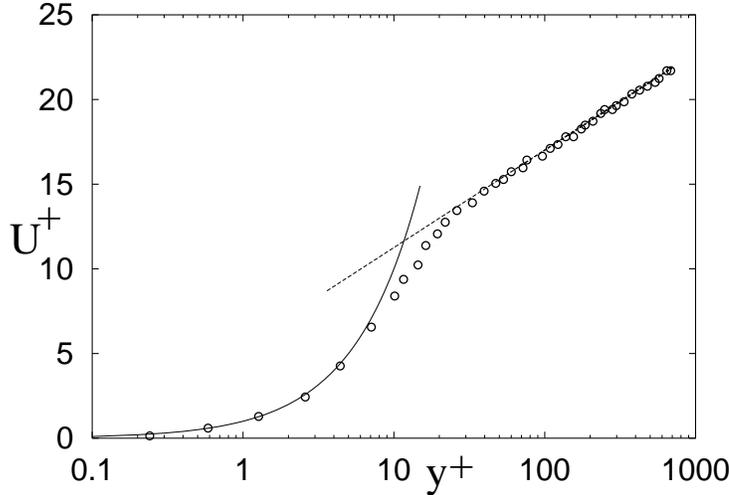


Figura 1.24: Andamento della velocità media in funzione della distanza dalla coordinata y (quantità di parete). Le linee indicano gli andamenti teorici, mentre i simboli sono valori misurati.

Un andamento tipico della velocità normalizzata U^+ in funzione delle coordinate di parete y^+ è riportato in figura 1.24 da cui si nota che il flusso ha due comportamenti distinti. Il primo per $y^+ \leq 5$ in cui la U^+ segue la legge (1.60); questa regione è detta sottostrato laminare ed è caratterizzata da sforzi puramente viscosi di intensità circa costante. La seconda regione per $y^+ \geq 30$ segue la legge riportata in (1.62) ed è dovuta a sforzi turbolenti di intensità costante. La regione intermedia ($5 \leq y^+ \leq 30$) è una regione di sovrapposizione dei due regimi in cui sia sforzi viscosi che turbolenti hanno rilevanza sul fenomeno.

Il profilo di velocità di figura 1.24 mostra chiaramente che l'assunzione (1.57) per la lunghezza di mescolamento descrive in modo adeguato la dinamica della turbolenza di parete. Questo risultato, tuttavia, non deve trarre in inganno in quanto una tale semplificazione funziona solo nel caso in cui nel flusso non ci sono separazioni, in assenza di gradienti di pressione esterni e per geometrie piane. Nelle applicazioni pratiche la geometria del flusso è solitamente più complicata e devono essere utilizzati modelli più complessi e con fisica meno intuitiva.

1.11 cascata dell'energia, ipotesi di continuo e relazioni costitutive

Nelle sezioni precedenti è stato osservato che detta L la scala di lunghezza in cui avviene l'immissione di energia del flusso (scala integrale) ed η la dimensione della più piccola struttura presente nel sistema (scala di Kolmogorov) in condizioni di locale omogeneità ed isotropia vale la relazione

$$\frac{\eta}{L} \simeq Re^{-3/4}, \quad (1.63)$$

in cui il numero di Reynolds è definito come $Re = u'L/\nu$ con u' il valore quadratico medio delle fluttuazioni di velocità. La relazione (1.63) non è applicabile in prossimità di pareti nel qual caso la più piccola lunghezza di riferimento è l'unità di parete $\delta^+ = \nu/u_\tau$ essendo $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ e τ_w lo sforzo viscoso medio a parete. Se c_f è il coefficiente d'attrito tra flusso e parete si può scrivere $u_\tau = \sqrt{(c_f/2)U}$ dove U è la velocità della corrente indisturbata. Se H è la più grande scala di lunghezza (per esempio in un canale piano sarebbe la distanza tra le pareti ed in un tubo cilindrico il diametro) si può scrivere

$$\frac{\delta^+}{H} \simeq \sqrt{\frac{2}{c_f}} Re_H^{-1}, \quad (1.64)$$

essendo in questo caso $Re_H = UH/\nu$. Poiché la teoria della turbolenza viene sempre considerata nel limite $Re \rightarrow \infty$ è lecito chiedersi se oltre un certo valore di Re le lunghezze η o δ^+ non diventino così piccole da violare l'ipotesi di continuo. Tale domanda assume una rilevanza ancora maggiore quando si consideri che la relazione costitutiva per un fluido Newtoniano

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{E} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (1.65)$$

(essendo $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{E} ed \mathbf{I} rispettivamente la parte deviatorica del tensore degli sforzi viscosi, la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità ed il tensore identità) ha come ipotesi di base che $\boldsymbol{\tau}$ dipenda linearmente dal tensore $\nabla\mathbf{u}$ ossia che in uno sviluppo in serie di Taylor di $\boldsymbol{\tau}$ in funzione di $\nabla\mathbf{u}$ si possa troncare la serie al termine di primo ordine. È bene notare che essendo $\nabla\mathbf{u}$ l'inverso di un tempo tale ipotesi equivale a richiedere che la scala temporale più piccola del flusso (t_η) sia comunque molto più grande dei tempi caratteristici dei fenomeni microscopici che generano la viscosità²⁰.

²⁰ Per derivare questa espressione per la relazione costitutiva, detto \mathbf{T} il tensore degli sforzi nell'equazione di Cauchy

$$\frac{D\rho\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.66)$$

bisogna mettere \mathbf{T} in relazione allo stato di moto nell'intorno di un punto.

Notiamo subito che nel caso di fluido fermo, le azioni viscosive saranno identicamente nulle e l'unica forza di superficie sarà la pressione, risultando identicamente $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, con \mathbf{I} il tensore identità. In generale tuttavia il fluido sarà in movimento ed il tensore degli sforzi avrà anche i termini deviatorici risultando così

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (1.67)$$

Vogliamo ora determinare come il tensore $\boldsymbol{\tau}$ dipende dal campo di velocità, o meglio, dalla deviazione della velocità rispetto ad una corrente uniforme visto che in questo caso gli sforzi viscosi sono nulli. A tale scopo facciamo due ipotesi giustificate dall'evidenza sperimentale: (i) $\boldsymbol{\tau}$ dipende solo dalla distribuzione istantanea del campo di velocità ossia la storia di \mathbf{u} non influenza il valore di $\boldsymbol{\tau}$, (ii) il fluido in esame è isotropo, ossia $\boldsymbol{\tau}$ è indipendente dall'orientamento dell'elemento di fluido²¹. Nelle suddette ipotesi, la forma più generale che può assumere $\boldsymbol{\tau}$ è (scritta per componenti):

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mathcal{O}[(\nabla\mathbf{u})^2]. \quad (1.68)$$

Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che $\nabla\mathbf{u}$ sia 'piccolo' abbastanza da poter trascurare i termini $\mathcal{O}[(\nabla\mathbf{u})^2]$ e superiori così da poter scrivere

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (1.69)$$

La velocità v_η delle strutture di dimensione η assume la forma $v_\eta \simeq (\nu\epsilon)^{1/4}$ e quindi $t_\eta \simeq \eta/v_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$. Indicando con $t_L = L/u'$ il tempo caratteristico delle strutture più grandi (large-eddy-turnover time) si può scrivere

$$\frac{t_\eta}{t_L} \simeq Re^{-1/2}, \quad (1.74)$$

suggerendo che per $Re \rightarrow \infty$, t_η potrebbe diventare così piccolo da invalidare l'ipotesi di fluido Newtoniano. In prossimità di una parete solida la più piccola scala temporale fluidodinamica sarà $t_{\delta^+} \simeq \delta^+/u_\tau = \nu/u_\tau^2$ mentre quella più grande $t_H = H/U$ per cui il rapporto è

$$\frac{t_{\delta^+}}{t_H} \simeq \frac{2}{c_f} \frac{1}{Re_H}, \quad (1.75)$$

che tende a zero per $Re_H \rightarrow \infty$ potendo rendere così non valida la relazione costitutiva (1.65).

Per chiarire le questioni appena discusse ricordiamo che la viscosità in un gas è la manifestazione macroscopica di un trasferimento di quantità di moto a livello molecolare prodotto dagli urti tra molecole durante il loro moto Browniano. Utilizzando la teoria di Chapman–Enskog si ha

$$\nu = C\lambda a \quad (1.76)$$

Notiamo che $\boldsymbol{\tau}$, e quindi A_{ijkl} , non possono dipendere esplicitamente da \mathbf{u} per l'invarianza Galileiana e nemmeno da derivate temporali di \mathbf{u} in quanto siamo nell'ipotesi di fluidi senza effetto memoria. A_{ijkl} può dipendere dallo stato del fluido (per esempio dalla temperatura) e persino dagli invarianti del tensore $\nabla \mathbf{u}$ (ma non dal tensore stesso). Notiamo infine che, essendo $\boldsymbol{\tau}$ simmetrico in i e j , tale deve risultare anche il tensore \mathbf{A} da cui ne consegue che la forma più generale che può assumere è

$$A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (1.70)$$

essendo δ_{ij} il delta di Kronecker. Osservando che questa espressione, oltre che in i e j , risulta simmetrica anche in k ed l , ne segue $b = c$. Se ora decomponiamo $\nabla \mathbf{u}$ nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica ($\nabla \mathbf{u}|_{i,j} = E_{ij} + \Omega_{ij}$), scopriamo che quando viene moltiplicato per \mathbf{A} sopravvive solo la parte simmetrica in quanto anche \mathbf{A} è simmetrico. Come ultimo passo ricordiamo che $\boldsymbol{\tau}$ è solo la componente deviatorica di \mathbf{T} deve quindi risultare identicamente $\tau_{ii} \equiv 0$ da cui ne consegue

$$\tau_{ij} = a\delta_{ij}E_{kk} + 2bE_{ij}. \quad (1.71)$$

Avevamo comunque detto che deve valere $\tau_{ii} \equiv 0$ e se nella (1.71) si pone $i = j$ si ottiene

$$3a\nabla \cdot \mathbf{u} + 2b\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \implies a = -\frac{2}{3}b, \quad (1.72)$$

per cui si è passati da un tensore A_{ijkl} del quarto ordine con 81 componenti incognite alla sola incognita b .

Per collegare b alle proprietà del fluido si ricorre a prove sperimentali; se per esempio abbiamo un flusso con velocità solo nella direzione x che varia lungo la direzione y si ha sperimentalmente $\tau_{yx} = \mu du_x/dy$ essendo μ la viscosità del fluido, da cui si può congetturare $b = \mu$. Con questa posizione il legame tra $\boldsymbol{\tau}$ e lo stato di moto nell'intorno di un punto diventa

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (1.73)$$

che è la relazione costitutiva per fluidi Newtoniani.

in cui C è una costante di ordine unitario che dipende dal particolare gas, λ è il libero cammino medio molecolare ed $a = \sqrt{\gamma RT}$ la velocità del suono nel gas ($\gamma = C_p/C_V$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, R la costante del gas dell'equazione di stato e T la temperatura assoluta). In un liquido la viscosità è generata da meccanismi molto diversi rispetto ad un gas (prevalentemente dalla presenza di labili legami tra le molecole) e la teoria di Chapman–Enskog non è valida. Al solo scopo di consentire la presente discussione e per analogia con la (1.76) si può comunque porre

$$\nu = C' \lambda' a', \quad (1.77)$$

con l'avvertenza che C' andrebbe comunque calcolata dal valore di ν ($C' = \nu/(\lambda'a')$). Nell'espressione (1.77) C' è quindi ancora una costante che dipende dal liquido, λ' la distanza media tra le molecole ed $a' = \sqrt{E/\rho}$ la velocità del suono (E è il modulo di comprimibilità del liquido).

Se ora riconsideriamo la relazione (1.63) e la riscriviamo con le (1.76) e (1.77) per ν abbiamo

$$\frac{\eta}{L} \simeq Re^{-3/4} = \frac{\nu}{u'L} Re^{1/4} = \frac{C\lambda a}{u'L} Re^{1/4}, \quad (1.78)$$

che, indicando il numero di Mach $Ma = u'/a$ diventa

$$\frac{\eta}{\lambda} = C \frac{Re^{1/4}}{Ma}. \quad (1.79)$$

Questa espressione indica che se il numero di Reynolds cresce lasciando costante il numero di Mach (il che può accadere se aumenta L o diminuisce ν) l'ipotesi di continuo diventa tanto migliore ($\eta \gg \lambda$) quanto più il numero di Reynolds diventa elevato. Se invece il numero di Reynolds cresce perché aumenta u' allora anche il numero di Mach cresce insieme a Re e gli effetti di comprimibilità diverranno dominanti molto prima che η diventi confrontabile con λ .

In prossimità di pareti solide invece della relazione (1.63) bisogna usare la (1.64) che può essere riscritta come:

$$\frac{\delta^+}{H} \simeq \sqrt{\frac{2}{c_f}} Re_H^{-1} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \frac{C\lambda a}{UH}, \quad (1.80)$$

da cui indicando con $Ma_U = U/a$ il numero di Mach calcolato con la velocità indisturbata U si ha

$$\frac{\delta^+}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \frac{C}{Ma_U}. \quad (1.81)$$

In questa relazione il coefficiente d'attrito c_f (da non confondere con il coefficiente di resistenza che di solito contiene anche il contributo della pressione) risulta $\ll 1$ e decrescente al crescere di Re per cui analogamente alla (1.79) se il numero di Reynolds cresce lasciando Ma_U invariato l'ipotesi di continuo ($\delta^+ \gg \lambda$) diventa un'approssimazione sempre migliore. Al contrario, se Re cresce a causa di U allora aumenta anche il numero di Mach e gli effetti di alto numero di Mach diventeranno preponderanti molto prima che δ^+ e λ diventino confrontabili.

Per quanto concerne l'ipotesi di fluido Newtoniano, detto t_m il tempo medio molecolare che intercorre tra due collisioni successive possiamo porre $t_m \simeq C''\lambda/a = \hat{C}\nu/a^2$ in cui

sia C'' che \widehat{C} sono costanti di ordine unitario. L'ipotesi di fluido Newtoniano richiede che risulti qualunque fenomeno fluidodinamico molto più lento dei tempi molecolari $t_\eta \gg t_m$: se siamo lontani da pareti solide dalla relazione (1.74) possiamo scrivere

$$\frac{t_\eta}{t_m} \simeq Re^{-1/2} \frac{L}{u'} \frac{a^2}{\widehat{C}\nu} = \frac{Re^{1/2}}{\widehat{C}Ma^2}, \quad (1.82)$$

da cui si evince nuovamente che se Re cresce e Ma rimane costante allora l'ipotesi di fluido Newtoniano è sempre più verificata mentre se Re e Ma crescono entrambi il numero di Mach deve assumere valori estremamente elevati prima che t_η e t_m risultino confrontabili.

Se siamo invece in prossimità di pareti solide la più piccola scala temporale fluidodinamica sarà $t_{\delta^+} \simeq \delta^+/u_\tau = \nu/u_\tau^2$ che confrontata con t_m dà

$$\frac{t_{\delta^+}}{t_m} \simeq \frac{2}{c_f} \frac{1}{\widehat{C}Ma_\tau^2}, \quad (1.83)$$

per cui valgono tutte le considerazioni precedentemente fatte sulla (1.81).

L'ultimo commento che deve essere fatto a questa discussione è che le relazioni precedenti potrebbero cambiare notevolmente di significato se le costanti C e C' delle relazioni (1.76) e (1.77) non fossero di ordine unitario. Se il fluido è un gas C è calcolabile teoricamente una volta nota la forma delle molecole e la natura delle loro collisioni ($C \simeq 0.6$ per molecole sferiche e collisioni elastiche) e la condizione $C = \mathcal{O}(1)$ è sempre verificata. Per un liquido, al contrario, il valore di C' può essere calcolato solo dal valore di ν che dipende dalla temperatura: per i fluidi più comuni in condizioni standard risulta effettivamente $C' = \mathcal{O}(1)$ (per esempio per l'acqua a $20^\circ C$ risulta $C' = 2.18$ per il mercurio alla stessa temperatura $C' = 0.28$ mentre per l'ossigeno liquido a $-210^\circ C$ e 10 atm risulta $C' = 1.12$ e per l'elio liquido a $-270^\circ C$ e 10 atm si ha $C' = 0.34$). Ci sono però alcuni casi di fluidi iperviscosi (come la glicerina a $20^\circ C$ con $C' = 1244$) o superfluidi (come l'elio liquido a $-272^\circ C$ con $C' \rightarrow 0$) per cui l'ipotesi $C' = \mathcal{O}(1)$ non è applicabile ed effetti non Newtoniani o di 'non continuo' potrebbero evidenziarsi per particolari valori di Re e Ma .

1.12 simulazione numerica della turbolenza

Il meccanismo comune a tutti i fenomeni di turbolenza è la cascata dell'energia dalle strutture più grandi delle dimensioni del corpo che genera la turbolenza fino alle strutture più fini dell'ordine di grandezza della scala di Kolmogorov η . Il trasferimento di energia dalle grandi alle piccole scale avviene tramite i termini non lineari e di pressione con un processo essenzialmente non viscoso che quindi non dissipa energia. Come è stato visto brevemente nell'analisi della turbolenza omogenea ed isotropa la maggior parte dell'energia del flusso è nelle grandi scale, mentre la dissipazione avviene alle piccole scale e le prime sono in costante equilibrio con le ultime attraverso il range-inerziale.

Purtroppo per i flussi ad elevato numero di Reynolds la differenza di dimensioni esistente tra le scale più grandi e quelle più piccole diventa esorbitante ed in qualche punto della cascata bisogna necessariamente operare un taglio al di là del quale utilizzare un modello; la differenza esistente tra le varie tecniche di calcolo consiste proprio nella posizione del 'taglio' nella cascata o, in altre parole, in quali scale di moto si è disposti a calcolare e quali modellare.

1.12.1 Simulazione Diretta (DNS)

La tecnica più ovvia è quella di non applicare nessun taglio alle scale del moto e simularle tutte, dalla dimensione L_G del corpo intorno o dentro cui si ha il flusso fino alla scala di Kolmogorov η . Poiché normalmente le scale di moto contenenti la maggior parte dell'energia e con dinamica non omogenea hanno dimensioni L di una frazione di quella del corpo, in questa analisi ci limitiamo a quantificare solo il rapporto L/η rammentando, però che la quantità L_G/η implica un ulteriore incremento di un fattore dell'ordine di 3–10.

Ricordando quanto ricavato per la turbolenza omogenea ed isotropa, dalla stima per ϵ , dalle relazioni (1.37) e ricordando la definizione del numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, si ottiene:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}, \quad \frac{U}{u_\eta} = Re^{1/4}, \quad \frac{T}{t_\eta} = Re^{1/2}, \quad (1.84)$$

in cui $T = L/U$ è la scala dei tempi dei moti a grande scala.

La prima di queste relazioni ci dice che per ogni lunghezza L vi sono $Re^{3/4}$ strutture di dimensioni η ed ognuna di queste deve essere adeguatamente rappresentata per simulare il flusso senza alcun modello. Se la simulazione avviene mediante una griglia di calcolo ciò implica che per ogni lunghezza L ci devono essere un numero di nodi $N \sim Re^{3/4}$ e quindi per un cubo di volume L^3 sono necessari $N_{tot} = N^3 \sim Re^{9/4}$ punti di calcolo. Sebbene questa stima cresca abbastanza rapidamente con il numero di Reynolds da ‘sconsigliare’ questo approccio già per valori moderati di Re , è bene precisare che la stima appena data non è completa. Infatti, siccome l'integrazione delle equazioni deve essere eseguita con un passo temporale Δt discreto, questo deve essere commisurato alla dinamica del flusso. In particolare la simulazione numerica deve essere portata avanti per un tempo lungo abbastanza da consentire la valutazione delle statistiche delle strutture più grandi (e quindi più lente) il che significa che la durata della simulazione deve essere dell'ordine di T . D'altra parte, il passo temporale non può essere più grande di t_η in quanto anche la dinamica delle scale di dimensione η deve essere catturata. Osservando quindi che risulta $T/t_\eta = Re^{1/2}$ si ha che il numero di gradi di libertà spatio-temporali è proporzionale a $Re^{11/4}$. La stima diventa ancora più severa quando si consideri che le piccole scale vengono trasportate dalle velocità indotte dalle grandi scale su una griglia fissa e quando si tenga in conto la presenza di pareti.

Come regola pratica possiamo affermare che, allo stato attuale delle cose la simulazione diretta di un flusso ad un numero di Reynolds di qualche migliaio $\mathcal{O}(5000 - 10000)$ già costituisce una sfida per i moderni supercalcolatori anche limitandosi ad una geometria semplificata. Se poi si aggiungono le complessità geometriche delle applicazioni industriali, e le disomogeneità del flusso, si arriva alla conclusione che la simulazione diretta della turbolenza, ossia la soluzione delle equazioni di Navier–Stokes senza alcun modello, non costituisce una possibilità di indagine di problemi pratici neanche nei prossimi decenni. Ciò continua ad essere vero anche ipotizzando una crescita delle potenze di calcolo simile al passato ossia con un raddoppio della velocità di elaborazione ogni 18 mesi, come si è verificato negli ultimi tre decenni (legge di Moore).

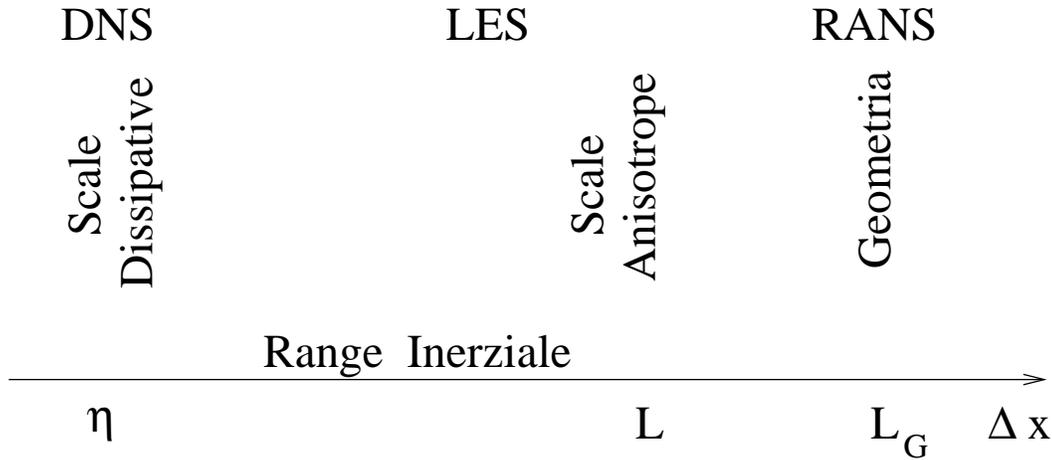


Figura 1.25: Disegno schematico dell'ampiezza della spaziatura di griglia in relazione alla tecnica di calcolo e delle scale del moto.

1.12.2 Modellistica RANS

Una filosofia completamente opposta alla simulazione diretta è quella dei metodi RANS; questo acronimo Reynolds–Averaged–Navier–Stokes (equations) ossia equazioni di Navier–Stokes mediate secondo Reynolds implica la soluzione delle equazioni (1.53) in cui il tensore di Reynolds $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ viene parametrizzato con un modello di turbolenza. Nella sezione 1.9 abbiamo commentato l'assunzione di 'gradiente diffusivo', viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento mentre in questo ambito mostreremo brevemente i modelli tipo $K - \epsilon$. In questi modelli, l'energia cinetica turbolenta K e la sua velocità di dissipazione ϵ vengono utilizzate per creare, mediante considerazioni dimensionali, una scala di lunghezze e di tempo, $\ell = K^{3/2}/\epsilon$ e $\mathcal{T} = K/\epsilon$, rispettivamente. Con queste quantità è possibile costruire una viscosità turbolenta $\nu_T = C_\nu \ell^2/\mathcal{T}$ ossia

$$\nu_T = C_\nu \frac{K^2}{\epsilon}, \quad (1.85)$$

con C_ν una costante da determinare empiricamente. È utile notare che l'espressione per ν_T in funzione di K ed ϵ è l'unica che si può scrivere se si fa l'ipotesi che la viscosità turbolenta dipende solo da quantità turbolente mentre è indipendente dal campo medio o da grandezze da esso derivate. Ricordiamo che ν_T è una funzione dello spazio (e per flussi non stazionari anche del tempo) quindi anche K ed ϵ avranno valori che dipenderanno dalla particolare regione del flusso. Per determinare le distribuzioni spaziali di K ed ϵ bisogna risolvere delle equazioni di evoluzione, la prima delle quali è già stata derivata nella (1.51). Quella equazione, tuttavia, contiene a sua volta dei termini incogniti che devono essere in qualche modo modellati. La chiusura più comune è di tipo gradiente diffusivo che porta ad un'equazione del tipo

$$\frac{\mathcal{D}K}{\mathcal{D}t} = \mathcal{P} - \epsilon + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \nabla k \right), \quad \text{con} \quad \mathcal{P} = \frac{\nu_T}{2} [\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T]^2, \quad (1.86)$$

in cui di nuovo σ_k è una costante empirica. La derivata $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ è simile alla derivata materiale ma il termine di accelerazione convettiva contiene solo la velocità media \mathbf{U} invece della velocità totale \mathbf{u} .

Contrariamente all'equazione per K , quella per ϵ viene concepita direttamente come un'equazione modello in quanto i termini da parametrizzare nell'equazione esatta risulterebbero più numerosi che nell'equazione per K . La relazione normalmente utilizzata è del tipo

$$\frac{\mathcal{D}\epsilon}{\mathcal{D}t} = C_{\epsilon 1} \frac{\mathcal{P}\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right), \quad (1.87)$$

con $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ e σ_ϵ costanti da determinare.

Appare evidente come la soluzione del sistema di equazioni (1.85)–(1.87), insieme alle equazioni di Reynolds per il campo medio, sia fortemente dipendente dai valori delle costanti empiriche; un set di valori largamente utilizzato è $C_\nu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ anche se questi valori vengono spesso modificati per tenere conto di condizioni di flusso diverse da quelle in cui sono stati determinati. Per flussi fortemente disomogenei come flussi rotanti o flussi stratificati vengono invece cambiate le equazioni (1.86) e (1.87) aggiungendo altri termini (che a loro volta possono contenere ulteriori costanti empiriche) per tenere in conto il cambiamento della fisica del flusso di base.

L'estrema specificità della modellistica RANS risulta facilmente comprensibile quando si noti che con questo approccio si tende a simulare esplicitamente solo la componente media, o al più quella lentamente variabile, di un flusso mentre tutte le fluttuazioni sono modellate come turbolenza. Nella breve analisi della turbolenza isotropa, tuttavia, abbiamo visto che le scale del moto più grandi $\mathcal{O}(L)$ sono quelle meno omogenee e più dipendenti dal problema in quanto sono posizionate solo all'inizio del processo di cascata dell'energia ed ancora non hanno assunto una dinamica 'universale'. D'altra parte, le grandi scale del moto hanno deboli gradienti spaziali $\mathcal{O}(U/L)$ ed una dinamica lenta $\mathcal{O}(L/U)$, permettendone la simulazione con una griglia di calcolo la cui spaziatura è essenzialmente indipendente dal numero di Reynolds e con un passo temporale che è una frazione della scala temporale imposta dalla geometria del problema (e quindi di nuovo indipendente dal numero di Reynolds).

Attualmente, questo tipo di modellistica è quello standard a livello industriale in quanto consente di simulare flussi industriali in 'scala 1 : 1' con un costo accettabile e con risultati sufficientemente accurati quando si disponga di un set di coefficienti o di equazioni modello già validati e tarati per quel tipo di problemi.

1.12.3 Large–Eddy–Simulation (LES)

Un terzo tipo di approccio, intermedio tra la DNS ed i RANS, è la tecnica LES o Large–Eddy–Simulation in cui tutte le strutture (anche definite come 'eddies') più grandi ma comunque già nel range inerziale vengono esplicitamente simulate con una griglia adeguatamente fitta mentre le scale del moto più piccole della griglia (o scale di sottogriglia) vengono parametrizzate con un modello. Questo approccio sembrerebbe del tutto simile alle medie di Reynolds ed effettivamente l'unica differenza è che in questo caso il 'taglio' tra ciò che viene simulato e ciò che viene modellato non dipende solo dalla geometria del problema ma anche dall'estensione del range inerziale. Il vantaggio fondamentale in questo approccio è che le scale di moto nel range inerziale si trovano nel mezzo della cascata dell'energia e sono già state adeguatamente omogeneizzate dalla successiva frammentazione delle strutture più grandi. Ciò implica che la loro dinamica sarà essenzialmente

indipendente dalla particolare geometria del problema ed avrà un carattere più universale. In questo caso è possibile derivare un unico modello di turbolenza che vada bene per qualunque tipologia di flusso e debba essere tarato una sola volta per tutte.

La derivazione delle equazioni per la modellistica LES è effettuata in modo molto simile alle equazioni di Reynolds. Definendo infatti un'operazione di filtraggio

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \quad (1.88)$$

è possibile suddividere i campi di velocità e pressione in parte filtrata e parte di sottogriglia

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t). \quad (1.89)$$

$G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ è il filtro che può essere definito sia nello spazio fisico che nello spazio dei numeri d'onda e può avere numerose forme specifiche (gaussiana, finestra rettangolare, finestra triangolare, etc.); la caratteristica comune a tutti i filtri è che hanno un supporto compatto nello spazio e tagliano in qualche modo le scale del moto più piccole di quelle del supporto del filtro. È importante notare che differentemente dalle medie di Reynolds, si hanno in generale le seguenti disuguaglianze (a meno che il filtro G non sia di fatto un filtro spettrale che taglia tutti numeri d'onda maggiori di un valore di soglia k_c e lascia inalterati quelli più piccoli):

$$\bar{\bar{\mathbf{U}}} \neq \mathbf{U}, \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{u}'} \neq 0, \quad (1.90)$$

inoltre l'operazione di filtraggio e quella di differenziazione nello spazio non è detto che siano commutative (mentre lo sono sempre per la differenziazione nel tempo). Sebbene sia possibile trovare dei filtri per cui le disuguaglianze (1.90) diventino delle uguaglianze e per i quali filtro e derivata siano commutativi, lasceremo ai testi specialistici la discussione di tutte le eventualità; in queste brevi note, ci vogliamo invece limitare a mostrare le equazioni filtrate ed un possibile semplice modello.

Ammettendo la commutatività tra filtro e derivazione spaziale, filtrando le equazioni di Navier–Stokes si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_{sgs}), \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\tau}_{sgs} = \bar{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \mathbf{U}\mathbf{U}, \quad (1.91)$$

in cui \mathbf{E} è il tensore velocità di deformazione calcolato con il campo filtrato e $\boldsymbol{\tau}_{sgs}$ sono gli sforzi di sottogriglia analoghi agli sforzi di Reynolds nelle equazioni RANS. Questi sforzi vengono modellati con un'ipotesi di 'gradiente diffusivo' e la loro parte deviatorica viene parametrizzata con una viscosità turbolenta

$$\boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_{sgs} - \frac{3}{2} Tr(\boldsymbol{\tau}_{sgs}) \mathbf{I} = -2\nu_T \mathbf{E}, \quad (1.92)$$

mentre la parte isotropa viene incorporata in una pressione modificata $P^* = P + \frac{3}{2} Tr(\boldsymbol{\tau}_{sgs})$. L'espressione per ν_T viene determinata con un semplice modello di lunghezza di mescolamento ℓ assumendo che quest'ultima sia proporzionale alla spaziatura di griglia Δ , ottenendo $\nu_T = (C_\nu \Delta)^2 |\mathbf{E}|$ con $|\mathbf{E}|^2 = 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. La costante C_ν , detta anche costante di Smagorinsky, è appunto il parametro che deve essere tarato (una volta per tutte) per fare

in modo che $\boldsymbol{\tau}_d$ modellato secondo la (1.92) sottragga al campo di velocità filtrato \mathbf{U} la stessa quantità di energia che sottrarrebbe $\boldsymbol{\tau}_d$ calcolato in modo esatto (se fosse noto). La determinazione empirica di C_ν dà valori compresi tra 0.15 e 0.20 che risulta in ottimo accordo con il valore teorico di C_ν derivato per la turbolenza omogenea ed isotropa. Notiamo infatti che come abbiamo ricavato in §1.4 l'equazione per l'energia cinetica (per unità di massa) $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ del campo di velocità non filtrato \mathbf{u} ha come unico termine di dissipazione la ϵ . Se invece ricaviamo l'equazione per $\overline{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ per il campo filtrato ²² \mathbf{U} ci saranno due termini dissipativi $\overline{\epsilon} = -2\nu\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ e $P = -\boldsymbol{\tau}_d \cdot \mathbf{E}$. Di questi due termini solo il primo è effettivamente un termine viscoso ma il suo contributo è trascurabile in quanto il campo filtrato è privo dei grandi numeri d'onda in cui sono contenuti i gradienti elevati. Il termine di produzione P , al contrario, è puramente inerziale ma costituisce l'effettiva dissipazione per $\overline{\mathcal{K}}$ in quanto sottrae energia dal campo filtrato \mathbf{U} per trasferirlo ai termini di sottogriglia \mathbf{u}' . Se l'ampiezza del filtro Δ ha il numero d'onda corrispondente $k_c = \pi/\Delta$ nel range inerziale allora il campo \mathbf{U} avrà praticamente lo stesso contenuto energetico di \mathbf{u} ossia $\langle \mathcal{K} \rangle \approx \langle \overline{\mathcal{K}} \rangle$, dove $\langle \dots \rangle$ indica la media sul volume fluido. Ciò implica che la 'dissipazione' di energia nell'equazione per $\overline{\mathcal{K}}$ deve essere uguale a quella per \mathcal{K} e quindi $\langle P \rangle \approx \epsilon$. Dalla definizione di P e dalla (1.92) si può porre $\langle P \rangle = (C_\nu\Delta)^2 \langle |\mathbf{E}|^3 \rangle$. Per un flusso di turbolenza omogenea ed isotropa si può stimare $\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle$ dallo spettro di Kolmogorov $E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ risultando

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = 2 \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle = 2 \int_0^\infty k^2 \overline{E(k)} dk, \quad (1.93)$$

in cui $\overline{E(k)}$ è lo spettro ottenuto dal campo di velocità filtrato \mathbf{U} . Essendo $\overline{E(k)} = \widehat{G}(k)^2 E(k)$, con $\widehat{G}(k)$ la trasformata di Fourier del filtro $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, che di fatto risulta funzione del prodotto $k\Delta$. Sostituendo l'espressione di $E(k)$ nell'ultima delle (1.93) si ottiene

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = C\epsilon^{2/3}\Delta^{-4/3}A, \quad \text{con} \quad A = 2 \int_0^\infty (k\Delta)^{1/3} \widehat{G}(k\Delta)^2 d(k\Delta). \quad (1.94)$$

È utile notare che A è una costante indipendente da Δ ma che varia con la specifica forma del filtro, tuttavia il suo valore è $A \approx 7$ per i filtri più comunemente usati nella LES. Se ora nella relazione $\langle P \rangle \approx \epsilon$ usiamo $\langle |\mathbf{E}|^3 \rangle \approx \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle^{3/2}$ con la (1.94) e con il valore universale $C = 1.5$ per la costante di Kolmogorov possiamo ricavare il valore di C_ν che risulta $C_\nu \approx 0.17$ (ottenuta per un filtro spettrale) in ottimo accordo con i valori empiricamente usati nelle simulazioni numeriche.

Vista la struttura del tutto identica tra la modellistica LES e quella RANS è lecito domandarsi perchè la prima sia preferibile alla seconda, anche in considerazione del fatto che dovendo simulare le scale del modo fino al range inerziale il costo computazionale per una simulazione LES è notevolmente più elevato di una RANS. La risposta è nel fatto che nel range inerziale avviene essenzialmente un trasferimento di energia verso le scale dissipative e questo trasferimento ha un carattere universale. In questo caso è sufficiente

²²L'equazione si ottiene dalla (1.91) moltiplicata scalarmente per \mathbf{U} ottenendo:

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\overline{\mathcal{K}}) - \nabla \cdot \left[\mathbf{U} \cdot \left(2\nu\mathbf{E} - \frac{P^*}{\rho}\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_d \right) \right] = -2\nu\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_d \cdot \mathbf{E}.$$

che i termini modellati nelle (1.91) sottraggano la giusta quantità di energia al campo filtrato indipendentemente dal meccanismo particolare che sottrae questa energia.

Un notevole miglioramento alla modellistica LES è dato dalla procedura dinamica per il calcolo della costante C_ν . L'idea fondamentale consiste nell'utilizzare due livelli di filtro Δ e $\tilde{\Delta}$, rispettivamente filtro implicito e filtro test, per calcolare i due campi di velocità $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{u}}$. Le equazioni per questi campi di velocità avranno gli sforzi di sottogriglia

$$\boldsymbol{\tau}_{sgs} = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \mathbf{U}\mathbf{U} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}_{sgs}^* = \widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}, \quad (1.95)$$

contenenti i termini incogniti $\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ e $\widetilde{\mathbf{u}\mathbf{u}}$. Se però si filtra $\boldsymbol{\tau}_{sgs}$ con $\tilde{\Delta}$ ed lo si sottrae a $\boldsymbol{\tau}_{sgs}^*$ si ha

$$\boldsymbol{\tau}_{sgs}^* - \widetilde{\boldsymbol{\tau}_{sgs}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}} - \widetilde{\mathbf{U}\mathbf{U}} = \mathbf{L}, \quad (1.96)$$

in cui il tensore \mathbf{L} è noto e calcolabile dal campo \mathbf{U} . Questa relazione, nota come identità di Germano, è la base del modello dinamico che modella con un'ipotesi di lunghezza di mescolamento le parti deviatoriche di $\boldsymbol{\tau}_{sgs}^*$ e $\boldsymbol{\tau}_{sgs}$ rispettivamente con $\boldsymbol{\tau}_d^* = -2C'\tilde{\Delta}^2|\tilde{\mathbf{E}}|\tilde{\mathbf{E}}$ e $\boldsymbol{\tau}_d = -2C'\Delta^2|\mathbf{E}|\mathbf{E}$ (dove si è posto $C' = C_\nu^2$ e si è supposto che C' sia indipendente dalla dimensione del filtro come suggerito dalla discussione precedente) e permette di ricavare dalla (1.96) una relazione per il calcolo di C' :

$$C'2(\Delta^2|\mathbf{E}|\mathbf{E} - \tilde{\Delta}^2|\tilde{\mathbf{E}}|\tilde{\mathbf{E}}) = C'\mathbf{M} = \mathbf{L}_d, \quad (1.97)$$

dove \mathbf{L}_d è la parte deviatorica di \mathbf{L} . Dalla (1.97) è possibile ricavare C' ma è bene notare che poiché \mathbf{M} ed \mathbf{L}_d sono due tensori, per calcolare C' è necessario contrarre la relazione con un tensore. Tra tutte le possibili scelte è facile dimostrare che la contrazione con \mathbf{M} è quella che minimizza gli errori; indicando infatti con $e^2 = |C'\mathbf{M} - \mathbf{L}_d|^2$ l'errore quadratico che si commette parametrizzando il tensore noto \mathbf{L}_d con l'ipotesi di lunghezza di mescolamento si ha differenziando rispetto a C' :

$$\frac{\partial e}{\partial C'} = 2C'(\mathbf{M}\mathbf{M} - \mathbf{L}_d\mathbf{M}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 e}{\partial C'^2} = 2\mathbf{M}\mathbf{M} > 0, \quad (1.98)$$

da cui si evince che il minimo errore si ha quando si annulla la sua derivata prima, ossia

$$C' = \frac{\mathbf{L}_d\mathbf{M}}{\mathbf{M}\mathbf{M}} \quad (1.99)$$

che è la forma più usata per il modello dinamico. È evidente che il calcolo di C' dalla (1.99), piuttosto che l'assegnazione di un valore dall'esterno come nel modello di Smagorinsky, comporta un notevole aggravio dal punto di vista computazionale in quanto è necessario calcolare oltre ad \mathbf{E} anche $\tilde{\mathbf{E}}$ e bisogna effettuare varie contrazioni di tensori. Ciò produce un incremento del tempo di calcolo totale di circa il 30% che costituisce un notevole aggravio rispetto al modello di Smagorinsky (che normalmente non aumenta il tempo di calcolo totale di più del 5%). Il maggior carico computazionale è tuttavia ampiamente compensato dai vantaggi che la determinazione dinamica della C' produce sulla soluzione: il fatto che C' sia calcolato dalla (1.99) implica che essa è parte della soluzione numerica rendendo così il modello di turbolenza completo. Il valore di C' viene inoltre determinato

localmente²³ dando la possibilità al modello di modulare ν_T in relazione all'intensità locale della turbolenza e non solo in relazione al valore locale di $|\mathbf{E}|$ che potrebbe essere molto elevato anche in un flusso laminare. Come caso estremo si può pensare al sottostrato viscoso di uno strato limite turbolento ($y^+ \leq 5$) in cui il massimo di $|\mathbf{E}|$ si ha alla parete ($y = 0$) sebbene il flusso sia localmente laminare; in tale contesto l'equazione (1.99) fornisce automaticamente $C' = 0$ 'spegnendo' il modello di turbolenza dove non serve mentre il modello di Smagorinsky in cui C_ν è assegnata staticamente dall'esterno ha bisogno di una correzione *ad hoc* in prossimità delle pareti (il damping di van Driest) per correggere l'eccessiva dissipazione.

1.12.4 Risoluzione a parete

Prima di concludere questa breve panoramica, vogliamo sottolineare che in prossimità di pareti la dinamica della turbolenza è notevolmente diversa rispetto alle condizioni di omogeneità ed isotropia (anche se solo in forma locale come ipotizzato da Kolmogorov) e ciò implica importanti modifiche nei modelli di turbolenza e variazioni (in peggio) delle stime delle risorse computazionali richieste dalle varie tecniche di simulazione (DNS, LES e RANS).

Un primo importante effetto di parete è la diminuzione del numero di Reynolds locale $Re_l = K^2/(\epsilon\nu)$ che invalida l'ipotesi di 'alto numero di Reynolds' alla base dei modelli di turbolenza. La manifestazione più evidente di tale fenomeno è l'eccessiva dissipazione prodotta dalla ν_T in prossimità di parete che, se non corretta produce risultati non affidabili. Se per semplicità riconsideriamo il modello di lunghezza di mescolamento $\nu_T = \ell^2|\mathbf{E}|$, con $\ell = Ay$ (equazione 1.57) essendo y la distanza dalla parete ed A una costante empirica, è evidente che tale modello può fornire risultati accettabili nella zona logaritmica del profilo di velocità $30 \leq y^+ \leq 300$. Al contrario per $5 < y^+ < 30$ essendo sforzi turbolenti e sforzi viscosi di intensità confrontabile la legge logaritmica non è più valida e la relazione $\ell = Ay$ dà una viscosità turbolenta troppo elevata. Per $y^+ < 5$ addirittura gli sforzi turbolenti sono trascurabili rispetto a quelli viscosi e contestualmente $|\mathbf{E}|$ assume i massimi valori senza che la viscosità turbolenta abbia alcun ruolo. Per compensare la mancanza di fisica del modello si usano delle funzioni di smorzamento (damping functions) $f(y)$ con cui modificare la viscosità turbolenta $\nu_T = f\ell^2|\mathbf{E}|$. La $f(y)$ risulta unitaria lontano dalle pareti mentre tende esponenzialmente a zero in prossimità di una superficie solida; alcune espressioni per la $f(y)$ sono

$$f(y) = e^{-\frac{2.5}{1+Re_l/50}}, \quad f(y^+) = 1 - e^{-(0.0002y^+ + 0.00065y^{+2})}, \quad (1.100)$$

$$f(y^+) = \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}\right)^2 \quad \text{con} \quad A^+ = 18,$$

essendo l'ultima delle (1.100) la funzione di van Driest che è solitamente usata con il modello di Smagorinsky nelle simulazioni LES.

²³In pratica la C' calcolata dalla (1.99), che è una funzione sia dello spazio che del tempo, viene impiegata per il calcolo della ν_T solo dopo un'opportuna operazione di media in quanto si è osservato che le elevate fluttuazioni di C' possono provocare instabilità nella soluzione numerica. La media di C' può avvenire nelle direzioni di omogeneità (o periodicità) del flusso, nel tempo (se il fenomeno è statisticamente stazionario) oppure si possono fare delle medie locali (un filtraggio) o medie lungo le linee di corrente del campo \mathbf{U} (modello Lagrangiano).

Due importanti eccezioni alle procedure di smorzamento sopra descritte sono il modello $\langle v^2 \rangle - K - \epsilon$ per la modellistica RANS ed il modello dinamico (equazione 1.99) per la determinazione di ν_T nella LES. In entrambi i casi infatti i modelli forniscono un comportamento corretto in prossimità delle parete senza dover introdurre ulteriori parametri ‘ad hoc’.

Nell’ambito della modellistica RANS e dei modelli tipo $K - \epsilon$ le varie espressioni di f vengono usate per correggere la C_ν a parete ponendo $\nu_T = f C_\nu K^2 / \epsilon$. Talvolta vengono effettuate anche delle correzioni sulle equazioni per il modello di turbolenza; per esempio l’equazione per la ϵ (1.87) viene modificata in

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\mathcal{P}\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right), \quad (1.101)$$

dove f_1 ed f_2 sono due funzioni simili alle (1.100) per la cui espressioni particolari si rimanda ai testi specializzati.

Un altro importante effetto indotto dalle pareti è la generazione di strutture alla scala δ^+ che costituisce l’unica lunghezza rilevante nella dinamica della turbolenza. In altre parole, mentre in condizioni di omogeneità ci sono la scala integrale L e quella dissipativa η in prossimità delle pareti entrambe convergono a δ^+ (infatti non esiste più il range inerziale) e tanto le tecniche che simulano solo le scale più grandi (RANS e LES) quanto quelle che catturano la dinamica completa (DNS) sono condannate a risolvere le strutture fino alla scala δ^+ vicino alle pareti. Tale richiesta risulta inattuabile ai numeri di Reynolds caratterizzanti le applicazioni ingegneristiche in quanto è valida la correlazione empirica $\delta^+ / L_G \sim Re^{-0.88}$ che è ben più restrittiva della analoga per turbolenza omogenea ed isotropa $\eta / L \sim Re^{-0.75}$.

Per poter discutere più in dettaglio le necessità di risoluzione della turbolenza di parete ricordiamo che nel caso di flussi free-shear ci sono la scala di Kolmogorov η , la scala integrale L (in cui l’energia viene immessa nello spettro) e la scala geometrica del problema L_G . Nella DNS vengono simulate tutte le scale da L_G ad η e le risorse attuali computazionali diventano rapidamente inadeguate già per numeri di Reynolds dell’ordine 10^4 . Al contrario nella simulazioni LES e RANS in cui, rispettivamente vengono simulate le scale fino a quelle intermedie del range inerziale e le grandi scale determinate dalla geometria del problema, le risorse di calcolo sono praticamente indipendenti dal numero di Reynolds rendendo praticabile la simulazione di flussi a numeri di Reynolds di interesse industriale.

Consideriamo ora ,per una discussione analoga sui flussi di parete, la simulazione numerica di uno strato limite turbolento su una lastra piana ed indichiamo rispettivamente con x e z le coordinate nel piano della lastra ed y la direzione ortogonale. Detti Δx , Δy e Δz i passi di discretizzazione della griglia di calcolo ci chiediamo quanti punti di calcolo (N_T) sono necessari a risolvere il moto in un volume di fluido L_G^3 ; poiché è stato anticipato che in prossimità della parete le scale di moto hanno dimensione δ^+ l’idea più banale è avere una spaziatura uniforme del tipo $\Delta x = a\delta^+$, $\Delta y = b\delta^+$ e $\Delta z = c\delta^+$ con a , b e c delle costanti dipendenti dalla tecnica (DNS, LES o RANS) e dal problema. Il numero di nodi di calcolo risulta quindi

$$N_T = \int_0^{L_G} \int_0^{L_G} \int_0^{L_G} \frac{dx}{\Delta x} \frac{dy}{\Delta y} \frac{dz}{\Delta z} = \frac{1}{abc} Re^{2.66}, \quad (1.102)$$

che come anticipato cresce più rapidamente che nel caso di turbolenza omogenea.

É bene comunque osservare che poichè le scale di moto più piccole sono in prossimità della parete non c'è motivo di mantenere la stessa discretizzazione in tutte le zone del flusso. Una pratica comunemente utilizzata è quella di adottare una discretizzazione non uniforme nella direzione ortogonale alla parete (y) e di prescrivere per il passo di griglia $\Delta y = \max(b\delta^+, ey)$ ottenendo

$$N_T = \int_0^{L_G} \int_0^{L_G} \int_0^{L_G} \frac{dx}{\Delta x} \frac{dy}{\Delta y} \frac{dz}{\Delta} = \quad (1.103)$$

$$\int_0^{L_G} \int_0^{b\delta^+} \int_0^{L_G} \frac{dx}{\Delta x} \frac{dy}{\Delta y} \frac{dz}{\Delta} + \int_0^{L_G} \int_{b\delta^+}^{L_G} \int_0^{L_G} \simeq \frac{Re^{1.76}}{aec} \ln \frac{Re^{0.88}}{b}.$$

Questa espressione costituisce un notevole progresso rispetto alla (1.102) sebbene contenga ancora un fattore $Re^{1.76}$ che deriva dal discretizzare Δx e Δz proporzionalmente a δ^+ . D'altra parte ciò è necessario in quanto le strutture della turbolenza in prossimità della parete hanno dimensioni dell'ordine di δ^+ in tutte le direzioni e, in un contesto di griglie strutturate, la stessa spaziatura di griglia in x e z deve essere mantenuta sia vicino che lontano dalla parete. Quest'ultima osservazione suggerisce che se si potesse evitare di simulare esplicitamente lo strato di fluido più prossimo alla parete ($y_c \leq 30-300$) sarebbe possibile adottare una mesh considerevolmente meno fitta e soprattutto indipendente da δ^+ . Più in particolare assumendo $\Delta x = aL_G$, $\Delta y = \max(by, dL_G)$ $\Delta z = cL_G$ si ottiene

$$N_T = \int_0^{L_G} \int_{y_c}^{L_G} \int_0^{L_G} \frac{dx}{\Delta x} \frac{dy}{\Delta y} \frac{dz}{\Delta} \simeq \frac{1}{abc} \ln \frac{1}{d}, \quad (1.104)$$

che risulta indipendente dal numero di Reynolds.

Il notevole vantaggio computazionale fornito dalla stima (1.104) viene notevolmente ridotto dal dover sostituire lo stato di fluido che non viene esplicitamente simulato ($0 \leq y \leq y_c$) con un ulteriore modello, detto appunto modello di parete. Una delle possibilità più semplici, ed anche più utilizzate per simulazioni ingegneristiche RANS, è quella di sfruttare l'universalità del profilo di figura 1.24 per assegnare direttamente il valore di u^+ al particolare valore y_c^+ a cui viene posto il primo nodo di griglia rispetto alla parete. L'implementazione pratica di questa procedura detta di 'wall function' dipende molto sia dallo schema numerico che dal modello di turbolenza utilizzato e si rimanda ai testi specialistici per una descrizione dettagliata. In questo contesto vogliamo però sottolineare che la determinazione delle grandezze di parete u^+ ed y_c^+ dipende dal valore locale di u_τ che a sua volta dipende dallo sforzo di parete τ_w . Quest'ultimo in generale non è noto in forma esplicita in quanto dipende dal valore di $U(y_c)$ che bisogna appunto determinare; ciò comporta la necessità di dover iterare tra i valori locali di U ed u^+ fino a raggiungere la convergenza. È inoltre importante notare che l'universalità del profilo di figura 1.24 è ottenuto solo per una lastra piana con gradiente di pressione esterno nullo e tale condizione non è mai soddisfatta da applicazioni computazionali di interesse ingegneristico. Come conseguenza, mentre nelle condizioni in cui è valida la legge di parete la procedura sopra descritta fornisce ottimi risultati, nei casi più generali può dare risultati insoddisfacenti specialmente se il flusso presenta zone di separazione determinate dalla dinamica dello strato limite (e non da spigoli presenti nella geometria). Nei casi più generali, inoltre

la soluzione numerica dipende anche dal particolare valore di y_c scelto introducendo un ulteriore fattore di arbitrarietà.

Nell'ambito delle tecniche LES la procedura sopra descritta non viene utilizzata principalmente perché la figura 1.24 dà una descrizione media del campo di velocità mentre nelle simulazioni LES la soluzione è non stazionaria e la 1.24 può essere eventualmente ottenuta solo a posteriori dopo aver mediato la soluzione. Una possibile soluzione, che tuttavia costituisce ancora materia di ricerca e non è consolidata come la wall function per i RANS, è quella di risolvere nella zona $0 \leq y \leq y_c$ delle equazioni con l'approssimazione di strato limite ma su una griglia sufficientemente fitta da risolvere i gradienti di velocità. la semplificazione, è nell'utilizzare a parte un set di equazioni semplificato sia perché si può integrare con uno schema marciante (in quanto le equazioni di strato limite sono paraboliche) sia perché non contengono la pressione come incognita (in quanto è imposta dal campo esterno) e quindi non necessita di un'equazione ellittica per la sua determinazione.