Calcolo Numerico — Ingegneria Civile

11/07/2012

Scrivere nome e cognome in alto sul foglio. Non è consentito l'uso di appunti testi, fogli, smartphone, e simili. Usare anche il retro del foglio per lo svolgimento.

Esercizio 1

Condizionamento: descrivere la problematica, includendo almeno un esempio pertinente.

Svolgimento. In generale il condizionamento di un problema reale è la misura di quanto gli errori presenti nei dati si propagano nella soluzione del problema. Siano D, S rispettivamente lo spazio dei dati e lo spazio delle soluzioni, indichiamo con $x \in \mathsf{D}$ i nostri dati affetti da un errore $\Delta x \in \mathsf{D}$, e con $y \in \mathsf{S}$ la soluzione del problema (che chiaramente è una funzione di x), a sua volta affetta da un errore $\Delta y \in \mathsf{S}$. La misura del condizionamento del problema che stiamo considerando (in termini di errori relativi) è data dal coefficiente κ per cui valga la relazione

$$\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} \leq \kappa \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

per opportune norme su D e su S, rispettivamente. Il coefficiente κ è detto numero di condizionamento del problema. Osserviamo dalla relazione di cui sopra che la propagazione dell'errore dovuta ad un problema mal condizionato (ovvero per cui κ sia *grande*) non dipende dal metodo utilizzato per la risoluzione del problema, né dalla precisione con cui si effettuano le operazioni, ma è una proprietà intrinsecha legata esculsivamente al problema ed alla presenza di errore sui dati.

Un esempio possibile è il seguente. Siano

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \geq 0$$

e si consideri il sistema lienare $A(\mu)x = y$. Il problema è ben posto se $0 \neq \mu = \det A(\mu)$ ed in questo caso si ha $x = A(\mu)^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Introduciamo ora una perturbazione sul vettore dei termini noti

$$\Delta y = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

e consideriamo il sistema lineare perturbato $A(\mu)\tilde{x} = (y + \Delta y)$. La soluzione di tale sistema lineare è $\tilde{x} = A(\mu)^{-1}(y+\Delta y) = \begin{pmatrix} 2+\mu & 1+\mu \end{pmatrix}^t$ che è **sostanzialmente differente** dalla soluzione iniziale x, anche per valori piccolissimi di μ. Il motivo di questa instabilità è dato dal grave malcondizionamento del problema. Ricordiamo che il numero di condizionamento per il problema della risoluzione di un sistema di equazioni lineari $Mx = b$ è dato da $\kappa_{\| \, \|}(M) = \|M\|\|M^{-1}\|$. Nel nostro caso, si ha

$$\kappa_\infty(A) = \|A(\mu)\|_\infty \|A(\mu)^{-1}\|_\infty = 1 + \mu^{-1}$$

che, infatti, per valori piccoli di μ è enorme.

Esercizio 2

Equazioni algebriche: Considerare la applicazione del metodo di Newton alla funzione

$$f(x) = 2 - x^2 - cos(x) \qquad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

per il calcolo dello zero. Analizzare la convergenza della successione $\{x_n\}$.

Svolgimento. Sia $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Osserviamo che f è strettamente decrescente per $x \in I$, essendo somma di funzioni strettamente decrescenti in tale intervallo. Più precisamente si può osservare facilmente che $f'(x) = \sin x - 2x$ è sempre negativa per $x \in I$. [1] Dunque f ha uno ed un solo zero in I, poiché $f(0) > 0$ e $f(\pi/2) < 0$. Sia α tale zero e sia

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

la funzione di iterazione di Newton. Dal fatto che $f'(x) \neq 0$ se $x \in I$, possiamo concludere che $g'(\alpha) = 0$ essendo

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$$

dunque, per la continuità di f, possiamo affermare che il metodo di Newton converge per ogni x_0 scelto abbastanza vicino ad α e la convergenza è almeno quadratica.

Siano ora $I_+ = (0, \alpha)$ e $I_- = (\alpha, \pi/2)$. Chiaramente $f(x) > 0$ per $x \in I_+$ e $f(x) < 0$ se $x \in I_-$. Osserviamo inoltre che $f''(x) = \cos x - 2 < 0$ per ogni $x \in I$, dunque

$$f''(x)f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in I_+ \\ = 0 & \text{se } x = \alpha \\ > 0 & \text{se } x \in I_- \end{cases}$$

da cui possiamo concludere che il metodo di Newton applicato ad f converge per ogni $x_0 \in I_-$ e la successione $\{x_n\}_n$ da esso generato è strettamente decrescente.

Esercizio 3

Data $f(x) = \log(x + 1)$, approssimare $\int_0^1 f(x)dx$ con la regola dei due punti e discutere l'applicazione della regola dei trapezi per raggiungere una tolleranza di 10^{-3}.

Svolgimento. Applicando alla nostra funzione la formula per la regola dei due punti

$$\int_a^b f(x)dx \simeq I_2(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

si ottiene

$$I_2(f) = \frac{1}{2}(\log(1) + \log(2)) = \frac{\log(2)}{2}\,.$$

[1] Un modo per convincersi di questo fatto è quello di rappresentare graficamente $\sin x$ e $2x$. Un altro è quello di osservare che, per il teorema di Taylor, se $x \in (0, 1)$, allora $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$, dunque $\sin x < x$. Tale disuguaglianza vale chiaramente anche per $x \in (1, \pi/2)$, essendo $|\sin x| \leq 1$. Dunque $\sin x < x$ se $x \in I$, ovvero $f'(x) < 0$.

L'errore per la formula dei trapezi (composita) si può stimare per mezzo della formula

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|, \qquad \xi \in [a,b] \tag{1}$$

dove n è il numero di intervalli in cui suddividiamo $[a,b]$. Nel nostro caso, $[a,b]=[0,1]$ e

$$|f''(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{in } [0,1]$$

che è una funzione decrescente per $x \geq 0$.[2] Dunque

$$|f''(x)| \leq |f''(0)| = 1 \qquad \forall x \in [0,1]$$

da cui, sostituendo in (**??**),

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{1}{12n^2}|f''(0)| = \frac{1}{12n^2}\,.$$

Per assicurare che $|E_n^T(f)| < 10^{-3}$ chiediamo che

$$\frac{1}{12n^2} < 10^{-3} \Longleftrightarrow n > 5\sqrt{\frac{10}{3}}$$

da cui possiamo concludere che per raggiungere la tolleranza richiesta è sufficiente prendere n maggiore del primo intero che maggiora $5\sqrt{\frac{10}{3}}$.

[2] Anche in questo caso è facile convincersi di questo fatto osservando il grafico della funzione, o facendone la derivata. Precisamente $\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^3}$ che è sempre minore di zero se $x \geq 0$.