Calcolo Numerico — Ingegneria Civile

27/02/2013

Scrivere nome e cognome in alto sul foglio. Non è consentito l'uso di appunti testi, fogli, smartphone, e simili. Usare anche il retro del foglio per lo svolgimento.

Esercizio 1

Discutere del concetto di condizionamento di un problema numerico. Dare una stima del condizionamento della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione

Il condizionamento di un problema numerico è il legame tra gli errori nei dati e gli errori nei risultati. Questo parametro è importante nella cosiddetta analisi dell'errore all'indietro, in cui si modellano gli errori prodotti da un algoritmo approssimato come perturbazioni nei dati iniziali, ossia si vede il valore calcolato come il valore esatto in un dato perturbato. L'importanza del condizionamento sta nel fatto che esso dipende solo dal problema e non dal metodo impiegato. Sia infatti $y = f(x)$ una funzione della quale calcoliamo una approssimazione $\hat{f}(x) = f(x + \delta x)$; se f è differenziabile abbiamo

$$\hat{f}(x) = f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + O(\delta x^2);$$

questo è equivalente ad avere

$$|f(x + \delta x) - f(x)| \approx |f'(x)||\delta x|.$$

per cui l'effetto della perturbazione nei dati viene amplificato da un fattore $|f'(x)|$ che non dipende dalla funzione approssimata $\hat{f}$ ma da quella "vera" f. Calcolando ora l'errore relativo, si ottiene

$$\frac{|f(x + \delta x) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|\delta x|}{|x|} \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \tag{1}$$

in cui la quantità $|f'(x)| \cdot |x|/|f(x)|$ è definita come numero di condizionamento.

Il numero di condizionamento di una matrice risulta essere

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|;$$

nel caso della norma 2, esso è pari al rapporto tra massimo e minimo valore singolare, e nel caso di matrice simmetrica è anche pari al rapporto tra massimo e minimo autovalore. La matrice proposta è simmetrica; quindi possiamo utilizzare gli autovalori, che sappiamo anche essere reali. Per il teorema di Gershgorin, essi saranno contenuti nei cerchi centrati sui valori degli elementi diagonali e aventi raggio pari alla somma dei moduli degli elementi non diagonali, considerati riga per riga; in definitiva, nel caso proposto, avremo che lo spettro della matrice è compreso nell'intervallo $[0.5, 5.5]$, e quindi si avrà $\lambda_{\max} \leq 5.5$, $\lambda_{\min} \geq 0.5$, da cui

$$\kappa(A) \leq \frac{5.5}{0.5} = 11.$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

si ricercano gli zeri nell'intervallo $[1, 3]$ con il metodo della iterazione funzionale. A questo scopo si propongono le alternative:

1. $\phi(x) = x^2 - 2$;
2. $\phi(x) = \sqrt{2 + x}$;
3. $\phi(x) = 1 + \frac{2}{x}$;

Si discutano le proprietà delle alternative proposte.

Soluzione

Si osservi che la funzione data è continua e ammette tutte le derivate, e per l'intervallo proposto si ha $f(1) = -2$, $f(3) = 4$, per cui certamente avrà uno zero nell'intervallo considerato. Vale inoltre $f'(x) = 2x - 1$ e si ha $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [1, 3]$, per cui lo zero è unico. Tutte le alternative proposte ammettono come punti fissi gli zeri della funzione data; dovremo quindi distinguerne le proprietà di convergenza esaminandone le derivate.

Per la funzione $\phi(x) = x^2 - 2$, si ha

$$\phi'(x) = 2x$$

e quindi $|\phi'(x)| > 1$ per ogni $x \in [1, 3]$; quindi l'iterazione non può convergere allo zero della funzione.

Per la funzione $\phi(x) = \sqrt{2 + x}$, si ha

$$\phi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2 + x}}$$

per cui $|\phi'(x)| < 1$ per ogni $x \in [1, 3]$, e l'iterazione convergerà allo zero per ogni valore iniziale $x_0 \in [1, 3]$.

Per la funzione $\phi(x) = 1 + \frac{2}{x}$ si ha

$$\phi'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

e si ha $|\phi'(x)| < 1$ per $x > \sqrt{2}$, quindi si avrà convergenza per un punto iniziale nell'intervallo $[\sqrt{2}, 3]$, ammesso che la radice appartenga a questo sottointervallo. Questo può essere facilmente verificato notando che $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0$.

Usando il fatto che la funzione è un polinomio di secondo grado possiamo anche sapere che la radice cercata è $x = 2$, e la seconda funzione di iterazione ha una derivata di valore assoluto piu' piccolo e quindi converge più velocemente nell'intorno della soluzione; ovviamente questa conoscenza non sarebbe disponibile per una funzione generica.

Esercizio 3

Data $f(x) = x \cdot e^{-x}$, approssimare $\int_0^1 f(x)dx$ con la regola dei due punti e discutere l'applicazione della regola dei trapezi per raggiungere una tolleranza di 10^{-3}.

Soluzione

Per la regola dei due punti si ha

$$\int_a^b f(x)dx \simeq I_2(f) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

si ottiene

$$I_2(f) = \frac{1}{2}(0 \cdot e^0 + 1 \cdot e^{-1}) = \frac{1}{2e}\,.$$

L'errore per la formula dei trapezi (composita) si può stimare per mezzo della formula

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|, \qquad \xi \in [a,b] \tag{2}$$

dove n è il numero di intervalli in cui suddividiamo $[a,b]$. Nel nostro caso, $[a,b]=[0,1]$ e

$$|f''(x)| = |e^{-x}(x-2)| \text{ in } [0,1]$$

che nell'intevallo di interesse è una funzione negativa e strettamente crescente per cui il massimo valore assoluto verrà assunto in $x=0$ e vale

$$|f''(0)| = 2.$$

Quindi avremo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{2(b-a)^3}{12n^2}$$

per cui la richiesta $E_n \leq 10^{-3}$ equivale a

$$n \geq \sqrt{\frac{1000}{6}}$$

da cui

$$n \geq 13.$$